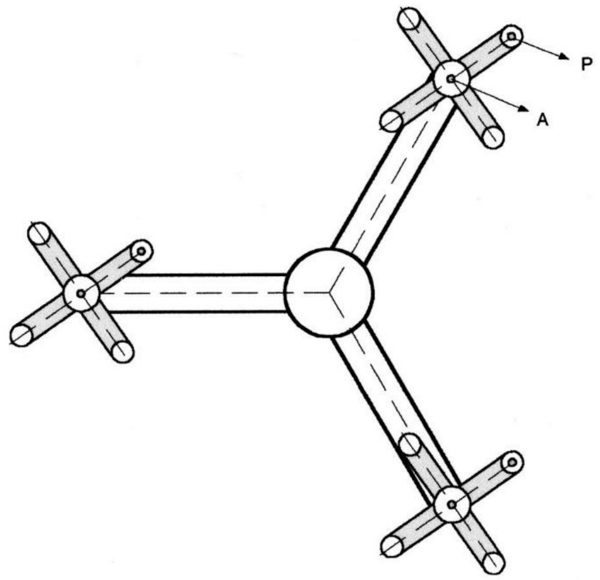
Taumeltour im Vergnügungspark

Auf Jahrmärkten gehört die Fahrt auf einem Karussell zu den beliebten Vergnügungen.

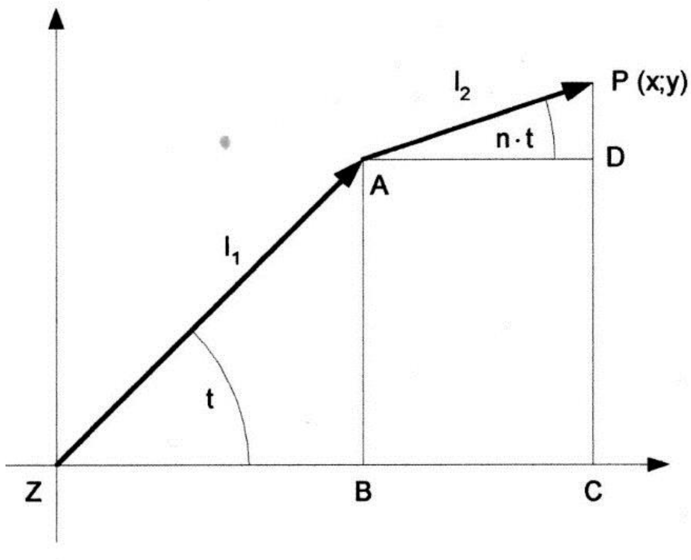
Die nebenstehende Skizze zeigt das Prinzip des BREAK DANCER, wobei dieser vier Arme hat und die Bewegung auf einer schrägen Scheibe geschieht. Diese Bewegung soll im Folgenden beschrieben werden.

- Zur Vereinfachung wird das Problem auf die x-y-Ebene beschränkt.
- Dazu genügt es, einen Arm des Fahrgeschäfts – den Punkt P – zu betrachten.
- Die Begriffe Bahngeschwindigkeit v und Winkelgeschwindigkeit ω werden zunächst ausgespart.



Mit Hilfe der folgenden Grafik soll die Bahn des Punktes P für einige Fälle beschrieben werden:

1) Gleichförmige Bewegung von A und P
   a) Gleichläufige Drehungen
   b) Gegenläufige Drehungen
2) Gleichläufige Bewegung von A und ungleichförmige Bewegung von P
3) Einige Betrachtungen zu Bahn- und Winkelgeschwindigkeit.



