Algorithmische Geometrie mit *Derive*

Rüdeger Baumann

... halte ich die Differentialrechnung für methodisch sehr einfach, während die Geometrie schon deshalb schwieriger ist, weil ihre Begriffe nur ganz langsam und allmählich in das Denken unserer Schüler und Schülerinnen hineinzuwachsen vermögen.

Kuno Fladt

An Beispielen aus der Analytischen Geometrie bzw. Vektorgeometrie wird gezeigt, wie sich dieses Gebiet der Oberstufenmathematik mit Hilfe eines Computeralgebra-Systems (etwa Derive) zu einer *Algorithmischen Geometrie* weiterentwickeln lässt. Die Schüler erstellen Konstruktionen in Gestalt von Algorithmen (bzw. Derive-Programmen) und beweisen deren Korrektheit. Es ist zu diskutieren, ob das Computeralgebra-System – aufgrund seiner Rechenmacht – auch durchschnittlichen Schülern das selbständige Finden von Konstruktionen und Beweisen erleichtert oder allererst ermöglicht, wie diese sich von den herkömmlichen Beweisen und Konstruktionen unterscheiden und was vom „Geist der Geometrie“ dabei übrig bleibt.

Wenn wir in der Analytischen Geometrie ein Computeralgebra-System (wie z. B. Derive) einsetzen, dann erwarten wir davon eine Verbesserung des Unterrichts – und zwar vor allem aufgrund folgender Fähigkeiten des Computeralgebra-Systems: erstens seiner Rechenmacht (z. B. bei der Lösung linearer Gleichungssysteme) und zweitens seiner Möglichkeiten zur Veranschaulichung (etwa bei der grafischen Darstellung von Kurven oder Flächen).

Computeralgebra-Systeme ermöglichen (mehr) Selbständigkeit

Mit *Verbesserung des Unterrichts* ist gemeint, dass die Schüler – selbständiger als bisher – geometrische Konstruktionen durchführen und begründen sowie geometrische Sätze finden und beweisen können. Dies soll nicht nur für die guten, sondern vor allem auch für die durchschnittlichen Schüler und Schülerinnen gelten.

In Lehrbüchern zur Analytischen Geometrie findet sich häufig ein Kapitel „Beweis geometrischer Sätze mit Hilfe von Vektoren“, in dem vektorgeometrische Methoden auf Sätze (teils früher in der Mittelstufe behandelt, teils neu) angewendet werden. Die dort durchgeführten Beweise leben von der „Kunst geeigneter Vektorwahl“. Wer diese Kunst beherrscht, wird häufig mit einer überraschend mühelosen Rechnung belohnt; wer die passenden Vektoren jedoch nicht findet, ist aufgeschmissen. Solche Beweise sind daher i. d. Regel nur im Unterrichtsgespräch, wo der Lehrer auf die günstige Vektorwahl hinlenken kann, durchführbar.

Für einen Unterricht, der auf Selbständigkeit in dem Sinne setzt, dass die Schüler längere Zeit *ohne Lehrereingriff* tätig sind, sind durchschnittliche Schüler mit dem Führen eines solchen Beweises in der Regel überfordert. Nun besteht der große Vorzug von Computeralgebra-Systemen darin, dass *jeder* Schüler, d. h. nicht nur der leistungsfähige, bei geeigneter Anleitung zu einem Ergebnis gelangen kann. Bei den schwächeren Schülern dauert es eventuell länger, sie kommen erst durch vieles Probieren zum Ziel, aber zum Schluss ist stets ein vorzeigbares Resultat vorhanden, und sei es auch noch so bescheiden.

Es kommt also darauf an, die Aufgaben so mit geeigneten Hinweisen und Anleitungen zu versehen, dass die genannten Vorzüge des Computeralgebra-Systems wirksam werden können. Dabei ist ein optimaler Mittelweg zwischen Offenheit und Führung anzustreben.

„Für den schulischen Alltag sind Aufgaben wert- und reizvoller, deren Lösung einem zwar nicht sofort ins Auge springt, bei denen aber auch für zumindest durchschnittlich begabte Schüler, die i. a. keine zündenden und neuen Lösungsstrategien entwerfen können, eine Lösungschance besteht: durch Probieren, Vermuten, Ausdauer, Nachdenken, Betrachten von Spezialfällen usw. Die involvierte Mathematik darf dabei nicht zu komplex sein, die ganze Problemsituation muss überschaubar sein und darf nicht nur durch einen eleganten Trick gemeistert werden können“ (Humenberger 1998, S. 65).

