Zusammenfassung 1 – Teil 2

Michel Beaudin

1.8 Beispiel einer „symbolischen" Antwort Bei der Betrachtung einer Polynomgleichung vom Grad 5 oder höher können immer alle Lösungen in Fließkommaarithmetik gefunden werden. Nehmen wir etwa $x^5 + x + 3 = 0$. *Derive* gibt die Gleichung zurück, außer man approximiert. Da die Funktion „`SOLUTIONS`" eine Matrix ausgibt, kann die Antwort auch eine leere Matrix sein!

```
        5
SOLVE(x  + x + 3 = 0, x)

 5
x  + x = -3

x = -0.4753807566 - 1.129701725·i ∨ x = -0.4753807566 + 1.129701725·i ∨ x = 1.041879539 - 0.8228703381·i ∨
  x = 1.041879539 + 0.8228703381·i ∨ x = -1.132997565
```

Abbildung 1.12

Maple: das Konstrukt „ *RootOf* " erlaubt es, die einzelnen Wurzeln anzusprechen.

> $solve(x^5 + x + 3 = 0, x);$

$$RootOf(\_Z^5 + \_Z + 3, index = 1), RootOf(\_Z^5 + \_Z + 3, index = 2), RootOf(\_Z^5 + \_Z + 3, index = 3), RootOf(\_Z^5 + \_Z + 3, index = 4), RootOf(\_Z^5 + \_Z + 3, index = 5)$$

Abbildung 1.13

1.9 Ein Beispiel und gesunder Menschenverstand Wenn man eine nicht-polynomiale Gleichung betrachtet, dann sind symbolische Systeme kein Ersatz für die Analyse durch den Benutzer, und Vorstellungskraft und gesunder Menschenverstand sind immer noch erforderlich**.** So gibt es keine Formel zur Lösugn der Gleichung $\sin x = 1 - \frac{x}{6}$. Der TI-Rechner „warnt" den Benutzer, dass einige Lösungen vergessen werden könnten.

⚠ $\text{solve}\left(\sin(x)=1-\frac{x}{6},x\right)$	$x=0.988567$ or $x=2.5236$ or $x=6.24272$ or $x=10.2002$ or $x=11.4336$
$\text{exact}\left(\text{solve}\left(\sin(x)=1-\frac{x}{6},x\right)\right)$	$6\cdot\sin(x)+x=6$
$\text{nSolve}\left(\sin(x)=1-\frac{x}{6},x\right)$	0.988567
$\text{nSolve}\left(\sin(x)=1-\frac{x}{6},x=2\right)$	2.5236
$\text{nSolve}\left(\sin(x)=1-\frac{x}{6},x\right)\vert 3<x<7$	6.24272
$\text{nSolve}\left(\sin(x)=1-\frac{x}{6},x,9,11\right)$	10.2002
$\text{nSolve}\left(\sin(x)=1-\frac{x}{6},x,11,\infty\right)$	11.4336

Figure 1.14

Ein Graph für jede Seite der Gleichung zeigt, dass es insgesamt fünf Lösungen gibt. Aus Abbildung 1.14 geht also hervor, dass Nspire CX CAS tatsächlich (in diesem Fall) diese 5 Lösungen gefunden hat, wenn das System in den Näherungsmodus wechselt. Im exakten Modus wird die Gleichung nur in äquivalenter Form zurückgegeben. Und die Anleitung der Anweisung „nsolve“ kann nützlich sein.

Sehen wir uns die Antworten von *Maple* und WolframAlpha in Abbildung 1.15 an.