Bezeichnungen:

Z: Position der zentralen vertikalen Achse (Nabe)

A: Position der vertikalen Achse für das Drehkreuz

P: Position der mitfahrenden Person

t: Drehwinkel

n: Lässt sich deuten als Verhältnis der Drehgeschwindigkeiten

Beschreibung des Punktes P

Es gelten folgende Beziehungen, aus denen sich die Position einer mitfahrenden Person darstellen lässt:

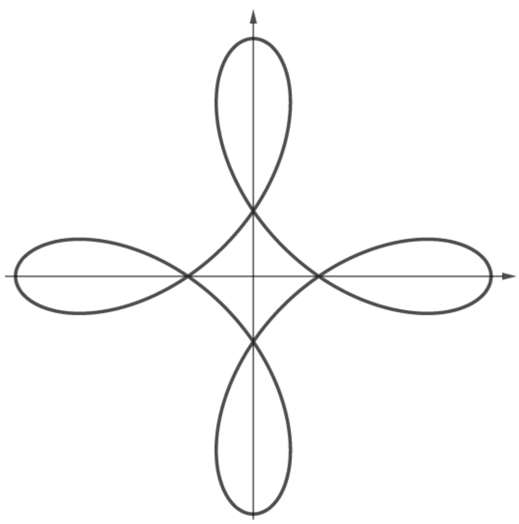
$$\left.\begin{array}{l}\overline{ZA}=\overline{ZB}+\overline{BA}=l_1\cdot\cos(t)+l_1\cdot\sin(t)\\ \overline{AP}=\overline{AD}+\overline{DP}=l_2\cdot\cos(n\cdot t)+l_2\cdot\sin(n\cdot t)\end{array}\right\}\rightarrow \qquad \begin{array}{l}x(t)=l_1\cdot\cos(t)+l_2\cdot\cos(n\cdot t)\\ y(t)=l_1\cdot\sin(t)+l_2\cdot\sin(n\cdot t)\end{array}$$

Die Bewegung des Punktes P lässt sich also als Kurve in Parameterdarstellung beschreiben.

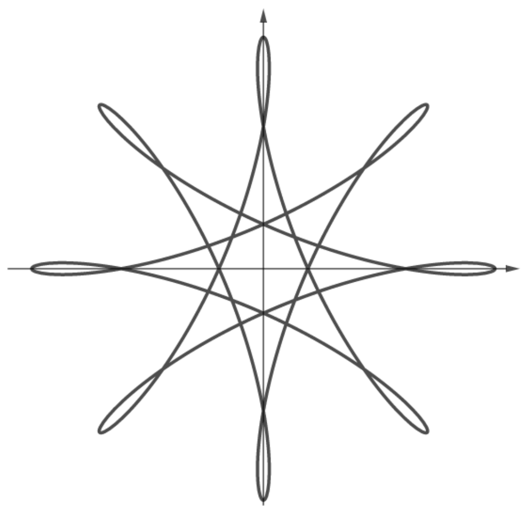
$$\boxed{P(t)=\begin{cases}l_1\cdot\cos(t)+l_2\cdot\cos(n\cdot t)\\ l_1\cdot\sin(t)+l_2\cdot\sin(n\cdot t)\end{cases}\quad t=m\cdot\pi}$$

Für die folgenden Grafiken gilt:

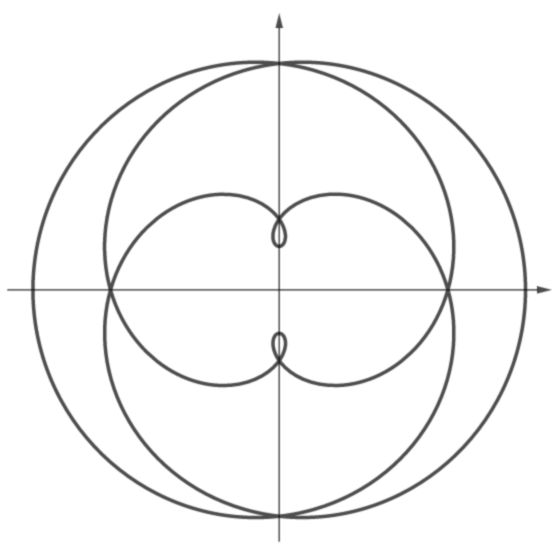
$l_1 = 5$ $\qquad$ $l_2 = 3.5$ $\qquad$ $n = \{-3, -5/3, 5/3, 4\}$