Mathematischer Feinsinn oder brutale Rechenmacht?

Allerdings sind – wie das Wort schon sagt – Computeralgebra-Systeme algebraische, also *keine genuin geometrischen* Werkzeuge (wie etwa die sogenannte Dynamische Geometrie-Software). Es stellt sich somit die Frage: Wie kann bei der Arbeit mit einem algebraischen Werkzeug der „Geist der Geometrie“ bewahrt, d. h. geometrisches Denken und Tun gefördert werden? Etwas anders gefragt: Wie „geometrisch“ sollen – gegenläufig zum „Algebra-System“ – die von den Schülern erwarteten Konstruktionen und Beweise sein?

Ein weiteres Problem der Arbeit mit Computeralgebra-Systemen betrifft das Verhältnis zwischen Allgemeinem und Besonderem. Konstruktionen und Beweise sind allgemein, d. h. sie gelten für eine Vielzahl von Fällen. Das Finden des Beweises, das Veranschaulichen der Konstruktion jedoch geschieht anhand von Einzelfällen. Im herkömmlichen Geometrieunterricht wird die (individuelle) Zeichnung so angelegt, dass sie die allgemeine Situation erkennen lässt; der Beweis wird dann allgemein-symbolisch geführt.

Mittels Computeralgebra-System wird eine Grafik durch Vorgabe von Zahlenwerten angefertigt, d. h. die verwendeten Variablen (für Punkte, Strecken, Kreise usw.) sind mit speziellen Zahlenwerten belegt. Im Beweis dagegen dürfen die Variablen keine speziellen Werte haben. Wie sollen die Schüler dieses Verhältnis zwischen Besonderem und Allgemeinem handhaben? Gibt es eine Möglichkeit, (in der Phase des Experimentierens und Vermutens) zwischen der allgemeinen Situation und dem speziellen Fall rasch hin- und herzuwechseln?

Wie sollen nun – unter dem Postulat möglichst selbständiger Schülerarbeit (d. h. geringstmöglichen Lehrereingriffs) einerseits und unter dem der Förderung geometrischen Denkens – die Aufgaben gestellt, wie die Anleitungen gegeben werden? In welcher Form sollen die Schüler ihre Ergebnisse präsentieren?

Beispiel: Merkwürdige Punkte im Dreieck

Zum klassischen Bestand der Geometrie in der Schule gehören *Transversalen und merkwürdige Punkte im Dreieck:* die Sätze über Seitenhalbierende, Mittelsenkrechten, Höhen etc. mit ihren Schnittpunkten. Sie lassen sich mit unterschiedlichen Methoden beweisen: euklidisch oder abbildungsgeometrisch, durch Rechnen in der Bewegungsgruppe oder im Vektorkalkül, synthetisch oder analytisch (Schönbeck, 1982). Im folgenden sollen anhand dieses Teils der Dreiecksgeometrie (durch Vergleich der Beweismethoden ohne bzw. mit Computeralgebra-System) Antworten auf obige Fragen gesucht werden. Es werden Aufgaben gestellt und die zugehörigen Schülerlösungen diskutiert.

Aufgabe 1: Konstruieren Sie zum Dreieck ABC den Schwerpunkt S (= Schnittpunkt der Seitenhalbierenden), den Umkreismittelpunkt U (= Schnittpunkt der Mittelsenkrechten) sowie den Höhenschnittpunkt H und äußern Sie eine Vermutung hinsichtlich der Lagebeziehungen dieser drei Punkte. Bestätigen oder widerlegen Sie Ihre Vermutung an Beispielen, etwa A = (0, 0), B = (9, 0), C = (7, 12), und versuchen Sie, jene allgemein zu beweisen.

