

1. Einführung

- Maxima ist ein Abkömmling von Macsyma, dem legendären Computer Algebra System, das in den späten 60er Jahren am Massachusetts Institute of Technology (kurz MIT) entstand.
- Ziel des Programms ist die Manipulation von algebraischen Ausdrücken. Mit Maxima kann man differenzieren, integrieren, Grenzwerte berechnen, Gleichungen lösen, faktorisieren, Differentialgleichungen lösen und vieles mehr. mit Hilfe der Plot-Möglichkeiten bietet das Programm auch viele Möglichkeiten zur Visualisierung.
- Maxima ist in CommonLisp geschrieben und kann auf verschiedensten Plattformen (z.B. Linux, Windows, MacOS X) kompiliert werden.
- Macsyma wurde auf Basis von Förderungen des Energieministeriums (Department of Energy - DOE) weitergeführt und wurde 1999 vom Markt genommen.
- Ein Teil wurde unter dem Namen Maxima von William F. Schelter (Department of Mathematics, Univ. of Texas) ab 1982 weitergeführt (bis zu seinem Tod 2001). 1998 wurde der Sourcecode unter GNU General Public Licence (GPL) veröffentlicht. Seither betreut eine Gruppe von Usern und Entwicklern Maxima.
- In den letzten Jahren kamen zwei Bereiche hinzu - graphische Oberflächen (GUI) wie **wxMaxima** und **xMaxima** und Plot-Möglichkeiten auf der Basis von **gnuplot**.

Maxima-Pakete für diverse Betriebssysteme und Dokumentation lassen sich kostenfrei von der Projektseite <http://maxima.sourceforge.net/index.html> downloaden. Bei den meisten neuen Distributionen sind die verschiedenen graphischen Oberflächen bereits inkludiert.

2. Numerik

Maxima-Eingabeaufforderung:

- Unter Windows: cmd – cd\programme\Maxima-5.14.0\bin
- Eingabe: maxima (Beispiele: $31*283-42*178$; und $\text{diff}(3*\text{sqrt}(x)/x$;
- Abschluss der Ausdrücke mit Strichpunkt ist zwingend!.
- Beenden mit quit(); oder mit STRG + C (eine Batchdatei läuft)

Graphische Oberflächen erleichtern den Umgang (wxMaxima bzw. xMaxima). Wir starten anschließend **wxMaxima**.

<p>Normale Rechenoperationen</p> <ul style="list-style-type: none"> • numerischer Rechner • Möglichkeit der nachträglichen Ausbesserung <p>$31*283 - 42*178$</p>	<p>Shortcuts in wxMaxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • F4 ... Fokus auf die Eingabezeile • Return • STRG + Return <p>Aktionen in wxMaxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Eingabezeile • Löschen eines Ausdrucks
<p>Wie (fast) jedes CAS ist auch Maxima geprägt durch eine exakte Arithmetik (z.B. bei Bruchzahlen)</p> <p>$11/28 + 13/42$; ergibt: $59/84$</p>	
<p>Rechenoperationen versus Vereinfachen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Vereinfachen von numerischen Ausdrücken • Numerische Berechnung (numer, bfloat, Genauigkeit) <p>$5*\text{sqrt}(32)-7*\text{sqrt}(8)$</p> <ul style="list-style-type: none"> • approximieren zu 8.485281... • vereinfachen zu $6*\text{sqrt}(2)$ 	<p>Shortcuts in wxMaxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • STRG + F ... Approximation <p>Aktionen in wxMaxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Zugriff auf letzten Ausdruck mit % • <ausdruck>,numer ... Approximation • Menüfunktionen: <Vereinfachen> <Ausdruck vereinfachen> <Numerisch> <Als Gleitkommazahl> <Numerisch> <Als lange Gleitkommazahl> <Numerisch> <Genauigkeit ...>

	<ul style="list-style-type: none"> Befehle ratsimp ratsimp(%) bfloat bfloat(%) fpprec fpprec:32
Beispiel mit PI – beliebige Genauigkeit: fpprec:200; bfloat(%pi); Konstante (Auswahl): %e ... Eulersche Zahl e %i ... imaginäre Einheit i %pi ... Pi %phi ... (1 + sqrt(5))/2, Goldener Schnitt inf, minf ... Reell positiv/negativ unendlich	Besonderheiten in Maxima: <ul style="list-style-type: none"> \$ am Ende der Eingabe unterdrückt Output <Maxima> <Formeldarstellung ändern> set_display('ascii)\$ (oder xml)
Umstellung der Formeldarstellung – braucht man auch bei extrem langen Ganzzahlen: 3^1000 2008!	
Zahlentheorie <ul style="list-style-type: none"> Funktionen zur Zahlentheorie und Teilbarkeit gcd(2310,1100) [factor(2310), factor(1100)] Ergebnisvergleich: 2*5*11 next_prime(2310) prev_prime(2310) mod(7261,256) => 93 floor(7261/256) => 28 28*256+93 => 7261	Aktionen in Maxima: <ul style="list-style-type: none"> Zusammenfassen mehrerer Befehle mit Hilfe von eckigen Klammern (Liste von Befehlen)

Aber Computer Algebra ist natürlich mehr als nur Rechnen mit Zahlen!