> $solve\left(\sin(x) = 1 - \frac{x}{6}, x\right);$

$$RootOf(6\sin(\_Z) - 6 + \_Z)$$

> $fsolve\left(\sin(x) = 1 - \frac{x}{6}, x\right);$

$$0.9885669797$$

> $fsolve\left(\sin(x) = 1 - \frac{x}{6}, x = 2\right);$

$$2.523600393$$

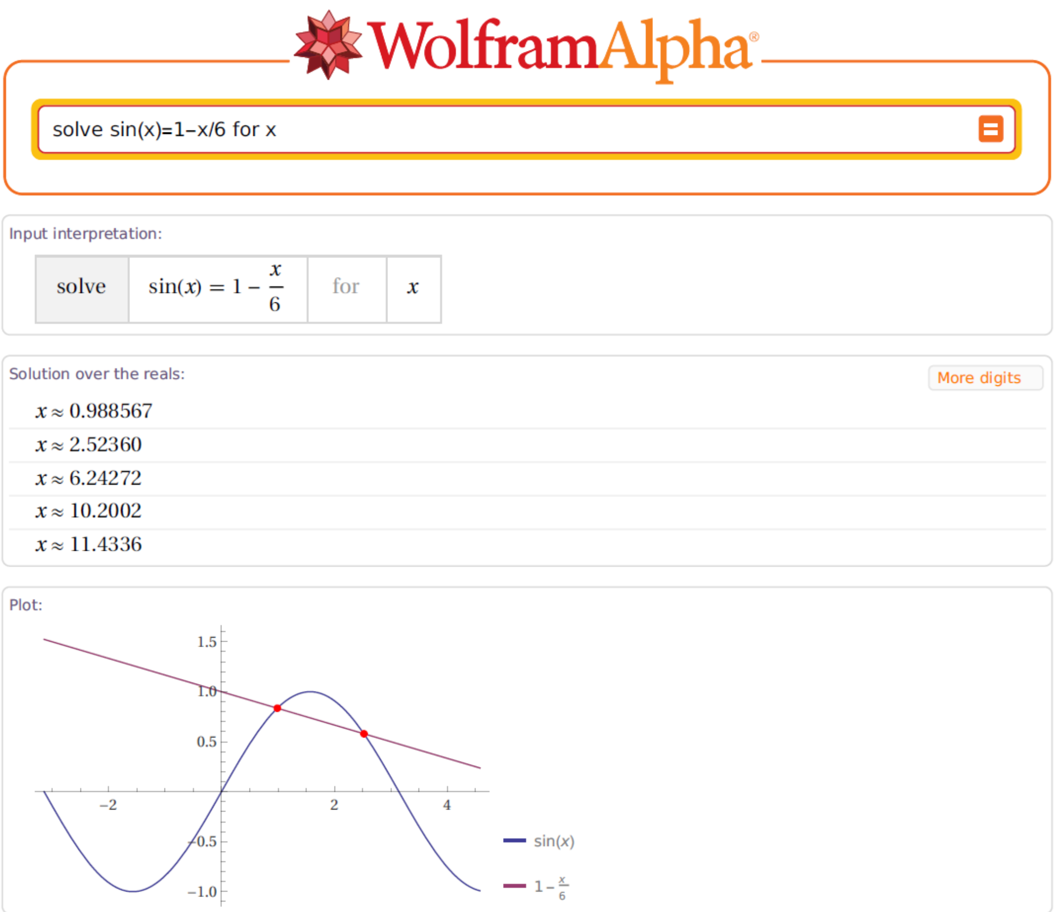

Abbildung 1.15

Wie reagiert *Derive*? Zunächst werden in einem Fenster, das die Graphen jeder Gleichungsseite enthält, wie bereits erwähnt, insgesamt fünf Schnittpunkte angezeigt:

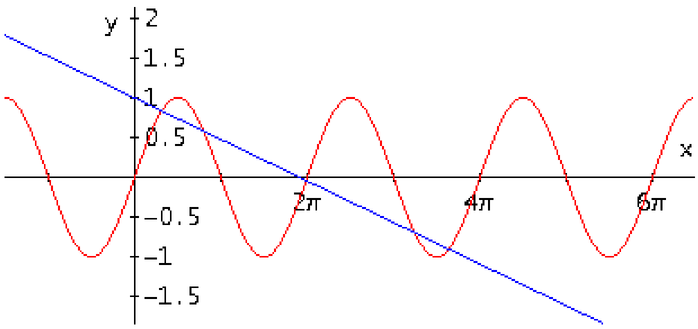

Abbildung 1.16

In *Derive* gibt es keine Kontruktion wie „*RootOf*“:

#23: $\mathrm{SOLVE}\left(\mathrm{SIN}(x) = 1 - \frac{x}{6},\ x\right)$

#24: $\mathrm{SIN}(x) + \frac{x}{6} = 1$

#25: $\mathrm{NSOLVE}\left(\mathrm{SIN}(x) = 1 - \frac{x}{6},\ x\right)$

#26: $x = 6.242720798$

#27: $\mathrm{NSOLVE}\left(\mathrm{SIN}(x) = 1 - \frac{x}{6},\ x,\ 0,\ 3\right)$

#28: $x = 0.9885669796$

#29: $\mathrm{NSOLVE}\left(\mathrm{SIN}(x) = 1 - \frac{x}{6},\ x,\ 1,\ 3\right)$

#30: $x = 2.523600393$

Abbildung 1.17

1.10 Système von Polynomen Solche Systeme sind mit einem Algorithmus (Gröbner-Basis) lösbar, der glücklicherweise in symbolischen Systemen implementiert ist.

1.11 Die Funktion LambertW Dies ist wahrscheinlich eine der besten neueren Implementierungen einer mathematischen Funktion (zwei der Autoren waren auf dem TIME-2004-Symposium, das im Juli 2004 an der ÉTS stattfand. Viele andere Entwickler kamen auch zur ACA 2009 Konferenz, die im Juni 2009 ebenfalls an der ÉTS stattfand, sowie zur ACA 2019 im Juli 2019.) Beginnen wir mit dem folgenden Beispiel, das uns auf geradem Weg zu dieser Besonderheit führt!

1.11.1 Beispiel Gesucht werden alle reellen und komplexen Lösungen der Gleichung

$$2^x = x^6$$

Ein GRaph zeigt zwei Schnittpunkte auf beiden Seiten des Ursprungs, aber eine dritte reale (und positive) Lösung existiert notwendigerweise, da die Exponentialfunktion schließlich die Potenzfunktion x^6 dominiert. Da diese Lösung positiv ist, können wir die ursprüngliche Gleichung umformen in

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{6}$$

Und weil die Funktion

$$\frac{\ln x}{x}$$

für x gegen ∞ gegen 0 strebt, existiert noch eine dritte Lösung. Diese kann leicht gefunden werden, indem man zum Beispiel eine Wertetabelle erstellt. Wir würden dies finden:

#34: $\mathrm{NSOLVE}(2^x = x^6,\ x)$

#35: $x = -0.9011325528$

#36: $\mathrm{NSOLVE}(2^x = x^6,\ x,\ 0,\ 2)$

#37: $x = 1.140879647$

#38: $\mathrm{NSOLVE}(2^x = x^6,\ x,\ 2,\ \infty)$

#39: $x = 29.21048705$

Abbildung 1.18

Für die Visualisierung der komplexen Lösungen wenden wir wieder die in 1.4.2 vorgestellte Methode an.

Dies zeigt Abbildung 1.19. Wir haben den Realteil und den Imaginärteil genommen. Die Graphen der beiden impliziten Kurven wurden dann im selben Fenster gezeichnet. In der Nähe des Ursprungs sind neben den beiden reellen Lösungen auch vier komplexe Lösungen zu erkennen. Diese Lösungen können auch über den Rechner gefunden werden.

#40: $\mathrm{RE}(2^{x + i\cdot y} = (x + i\cdot y)^6)$

#41: $2^x\cdot \mathrm{COS}(y\cdot \mathrm{LN}(2)) = (x^2 - y^2)\cdot(x^4 - 14\cdot x^2\cdot y^2 + y^4)$

#42: $\mathrm{IM}(2^{x + i\cdot y} = (x + i\cdot y)^6)$

#43: $2^x\cdot \mathrm{SIN}(y\cdot \mathrm{LN}(2)) = 2\cdot x\cdot y\cdot(3\cdot x^4 - 10\cdot x^2\cdot y^2 + 3\cdot y^4)$