Lösung Stefanie Strudlhofer

Zunächst konstruiere ich den Schwerpunkt als Schnittpunkt zweier Seitenhalbierender; die Tatsache, dass alle drei sich in *einem* Punkt S schneiden, setze ich als (aus dem Unterricht) bekannt voraus. Die Seiten und Transversalen des Dreiecks schreibe ich als Geraden in Parameterdarstellung; die Gerade PQ hat die Darstellung

```
#1: Gerade(P, Q, t) := P + t·(P - Q)
```

Ein Dreieck fasse ich als Liste aus drei Punkten auf; die Ecken lassen sich einzeln herausgreifen: A ist D_1, B ist D_2 und C ist D_3. Für die drei Seitenhalbierenden ergibt sich dann

```
#2: SH1(D, t) := Gerade(D SUB 1, (D SUB 2 + D SUB 3)/2, t)
#3: SH2(D, t) := Gerade(D SUB 2, (D SUB 3 + D SUB 1)/2, t)
#4: SH3(D, t) := Gerade(D SUB 3, (D SUB 1 + D SUB 2)/2, t)
#5: Seitenhalbierende(D) := [SH1(D), SH2(D), SH3(D)]
```

Beim Schnitt von Geraden in Parameterdarstellung wird erst ein Parameterwert des Schnittpunkts ermittelt und dann in eine der Gleichungen eingesetzt:

```
#6: Schnitt(g, h) := SUBST(g, r, FIRST(FIRST(SOLUTIONS(g = h,
    [r, s]))))
#7: Schwerpunkt(D) := Schnitt(SH1(D, r), SH2(D, s))
```

Für die Grafik verwende ich das in der Aufgabenstellung vorgegebene Dreieck D1 (Zeile 10); es wird anstelle der Variablen D in die Funktionen eingesetzt:

```
#10: D1 := [0, 0; 9, 0; 7, 12; 0, 0]
#11: Bild1 := [D1, Seitenhalbierende(D1), Schwerpunkt(D1)]
```

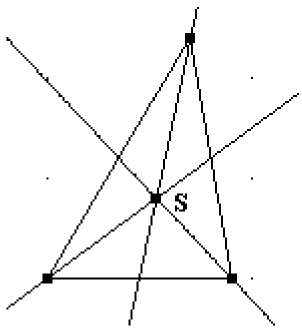

Bild 1

Nunmehr wird der Umkreismittelpunkt U als Schnitt zweier Mittelsenkrechten konstruiert; dass die dritte Mittelsenkrechte durch U geht, wird als bekannt vorausgesetzt.

```
#20: Lot(v) := [-v SUB 2, v SUB 1]
#21: MS(P, Q, t) := (P + Q)/2 + t·Lot(P - Q)
#22: MS1(D, t) := MS(D SUB 2, D SUB 3, t)
#23: MS2(D, t) := MS(D SUB 3, D SUB 1, t)
#24: MS3(D, t) := MS(D SUB 1, D SUB 2, t)
#25: Mittelsenkrechte(D) := [MS1(D), MS2(D), MS3(D)]
#26: Umkreismittelpunkt(D) := Schnitt(MS1(D, r), MS2(D, s))
```

In die Parameterdarstellung des Kreises setze ich die errechneten Größen ein:

```
#30: Kreis(M, r) := M + r·[COS(t), SIN(t)]
#31: Umkreis(D) :=
     Kreis(Umkreismittelpunkt(D), ABS(Umkreismittelpunkt(D)
     - D SUB 1))
#32: Bild2 :=
     [D1, Mittelsenkrechte(D1), Umkreismittelpunkt(D1), Umkreis(D1)]
```

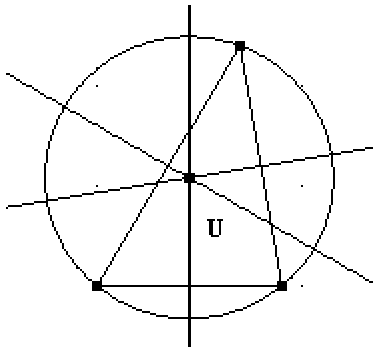

Bild 2

Schließlich lässt sich auf analoge Weise der Höhenschnittpunkt H gewinnen:

```
#33: Senkrechte(P, v, t) := P + t·Lot(v)
#34: Höhe1(D, t) := Senkrechte(D SUB 1, D SUB 2 – D SUB 3, t)
#35: Höhe2(D, t) := Senkrechte(D SUB 2, D SUB 3 – D SUB 1, t)
#36: Höhe3(D, t) := Senkrechte(D SUB 3, D SUB 1 – D SUB 2, t)
#37: Höhen(D) := [Höhe1(D), Höhe2(D), Höhe3(D)]
#38: Höhenschnittpunkt(D) := Schnitt(Höhe1(D, r), Höhe2(D, s))
#39: Bild3 := [D1, Höhen(D1), Höhenschnittpunkt(D1)]
```