3. Variable

Variable können mit Werten belegt werden, oder auch ohne Zuweisung verwendet werden.
Achtung: Maxima unterscheidet bei den Variablennamen Groß- und Kleinschreibung!

Wertzuweisung: a:10; b:sqrt(2);	Aktionen in Maxima: <ul style="list-style-type: none"> values; Welche Variablennamen sind belegt remvalue(<VarName>; löscht eine Variablenbelegung remvalue(all) löscht alle Belegungen
Substitution: equ1:a+2*a^2=b subst(5,a,equ1)	Aktionen in Maxima: <ul style="list-style-type: none"> subst(u,v,w) ... u ersetzt v in w (alle Vorkommen)
Evaluation: ev(x^2+y^2,x=1,y=2) ev(x^2+x+1,x=[0,1,2,3,4])	Aktionen in Maxima: <ul style="list-style-type: none"> Werteliste erzeugen, Evaluation eines Ausdrucks durch Argumente bzw. Argumentlisten

Termvereinfachung

<pre>1/(a+b)-1/(a-b)+(a+b)/(a^2-b^2) ratsimp(%) ordergreat(a,b,c) (x+4*y)^3 expand(%) factor(2*a^3+11/3*a^2-16/3*a-7) gfactor(x^4-1) partfrac((4*z-1)/((z+2)*(z-1)^2),z)</pre>	<p>Aktionen in Maxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ratsimp() ... vereinfachen • ordergreat(a,b,c ... Variablenordnung) • expand, factor, gfactor (komplex) • ratexpand (manchmal "stärker" als expand) • partfrac ... Partialbruchzerlegung
--	---

Durch spezielle Ergänzungen kann die Vereinfachung auch beeinflusst werden. Dies ist bei logarithmischen und trigonometrischen Ausdrücken genauso notwendig wie bei verschachtelten Wurzel­ausdrücken.

<ul style="list-style-type: none"> • ratsimp(<Term>), trigexpand=super • ratsimp(<Term>), logexpand=super • trigsimp, trigexpand, trigreduce • radcan ... vereinfacht Exponentialausdrück, Logarithmen und Wurzel­ausdrücke • load(sqdnst) → sqrtidenest(...)
--

<pre>sin(%pi/4-x)+sin(%pi/4+x); ratsimp(%), trigexpand=super;</pre>	<p>Aktionen in Maxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ergänzungen zu ratsimp
<pre>log(a*b); ratsimp(%) ratsimp(%), logexpand=super; radcan(%)</pre>	<p>logexpand, radcan</p>
<pre>sqrt(2*sqrt(3)+4); load(sqdnst); sqrtidenest(%)</pre>	<p>sqrtidenest / Paket: sqdnst</p> <ul style="list-style-type: none"> • load(sqdnst) • Befehl: sqrtidenest()

Termsubstitution

<pre>x^6+12*x^4+43*x^2+61; ratsubst(a,x^2+4,%); subst(a,x+y,x+y+z); ratsubst(a,x+y,x+y+z); ratsubst(u,sqrt(x),x); radsubstflag:true; nochmals ratsubst(u,sqrt(x),x);</pre>	<p>Substituieren von Termen</p> <ul style="list-style-type: none"> • subst(a,b,c) ... a ersetzt b in c • ratsubst(a,b,c) ... stärker als subst! • radsubstflag:true ... auch Wurzeln werden beachtet!
--	--

4. Gleichungen

Lösung von Gleichungen in einer Variablen mit Hilfe von Äquivalenzumformungen:

<pre>a*x+b=c (a*x+b=c)-b ...</pre>	<p>Shortcuts in wxMaxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • F5 ... Markierte Teile in die Eingabezeile kopieren
------------------------------------	---

Standard: SOLVE, ALGSYS, Menübefehle

$x^4+62x^3/15-112x^2/25-18x/25+1/15=0$ <ul style="list-style-type: none"> • Dialog über Menü <pre>solve(% ,x) bzw. algsys(% ,x) eq: ... solve(eq ,x) eq:x^3-4*x^2+6*x-4=0 algsys([eq],[x]),realonly:true;</pre>	<p>Aktionen in Maxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lösen mit Menü bzw. Befehlen • SOLVE, ALGSYS <p>Bezeichnen einer Gleichung mit einem Variablennamen</p> <p>Einschränkung der Lösungsmenge mit algsys</p>
---	--