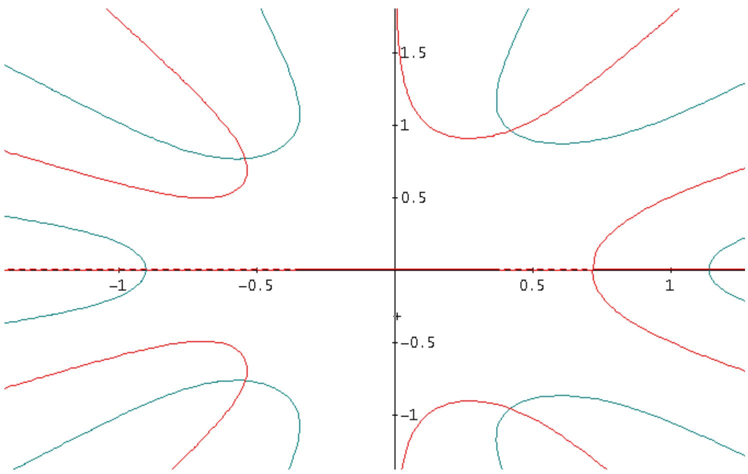

Abbildung 1.19

Wie kann man erklären, wie *Maple* mit derselben Gleichung verfährt? Der Solver dieses Programms verwendet eine berühmte Funktion, die anscheinend erfunden wurde, um Gleichungen vom Typ $z\,e^{z}=w$ lösen. Um zu verstehen, was hier vor sich geht, nehmen wir an, dass mit α eine der 6 sechsten Wurzeln von 1 gemeint ist, so dass wir die Gleichung $\alpha\,2^{x/6}=x$ lösen müssen, die folgendem entspricht:

$$\alpha e^{\frac{x\ln 2}{6}}=x \Leftrightarrow xe^{\frac{-x\ln 2}{6}}=\alpha \Leftrightarrow -\frac{x\ln 2}{6}e^{\frac{-x\ln 2}{6}}=-\alpha\frac{\ln 2}{6}.$$

Wir müssen also eine Gleichung vom Typ $X\,e^{X}=Y$ lösen: In unserem Beispiel ist das $X\,e^{X}=-\frac{x\ln 2}{6}$ und $Y=-\frac{\alpha\ln 2}{6}$ mit $\alpha\in\left\{\pm 1,\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Man beachte, dass die Funktion nicht bijektiv ist, aber sie wird dies, wenn man die beiden Teile auf beiden Seiten ihres absoluten Minimums betrachtet: durch Umkehrung erhalten wir zwei Zweige, die mit $W_0(x)$ ("Hauptzweig") und $W_{-1}(x)$ bezeichnet werden. Das ist in Abbildung 1.20 dargestellt. Nur diese beiden Zweige liefern reelle Werte (obwohl sie auch komplexe Werte liefern, wenn x $<-e^{-1}$). Die anderen Zweige W_k liefern für ganzzahlige k nur komplexe Werte.