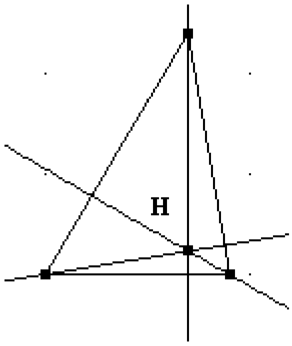

Bild 3

Die drei besonderen Punkte U, S und H im Zusammenhang betrachtet (Bild 4):

```
#50: U1 := Umkreismittelpunkt(D1)
#51: S1 := Schwerpunkt(D1)
#52: H1 := Höhenschnittpunkt(D1)
#53: Bild4 := [D1, U1, S1, H1, Gerade(S1, U1)]
```

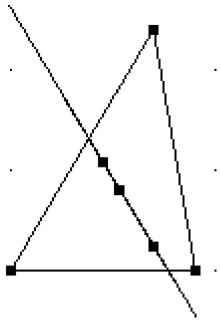

Bild 4

Es scheint, als ob U, S und H kollinear seien, d. h. auf einer Geraden liegen. In dem Buch *Euler – The Master of us all*, das mir meine Mathematiklehrerin, Akad. Rat Maria Morçeau zur Verfügung stellte, wird diese Vermutung bestätigt und die Gerade nach Euler benannt.

Die Kollinearität von U, S und H soll nun bewiesen werden (allerdings anders, als Euler dies getan hat). Dazu habe ich nur zu prüfen, ob H auf der Geraden durch U und S liegt:

```
#54: ABC := [a1, a2; b1, b2; c1, c2]
#55: U := Umkreismittelpunkt(ABC)
#56: S := Schwerpunkt(ABC)
#57: H := Höhenschnittpunkt(ABC)
#58: SOLVE(Gerade(S, U, t) = H, t) = [t = 2]
```

Dies bedeutet, dass S + 2(S – U) = H gilt. Damit ist allgemein (d. h. für alle Dreiecke ABC) bewiesen, dass Umkreismittelpunkt U, Schwerpunkt S, und Höhenschnittpunkt H (in dieser Reihenfolge) auf einer Geraden liegen, und dass H von S doppelt so weit entfernt ist wie U.

Soweit Stefanie. Wir versuchen nun, auf die oben gestellten Fragen Antworten zu finden.

• Was musste die Schülerin können, um die Konstruktionen zu bewerkstelligen und den Beweis zu führen? – Aus mathematischer Sicht im wesentlichen nur: (1) Parameterdarstellung von Geraden, (2) deren Schnitt und (3) die Prüfung auf Inzidenz von Punkt und Gerade. Das heißt: der Beweis zur Existenz der Eulergeraden kann – bei entsprechender Anleitung – mittels Derive von *jedem Schüler* erbracht werden.

• Wie ist Stefanie mit dem Verhältnis des Besonderen zum Allgemeinen umgegangen? – Sie hat stets zuerst die allgemeine Konstruktion durchgeführt und diese dann jeweils auf das Zahlenbeispiel angewendet. Die Variable D stand für beliebige Dreiecke, wobei sie Derive nicht mitzuteilen brauchte, dass für D ein Dreieck, d. h. eine Liste der Gestalt *[[a1, a2], [b1, b2], [c1, c3]]* eingesetzt würde. Offen bleibt: Wie lassen sich schnell andere Bilder erzeugen (was erforderlich wird, wenn die Vermutung der Kollinearität nicht so auf der Hand liegt)?

• Sind Konstruktion und Beweis im „Geist der Geometrie“ geführt? Offenbaren sie geometrische Einsicht – oder lediglich versiertes Hantieren mit dem Rechenwerkzeug?

• Ist die Darstellung nachvollziehbar, lässt sie geometrisches Verständnis erkennen?