Numerische Lösungen mit REALROOTS bzw. ALLROOTS bzw. FIND_ROOT

<pre>eqn:x^5+2*x^2+2*x-3=0 realroots(eqn,1*10^-10),numer allroots(eqn); find_root(eqn,x,-1,1)</pre>	<p>Aktionen in Maxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Numerische Lösung der Gleichung in der Grundmenge R • $1*10^{-10}$ legt Genauigkeit der Lösung fest • find_root ... Lösungen in einem Intervall
--	---

Zugriff auf Lösungen

<pre>loes:solve(3*x^2-139*x/24+7/4=0,x) [loes[1],loes[2]] ev(x,loes[1]) loes2:algsys([x^2+2*x-15=0],[x]) loes2[1][1] rhs(%)</pre>	<p>Aktionen in Maxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Zugriff auf Listenelemente • Evaluierung von Termen • RHS ... Right Hand Side, Gleichungsseiten einzeln ansprechen
--	---

Gleichungssysteme

<pre>eq1:17*x-12*y=5 eq2:3*x-y=-23 linsolve([eq1,eq2],[x,y]) eq1:x+y-z=11\$ eq2:x+2*y+3*z=17\$ eq3:x-4*y+2*z=4\$ linsolve([eq1,eq2,eq3],[x,y,z])</pre>	<p>Aktionen in Maxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • LINSOLVE ... lineare Gleichungssysteme lösen
---	---

<p>Matrizen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Matrizenfunktionen am Beispiel der Cramerschen Regel <pre>A:coefmatrix([eq1,eq2,eq3],[x,y,z]) d:determinant(A) AE:augcoefmatrix([eq1,eq2,eq3],[x,y,z]) B:col(AE,4) oder B:transpose([rhs(eq1),rhs(eq2),rhs(eq3)]) M:matrix() Dx:addcol(M,B,col(A,2),col(A,3)) loesx:determinant(Dx)/d</pre>	<p>Aktionen in Maxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • coefmatrix ... Koeffizientenmatrix eines Systems von linearen Gleichungen • augcoefmatrix ... ergänzt die Koeffizientenmatrix eines Systems von linearen Gleichungen um die konstanten Glieder als zusätzliche Spalte • div. Matrizenbefehle: transpose, matrix, col, addcol, determinant
--	--

<p>Nichtlineare Gleichungssysteme</p> <pre>g11:(x-2)^2+(y+3)^2=9 g12:2*x-y=7 solve([g11,g12],[x,y]) load(implicit_plot) wximplicit_plot([g11,g12], [x,-5,8],[y,-8,4])</pre>	<p>Aktionen in Maxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Laden eines Moduls (implicit_plot) • Unterschied: GnuPlot, wxPlot <p>Impliziter Plot der Gleichungen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Paket laden: zusätzliche Befehle
---	--

5. Funktionen

Eingabe von Funktionen $f(x) := x^2 - 3x - 2$ $f(2)$ $f1(x) := \text{diff}(f(x), x)$ $f1(2)$ $f1(x) := \text{``}(\text{diff}(f(x), x))$ $f1(2)$	Aktionen in Maxima: <ul style="list-style-type: none"> • Definition einer Funktion • Achtung: die rechte Seite wird dabei nicht evaluiert!! • Erzwingen der Evaluation durch " (zwei einzelne Hochkommas)
Funktionen in mehreren Variablen $V(r, h) := \text{sqrt}(r^2 * \pi * h)$	
Funktionswerte einzeln $f(1)$ mehrere (Liste) $[f(1), f(2), f(3)]$ Wertetabelle $\text{makelist}(f(x), x, -3, 4)$ Wertetabelle – Tricks (andere Schrittweite – hier 0.2): $\text{liste} := \text{makelist}(k/5, k, -10, 10)$ $f(\text{liste})$	Aktionen in Maxima: <ul style="list-style-type: none"> • Listen erzeugen • Befehl: makelist

Spezielle Funktionen

Trigonometrische Funkt. und Logarithmus $\sin(\pi/3)$ $\text{altgrad}(a) := a * 180 / \pi$ $\text{altgrad}(\pi/3)$ $\log(x), \exp(x)$ $\logb(x, a) := \log(x) / \log(a)$	Aktionen in Maxima: <ul style="list-style-type: none"> • Trigonometrie: Maxima rechnet grundsätzlich im Bogenmaß • Natürlicher Logarithmus ist eingebaut • Eigene Funktion für Logarithmen beliebiger Basis
Zusammengesetzte Funktionen (über Verzweigung IF) $f(x) := \text{if } x < (-1) \text{ then } x^2 \text{ else } x - 1$	Aktionen in Maxima: <ul style="list-style-type: none"> • Verzweigung IF .. THEN .. ELSE • $f(x) \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x - 1 & x \geq -1 \end{cases}$