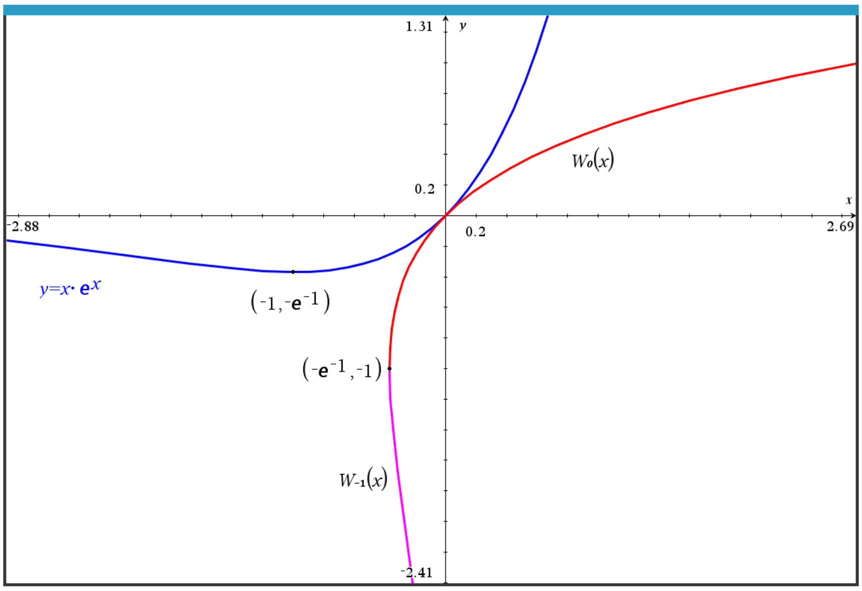

Abbildung 1.20

Die verschiedenen Äste der LambertW-Funktion sind wie folgt unterteilt. Die Kurve (hier in parametrischer Form angegeben)

$$\begin{cases} x=-t\cot t \\ y=t \end{cases},\quad -\pi<t<\pi,$$

Der wir den Punkt (–1, 0) hinzufügen, trennt den Hauptzweig $W_0(x)$ von den beiden Zweigen $W_1(x)$ und $W_{-1}(x)$. Das Intervall $]-\infty,-1]$ trennt die Zweige $W_1(x)$ und $W_{-1}(x)$. Schließlich sind die anderen Zweige getrennt durch die Kurven

$$\begin{cases} x=-t\cot t \\ y=t \end{cases},\quad 2k\pi<\pm t<(2k+1)\,\pi,\quad k=1,2,3,\cdots$$

Die LambertW-Funktion ist also "vielgestaltig" und daher die Kehrwertfunktion von $y=x\,e^{x}$. Wir können nun unser Beispiel fortsetzen.

.

Daher sind die Lösungen der Gleichung $2^x = x^6$: $x = -\frac{6}{\ln 2}\mathrm{LambertW}\left(k, -\frac{\alpha \ln 2}{6}\right)$. *Maple* gibt aus:

$$> solve\left(2^x = x^6, x\right);$$

$$-\frac{6\,\mathrm{LambertW}\left(\frac{1}{6}\ln(2)\right)}{\ln(2)},\ -\frac{6\,\mathrm{LambertW}\left(-\frac{1}{6}\ln(2)\right)}{\ln(2)},$$
$$-\frac{6\,\mathrm{LambertW}\left(-1, -\frac{1}{6}\ln(2)\right)}{\ln(2)},$$
$$-\frac{6\,\mathrm{LambertW}\left(-\frac{1}{6}\ln(2)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{3}\right)\right)}{\ln(2)},$$
$$-\frac{6\,\mathrm{LambertW}\left(-\frac{1}{6}\ln(2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{3}\right)\right)}{\ln(2)},$$
$$-\frac{6\,\mathrm{LambertW}\left(-\frac{1}{6}\ln(2)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{3}\right)\right)}{\ln(2)},$$
$$-\frac{6\,\mathrm{LambertW}\left(-\frac{1}{6}\ln(2)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{3}\right)\right)}{\ln(2)}$$

$$W(z)e^{W(z)} = z \qquad y e^y = z \Leftrightarrow y = W_k(z)$$

http://www.orcca.on.ca/LambertW/

Abbildung 1.21

Wenn wir diese Funktion mit ihren verschiedenen Zweigen programmieren, können wir sie anschließend auswerten: Wir haben dies in der kit_ets_mb-Bibliothek getan. Wie bei *Maple* oder Mathematica finden wir die Funktion „ProductLog“:

$$\mathbf{ra\_0}(\alpha) := \frac{-6}{\ln(2)} \cdot \mathbf{kit\_ets\_mb\backslash lambertw}\left(0, \frac{-\alpha \cdot \ln(2)}{6}\right) \ \blacktriangleright\ \text{Terminé}$$