Ein klassischer Beweis

Um einer Antwort auf die letzten beiden Fragen näher zu kommen, soll nun ein Beweis dargestellt werden, wie er im Vor-Derive-Zeitalter durch lenkende Fragen bzw. Aufforderungen von guten Schülern hätte gefunden werden können (siehe Dörrie 1940, S. 143):

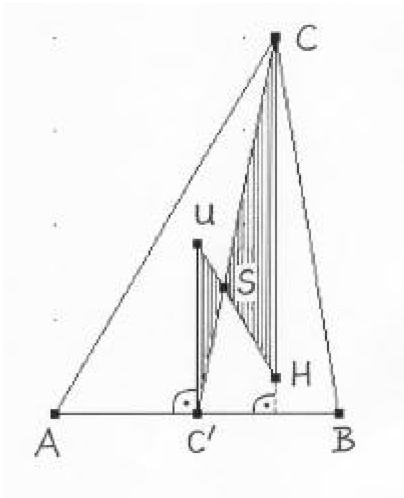

Bild 5

Im ÄABC sei C’ die Mitte der Seite AB, ferner S der Schwerpunkt und U der Umkreismittelpunkt. Verlängern Sie US über S hinaus bis H derart, dass SH = 2 · SU ist, verbinden Sie H mit C und zeigen Sie der Reihe nach:
a) ÄC’US ~ ÄCHS (ähnliche Dreiecke),
b) CH || C’U, also CH ⊥ AB, d. h. CH ist Höhe von ÄABC,
c) H liegt ebenfalls auf der Höhe durch A und auf der Höhe durch B,
d) H ist der Höhenschnittpunkt von ÄABC, q. e. d.

Von solchen geometrischen Überlegungen ist in Stefanies Ausarbeitung weit entfernt. Das Computeralgebra-System rechnet lediglich mit Brachialgewalt die eingegebenen Terme aus. Der Beweis gelingt dadurch zwar, und man stellt das Faktum der Kollinearität fest – aber ist die geometrische Einsicht dabei gewachsen?

Ein vektorieller Beweis

Im Lauf der Einführung der Vektoralgebra in die Analytische Geometrie wurden auch Beweise mittels Vektoralgebra für die Existenz der Euler-Geraden publiziert (vgl. Schönbeck 1982, S. 341). Ein solcher Beweis geht von der Geraden SH aus, definiert U als bestimmten Punkt dieser Geraden und weist nach, dass er Umkreismittelpunkt ist. In einzelnen Schritten bzw. Aufforderungen an die Schüler.

Es seien **a**, **b**, **c**, **h** die Ortsvektoren der Punkte A, B, C und H. Zeigen Sie der Reihe nach:
a) Die Gerade SH hat die Darstellung $\mathbf{x}(t) = t(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) / 3 + (1 - t)\mathbf{h}$.
b) Für $\mathbf{u} = \mathbf{x}(3/2)$ gilt $\mathbf{u} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) / 2 + (\mathbf{c} - \mathbf{h}) / 2$, d. h. **u** liegt auf der Mittelsenkrechten zur Seite AB.
c) **u** liegt auch auf der Mittelsenkrechten der Seite AB, ist somit der Umkreismittelpunkt.

Sowohl der klassische wie der vektorielle Beweis können nur unter massiver Hilfestellung durch die Lehrperson von den Schülern geführt bzw. verstanden werden. Woher kommt das? Man muss zunächst eine Vermutung hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Punkte U, S und H einbringen und dann geschickt ihre kennzeichnenden Eigenschaften verwenden, da keine (einfachen) Formeln (außer für S) zur Verfügung stehen. (Im Vektorbeweis etwa die Erkenntnis, dass der Richtungsvektor $\mathbf{c} - \mathbf{h}$ der Geraden durch U senkrecht zu AB steht.)

Der Beweis mittels Derive dagegen geht direkt auf sein Ziel los und beweist die Kollinearität einfach durch Einsetzen und Ausrechnen. Dass dies möglich ist, liegt daran, dass U und H einfach als Schnittpunkte gewisser Geraden definiert sind, wobei auf den Rechenaufwand nicht geachtet werden muss. (Er spielt allerdings in gewissen Fällen doch eine Rolle, etwa bei den Winkelhalbierenden: hier zeigt sich, dass man nicht einfach sorglos mit Schnittpunkten von Geraden, die in Parameterdarstellung gegeben sind, hantieren darf, da dies die Rechenfähigkeit von Derive überfordert – siehe Übungen.)