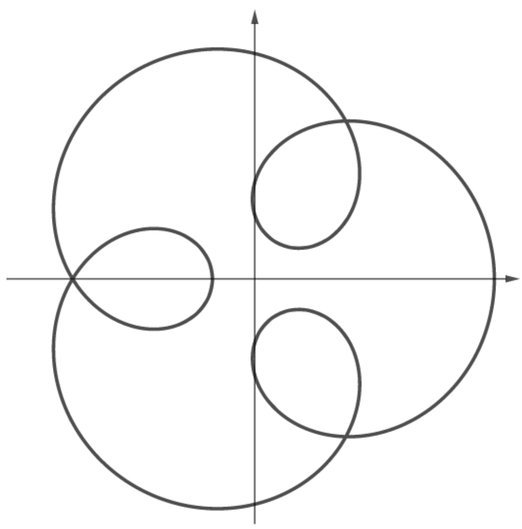
n = -3



n = -5/3



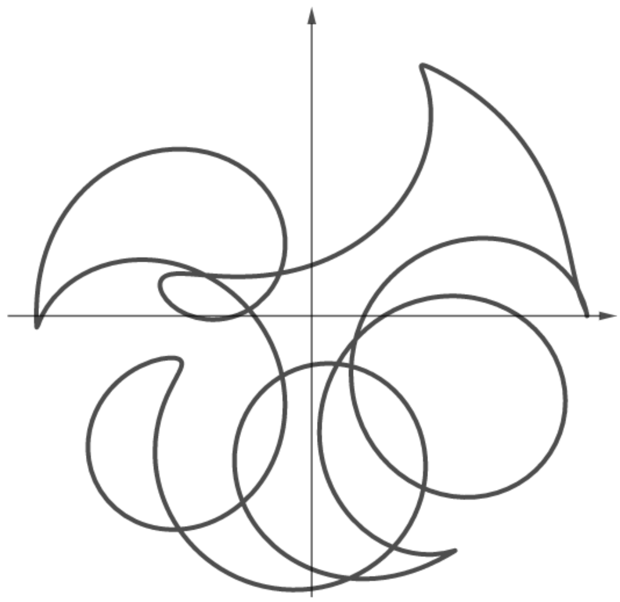
n = 5/3



n = 4

Ungleichförmige Bewegungen entstehen, wenn man für n eine Funktion n(t) einsetzt. Als Beispiel wird dafür n(t) = -cos(3t) definiert.

$$P(t) = \begin{cases} l_1 \cdot \cos(t) + l_2 \cdot \cos(-\cos(3t) \cdot t) \\ l_1 \cdot \sin(t) + l_2 \cdot \sin(-\cos(3t) \cdot t) \end{cases} \quad t = m \cdot \pi \qquad \text{hier } m = 2$$



Da kann einem schon schlecht werden!

Zahlenrechnungen für gleichförmige Bewegungen

Realistische Drehzahlen (etwas angepasst).

$$n_{Nabe} = 12 \frac{1}{\min} = \frac{1}{5} \frac{1}{s} \qquad n_{Kreuz} = 30 \frac{1}{\min} = \frac{1}{2} \frac{1}{s}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω gibt an, wie schnell sich der Drehwinkel t bei einem starren Körper ändert. Bei gleichförmigen Bewegungen ergibt sich:

$$\omega_n = 2 \cdot \pi \cdot n_{nabe} \approx 75.4 \frac{1}{\min} \approx 1.25 \frac{1}{s}$$ Das entspricht etwa 72°

$$\omega_k = 2 \cdot \pi \cdot n_{Kreuz} \approx 188.5 \frac{1}{\min} \approx 3.14159 \frac{1}{s}$$ Das sind 180°

Daraus ergeben sich die Bahngeschwindigkeiten:

$$v_A = \omega_n \cdot l_1 = 6.25 \frac{m}{s} = 22.5 \frac{km}{h}$$

Bezogen auf einen starren Punkt A ergäbe sich für P

$$v_P = \omega_{Kreuz} \cdot l_2 \approx 11.7 \frac{m}{s} \approx 39.6 \frac{km}{h}$$

Diese Geschwindigkeiten überlagern sich aber noch, so wie die Bahn der Erde um die Sonne mit $v_E \approx 30 \,{}^{km}\!/_{s}$ bei gleichzeitiger Rotation der Erde mit $v_R \approx 0.464 \,{}^{km}\!/_{s}$ um ihre Achse. Nur davon merken wir nichts!