$$\left\{\mathbf{ra\_0}(1), \mathbf{ra\_0}(-1), \mathbf{ra\_0}\left(\frac{1}{2}+\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right), \mathbf{ra\_0}\left(\frac{1}{2}-\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right), \mathbf{ra\_0}\left(\frac{-1}{2}+\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right), \mathbf{ra\_0}\left(\frac{-1}{2}-\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$$\blacktriangleright\ \{1.14088, -0.901133, 0.420866+0.961768\cdot i, 0.420866-0.961768\cdot i, -0.540072+0.768772\cdot i, -0.540072-0.768772\cdot i\}$$

$$\mathbf{ra\_1}(\alpha) := \frac{-6}{\ln(2)} \cdot \mathbf{kit\_ets\_mb\backslash lambertw}\left(-1, \frac{-\alpha \cdot \ln(2)}{6}\right) \ \blacktriangleright\ \textit{Terminé}$$

$$\mathbf{ra\_1}(1) \ \blacktriangleright\ 29.2105$$

Abbildung 1.22

Wir können sogar mehrere andere komplexe Lösungen hinzufügen (was durch Vergrößerung des Fensters von *Derive* in Abbildung 1.19 zu sehen ist):

$$\left\{\mathbf{ra\_1}(-1),\mathbf{ra\_1}(1),\mathbf{ra\_1}\left(\frac{1}{2}+\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right),\mathbf{ra\_1}\left(\frac{1}{2}-\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right),\mathbf{ra\_1}\left(\frac{-1}{2}+\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right),\mathbf{ra\_1}\left(\frac{-1}{2}-\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

▸ $\{33.4659+34.0702\cdot i, 29.2105, 30.1715-12.4531\cdot i, 30.1715+12.4531\cdot i, 34.8737+44.0603\cdot i, 31.8633+23.6579\cdot i\}$

$$\mathbf{ra\_2}(\alpha):=\frac{-6}{\ln(2)}\cdot \mathbf{kit\_ets\_mb\backslash lambertw}\left(2,\frac{-\alpha\cdot\ln(2)}{6}\right)$$ ▸ *Terminé*

$$\left\{\mathbf{ra\_2}(-1),\mathbf{ra\_1}(1),\mathbf{ra\_2}\left(\frac{1}{2}+\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right),\mathbf{ra\_2}\left(\frac{1}{2}-\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right),\mathbf{ra\_2}\left(\frac{-1}{2}+\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right),\mathbf{ra\_2}\left(\frac{-1}{2}-\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

▸ $\{39.8563-91.628\cdot i, 29.2105, 42.4937-128.677\cdot i, 41.2725-110.207\cdot i, 39.0541-82.2787\cdot i, 40.5925-100.934\cdot i\}$

Abbildung 1.23

1.11.2 Vereinfachung mit LambertW Wenn wir bei der Lösung von Gleichungen bleiben, dann kann jede Gleichung, die auf die Form $ye^y = z$ reduziert werden kann, in der z eine gegebene (möglicherweise komplexe) Zahl und y die zu findende Unbekannte ist, gelöst werden, indem die LambertW-Funktion auf beiden Seiten dieser Gleichung genommen wird. Mit anderen Worten, wenn man „W" als Bezeichnung für einen beliebigen Zweig mit dem Index „k" der Lambert-Funktion $W(k, z)$ verwendet, ergibt sich

$$W\left(ye^y\right) = y.$$

Im Einzelnen gilt (wie aus Abbildung 1.21 ersichtlich):

$$e^{W(z)} = \frac{z}{W(z)}.$$

1.11.3 Beispiel Es ist einfach, für die Gleichung $x^2 = 2^x$ die Lösungen 2 und 4 sofort zu erkennen. Die dritte reelle Lösung (wie auch 2 und 4) sowie alle komplexen Lösungen können leicht mit LambertW gefunden werden. So ist diese Gleichung äquivalent zu $x = \pm e^{x\ln(2)/2}$, was weiters äquivalent ist zu

$$-x\frac{\ln 2}{2}e^{-x\ln(2)/2} = \pm\frac{\ln 2}{2}.$$

Mais alors $-x = -\dfrac{2}{\ln(2)}W\left(\pm\dfrac{\ln 2}{2}\right)$ où « W » désigne une branche de LambertW. Notons que $-\ln(2)/2 > -1/e$ et donc les branches $k = 0$ et $k = -1$ vont être utilisées pour évaluer la valeur de $W\left(-\dfrac{\ln 2}{2}\right)$ et la branche $k = 0$ sera utilisée aussi pour la valeur de $W\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)$. Les solutions réelles se retrouvent donc parmi les 3 valeurs suivantes :