Das heißt: Konstruktion und Beweis mittels Derive kann von jedem Schüler, der überhaupt verstanden hat, was eine Gerade, eine Senkrechte und der Schnittpunkt zweier Geraden ist, durchgeführt werden. Tiefere geometrische Einsichten benötigt er nicht.

Wie lässt sich nun die – so gewonnene – Selbständigkeit durch Computeralgebra-System-Gebrauch mit dem Gewinn an geometrischer Einsicht verbinden?

Geometrische Einsicht durch Abbildungen

Eine Möglichkeit könnte darin bestehen, die im klassischen Beweis angestellten Ähnlichkeitsüberlegungen in die Sprache der Abbildungen (zentrische Streckungen) zu übersetzen und diese Abbildungen mittels Derive zu realisieren. Die entsprechende Aufgabe lautet:

Aufgabe 2: Konstruieren Sie zum Dreieck Ä = [A, B, C] dessen Mittendreieck Ä' und zeigen Sie, dass es den gleichen Schwerpunkt S wie Ä hat. Beweisen Sie allgemein und demonstrieren Sie am Beispiel A = (0, 0), B = (15, 0), C = (11, 19), dass die Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor k = –1/2 das Dreieck Ä auf Ä' abbildet. Bestimmen Sie das Bild von Umkreismittelpunkt U, Schwerpunkt S, Höhenschnittpunkt H und weisen Sie damit deren Kollinearität nach.

Lösung Bernadette Butzler

Zunächst definiere ich Mittendreieck und Schwerpunkt eines beliebigen Dreiecks D:

```
#1: Mittendreieck(D) := [(D SUB 1 + D SUB 2)/2,
              (D SUB 2 + D SUB 3)/2, (D SUB 3 + D SUB 1)/2]
#2: Schwerpunkt(D) := (D SUB 1 + D SUB 2 + D SUB 3)/3
#3: ABC := [a1, a2; b1, b2; c1, c2]
#4: S := Schwerpunkt(ABC)
#5: S = [(a1 + b1 + c1)/3, (a2 + b2 + c2)/3]
#6: Schwerpunkt(Mittendreieck(ABC)) = [(a1 + b1 + c1)/3,
              (a2 + b2 + c2)/3]
```

Damit ist allgemein, d. h. für jedes ebene Dreieck ABC, die Übereinstimmung der Schwerpunkte von Dreieck und Mittendreieck gezeigt. Die Streckung ó(Z, k) mit Zentrum Z und Streckfaktor k wird wie folgt definiert:

```
#10: sigma(Z, k, X) := Z + k·(X - Z)
#11: SigmaBild(Z, k, Menge) := VECTOR(sigma(Z, k, X), X, Menge)
#12: D1 := [0, 0; 15, 0; 11, 19; 0, 0]
#13: S1 := Schwerpunkt(D1)
#14: Bild6 := [D1, S1, SigmaBild(S1, -1/2, D1)]
```

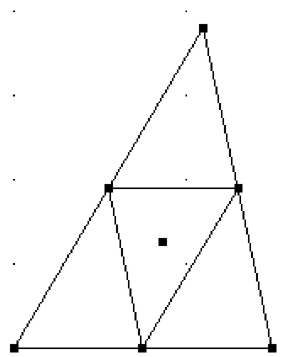

Bild 6

Der Vergleich zwischen Mittendreieck und Bild des Dreiecks ABC unter der zentrischen Streckung ó(S, –1/2) liefert folgendes:

```
#15: Mittendreieck(ABC) = [(a1 + b1)/2, (a2 + b2)/2;
                           (b1 + c1)/2, (b2 + c2)/2;
                           (a1 + c1)/2, (a2 + c2)/2]
#16: SigmaBild(S, -1/2, ABC) = [(b1 + c1)/2, (b2 + c2)/2;
                                (a1 + c1)/2, (a2 + c2)/2;
                                (a1 + b1)/2, (a2 + b2)/2]
```