Funktionsplot

Funktionsgraphen $f(x) := x^2 - 2x + 1$ $\text{wxplot2d}(f, [x, -5, 5], [y, -3, 6])$	Aktionen in Maxima: <ul style="list-style-type: none"> • wxplot2d, plot2d
Einzelne Punkte $f(x) := x^2 - 2x + 1$ $xy := \text{makelist}([x, f(x)], x, -5, 5)$ $\text{wxplot2d}([\text{discrete}, xy], [\text{style}, \text{points}])$	<ul style="list-style-type: none"> • Möglichkeiten zur "Verschönerung" • [style, [points, 2, 2, 2]] • Größe – Farbe – Form
Parametrischer Plot $g(t) := [5 * \cos(t), 3 * \sin(t)]$ $\text{wxplot2d}([\text{parametric}, g(t)[1], g(t)[2]], [\text{nticks}, 300], [t, -\pi, \pi], [x, -6, 6], [y, -4, 4])$	<ul style="list-style-type: none"> • nticks: Genauigkeit beim Zeichnen • t ... Parameter

6. Diff/Int-Rechnung

<p>Summen: Berechne den Sinuswert für $z=\pi/4$ über die Reihenberechnung</p> $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ <pre>sin_(z,k):=sum((-1)^n*z^(2*n+1)/(2*n+1)!, n,0,k) sin_(%pi/4,10)</pre>	<p>Aktionen in Maxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • <code>sum(<term>,var,von,bis)</code>
<p>Grenzwerte: <pre>folge(n):=(1+1/n)^n folge(10) limit(folge(n),n,inf)</pre></p>	<p>Aktionen in Maxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Befehl: <code>limit</code> • <code>inf ... unendlich</code>

Differenzieren

<pre>f(x):=x^3-x^2+2*x-3 f1(x):=' '(diff(f(x),x)) oder define(f1(x),diff(f(x),x)) Zweite Ableitung f2(x):=' '(diff(f(x),x,2))</pre>	<p>Shortcuts im Maxima:</p> <ul style="list-style-type: none"> • F6 ... Einfügen eines Kommentars
--	--

Beispiel:

Diskutiere die Funktion $f: y = \frac{x^2+1}{x^2-4}$

```
f(x):=(x^2+1)/(x^2-4)
```

```
solve(denom(f(x))=0) ... Definitionsbereich
```

```
solve(f(x)=0,x) ... mögliche Nullstellen (in diesem Fall keine reellen Nullstellen)
```

```
f1(x):=' '(diff(f(x),x)) ... 1. Ableitung
```

```
f2(x):=' '(diff(f(x),x,2)) ... 2. Ableitung
```

um mögliche Polstellen (Nullstellen des Nenners) zu überprüfen, versuchen wir eine „schönere“ Darstellung

```
factor(ratsimp(f1(x))) ... 1. Ableitung zusammengefasste Terme = „geschönt“
```

```
factor(ratsimp(f2(x))) ... 2. Ableitung zusammengefasst
```

```
solve(f1(x)=0,x) ... Extrema berechnen (bei x=0)
```

```
f(0) ... y-Wert des Extremums
```

```
f2(0) ... Überprüfung der Art des Extremums
```

```
solve(f2(x)=0,x) ... Wendepunkte berechnen (keine reellen WP)
```

```
wxplot2d(f(x),[x,-5,5],[y,-5,5]) ... 2D-Plot der Funktion
```

Integrieren

<p>Unbestimmtes Integral: <pre>integrate(x^2,x) integrate(1/x,x)</pre></p>	<p>Hinweis: Maxima gibt keine Integrationskonstante an!</p>
<p>Bestimmtes Integral:</p> $\int_0^{2\pi} x^3 \cdot \sin^2 x$ <pre>integrate(x^3*sin(x)^2,x,0,2*%pi) integrate(sin(x)/x,x,1,4) romberg(sin(x)/x,x,1,4)</pre>	<p>Was tut <i>MAXIMA</i> bei Funktionen, deren bestimmtes Integral nicht exakt berechenbar ist? - als Ergebnis der Vereinfachung wird der unveränderte Ausdruck angezeigt! Für eine Approximation müssen geeignete numerische Methoden aufgerufen werden.</p>