Das heißt: als Listen sind die Dreiecke ungleich, als Mengen sind sie gleich. Man könnte die Dreiecke in Mengen, bei denen es nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommt, umwandeln:

```
#17: VergleichL(Dr1, Dr2) :=
       IF({Dr1 SUB 1, Dr1 SUB 2, Dr1 SUB 3} =
          {Dr2 SUB 1, Dr2 SUB 2, Dr2 SUB 3}, "gleich", "ungleich")
#18: VergleichL(Mittendreieck(ABC), SigmaBild(S, -1/2, ABC)) =
     gleich
```

Damit ist gezeigt, dass die zentrische Streckung ó(S, –1/2) jedes Dreieck ABC auf sein Mittendreieck abbildet. Zwecks Gewinnung von Umkreismittelpunkt, Schwerpunkt und Höhenschnittpunkt verwende ich folgende (im Unterricht erarbeitete) Funktion:

```
#20:  Euler(D) :=
       PROG (
         A := D SUB 1, B := D SUB 2, C := D SUB 3,
         a := ABS(B - C), b := ABS(C - A), c := ABS(A - B),
         u := b^2 + c^2 - a^2,
         v := a^2 + c^2 - b^2,
         w := a^2 + b^2 - c^2,
         s := u·v + v·w + w·u,
         S_ := (A + B + C)/3,
         U_ := ((s - v·w)·A + (s - w·u)·B + (s - u·v)·C)/(2·s),
         H_ := (v·w·A + w·u·B + u·v·C)/s,
         g := CROSS([x, y] – S_, U_ - S_) = 0,
         [U_, S_, H_, g, D])
#21: Indexmenge := [[1, 2; 2, 3; 3, 1], [1, 2; 2, 3; 3, 1; 1, 2]]
#22: Mittendreieck(D) :=
       VECTOR((D↓(i↓1) + D↓(i↓2))/2, i, Indexmenge↓(DIM(D)-2))
#23: Bild7 := [Euler(D1), Mittendreieck(D1)]
```

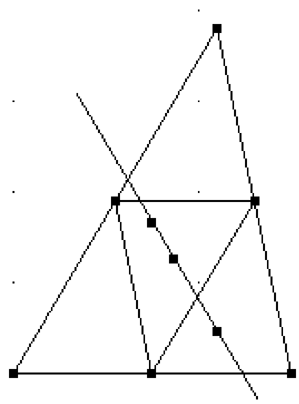

Bild 7

Nun soll das Bild von U, S und H unter der zentrischen Streckung ó(S, –1/2) untersucht werden. Der Schwerpunkt S ist – als Streckzentrum – Fixpunkt der Abbildung. Aus Ähnlichkeitsgründen ist das Bild H’ von H wieder Höhenschnittpunkt im Mittendreieck Ä’. Bestätigung:

```
#25: Umkreismittelpunkt(D) := Euler(D) SUB 1
#26: Höhenschnittpunkt(D) := Euler(D) SUB 3
#27: [U := Umkreismittelpunkt(ABC), H := Höhenschnittpunkt(ABC)]
#28: HStrich1 := sigma(S, -1/2, H)
#29: HStrich2 := Höhenschnittpunkt(Mittendreieck(ABC))
#30: Vergleich(Obj1, Obj2) := IF(Obj1 = Obj2, "gleich", "ungleich")
#31: Vergleich(HStrich1, HStrich2) = gleich
```

Andererseits ist der Höhenschnittpunkt des Mittendreiecks der Umkreismittelpunkt des ursprünglichen Dreiecks, da jede Höhe von Ä’ eine Mittelsenkrechte in Ä ist. Bestätigung:

```
#32: Vergleich(HStrich2, U) = gleich
```

Daraus folgt ó(S, –1/2, H) = U. Ferner wird die Gerade HS auf die Gerade US abgebildet, sie ist Fixgerade der Abbildung. Damit ist die Kollinearität von U, S und H für alle Dreiecke ABC bewiesen. –

Ob mit der Verwendung von Abbildungen geometrische Einsicht und Problemlösefähigkeit gefördert wird, könnte an weiterführenden Aufgaben geprüft werden.

Aufgabe 3: Sei H der Höhenschnittpunkt von ÄABC. (a) Was lässt sich über die Eulergeraden der Dreiecke D1 = ÄHAB, D2 = ÄHBC, D3 = ÄHCA aussagen? (b) Was ergibt sich, wenn statt H der Umkreismittelpunkt U oder der Schwerpunkt S genommen wird?

Aufgabe 4: In jedem Dreieck liegen die Seitenmitten, die Höhenfußpunkte und die Mittelpunkte der eckwärts gelegenen Höhenabschnitte auf einem Kreis, dem *Feuerbachkreis*. Sein Mittelpunkt halbiert die Verbindungsstrecke von Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt, sein Radius ist halb so groß wie der Umkreisradius. Illustrieren Sie den Satz an einem Beispiel und versuchen Sie den Beweis. (Anleitung: Konstruieren Sie den Feuerbachkreis als Umkreis des Mittendreiecks A'B'C' mit Mittelpunkt F).

Im einzelnen: Gegeben sei ein Dreieck ABC samt Umkreismittelpunkt U, Schwerpunkt S und Höhenschnittpunkt H sowie F = Mittelpunkt der Strecke UH. Wenden Sie die Punktspiegelung mit Zentrum F auf die Seitenmitten A', B', C' an. Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung der Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor –1/2 und der Punktspiegelung an F eine Streckung mit Zentrum H und Streckfaktor 1/2 ist und beschreiben Sie das Bild des Umkreises von ABC.

Abschließende Bemerkungen

An einem Beispiel aus der Dreiecksgeometrie (eulersche Gerade) wurden verschiedene Möglichkeiten diskutiert, wie Schüler mit einem Computeralgebra-System (Derive) arbeiten können. Aufgrund der Rechenfähigkeiten von Derive lassen sich Konstruktionen und Beweise „im direkten Zugriff" und „durch stures Ausrechnen" durchführen und sind, weil sie keine feinsinnigen geometrischen Überlegungen erfordern, auch von durchschnittlichen Schülern (ohne Lehrereingriff) zu bewältigen.

Die Schüler erstellen Ausarbeitungen in Gestalt von Derive-Protokollen, die durch verbale Erläuterungen und Grafiken ergänzt werden. Durch geeignete Anleitung (etwa im Aufgabentext) kann darauf hingewirkt werden, dass in den Ausarbeitungen nicht nur die Rechenmacht des Computeralgebra-Systems, sondern auch etwas vom „Geist der Geometrie" bzw. von „mathematischer Kultur" (Dörrie) zum Ausdruck kommt.

Eine bedeutende Schwierigkeit erwächst den Schülern allerdings dadurch, dass sie nicht nur die mathematische Schreibweise, sondern auch die – von jener (zum Teil erheblich) abweichende – Syntax des Computeralgebra-Systems beherrschen müssen. Ferner genügt es nicht immer, einen logisch bzw. mathematisch korrekten Lösungsweg zu finden: er sollte vom Computeralgebra-System auch rechnerisch zu bewältigen sein (vgl. Engel, 1995). Daher müssen die Schüler sich auch bezüglich der Effizienz ihrer Funktionen bzw. Prozeduren Gedanken machen. Diese Probleme sind von der Didaktik bisher kaum wahrgenommen, geschweige denn gelöst worden.

Literatur

Coxeter, H. S. M.: Unvergängliche Geometrie. Basel: Birkhäuser, 1963

Dörrie, H.: Triumph der Mathematik. Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur. Breslau: Hirt, 2. Aufl. 1940

Engel, A.: Kann man mit Derive geometrische Sätze beweisen?
In: MU 41 (1995), H. 4, S. 38–47

Henn, H.-W.: Computergestütztes Problemlösen in der Geometrie.
In: MU 40 (1994), H. 1, S. 25–38

Humenberger, H.: Der Satz des Thales als Spezialisierungshilfe bei einem elementargeometrischen Problem. In: MU 44 (1998), H. 3, S. 65–70

Jeger, M.: Konstruktive Abbildungsgeometrie. Luzern: Räber, 1968

Schönbeck, J.: Vektorielle Geometrie in den Sekundarstufen I und II.
In: MNU 35 (1982), H. 6, S. 338–343

R. Baumann
Italienischer Garten 15
D-29221 Celle

baumann-celle@t-online.de