$$-\frac{2}{\ln 2}W\left(0,\frac{\ln 2}{2}\right),\ -\frac{2}{\ln 2}W\left(0,\frac{-\ln 2}{2}\right)\ \text{ et }\ -\frac{2}{\ln 2}W\left(-1,\frac{-\ln 2}{2}\right).$$

La première réponse donne $-0.766665\ldots$. Notons maintenant ceci : dans $W\left(ye^y\right) = y$, remplaçons y par $-\ln(x)$ et utilisant le fait que pour x non nul on a toujours $\exp(\ln(x)) = x$ et donc $\exp(-\ln(x)) = 1/x$, on trouve que $W\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right) = -\ln x.$ Mais alors l'image de la branche $k = 0$ consistant en les réels ≥ -1 et puisque $-\ln 2 > -1$, on peut écrire

$$-\frac{2}{\ln 2}W\left(0,\frac{-\ln 2}{2}\right) = -\frac{2}{\ln 2}\cdot(-\ln 2) = 2$$

Et comme l'image de la branche $k = -1$ consiste en les réels ≤ -1 et que $-\ln 4 < -1$, on peut écrire

$$-\frac{2}{\ln 2}W\left(-1,\frac{-\ln 2}{2}\right)=-\frac{2}{\ln 2}W\left(-1,\frac{-2\ln 2}{4}\right)=-\frac{2}{\ln 2}W\left(-1,\frac{-\ln 4}{4}\right)=-\frac{2}{\ln 2}\cdot(-\ln 4)=4.$$

1.11.4 Exemple Dans $W\left(ye^{y}\right)=y,$ si l'on remplace maintenant y par ln(x) et utilise encore le fait que pour x non nul on a toujours exp(ln(x)) = x, on trouve que $W(x\ln x)=\ln x$. Cela permet de montrer que la solution (positive) à l'équation $x^{x^3}=3$ est $\sqrt[3]{3}.$ En effet, un calcul montre qu'on aboutit à $x^3\ln x=\ln 3,$, d'où $x^3\ln(x^3)=3\ln 3$, d'où $W(x^3\ln(x^3))=W(3\ln 3)=\ln 3$ et ainsi $\ln\left(x^3\right)=\ln 3$ et $x=\sqrt[3]{3}.$

1.12 Remarque et définition Dans le cas des solutions données numériquement, quelles méthodes « magiques » les systèmes symboliques utilisent-t-ils? Probablement, un « mélange » de différentes méthodes.

Nous allons présenter deux d'entre elles maintenant. La première est celle du point fixe et la seconde est celle de Newton. Chacune de ces méthodes sera étendue aux systèmes d'équations et l'utilisation d'un calculateur s'avère fort utile, voire nécessaire ici.

On dit qu'une fonction g possède un <u>point fixe</u> s'il existe un nombre r tel que $g(r) = r$. Si, de plus, la fonction g est dérivable, nous dirons que ce point fixe est un <u>attracteur</u> si $|g'(r)|<1.$

Ainsi, on trouve facilement que les points fixes de la fonction

$$g(x)=\frac{x\left(4+x^2\right)}{1+4x^2}$$

sont 0, 1 et -1 et que 0 n'est pas un attracteur. On peut alors se demander si, en itérant $g(x)$, cela va converger. Ainsi, en partant « proche » de 0, disons 0.2, nous trouverions que ça converge mais pas vers 0 mais plutôt vers 1 : la fonction « iterates » de *Derive* possède un dernier argument facultatif. La précision est limitée à 14 chiffres dans Nspire (on voit à la figure 1.25 l'affichage à « float 6 ») :

ITERATES avec *Derive :*

```
                      2
              x·(4 + x )
#1:   g(x) := ──────────
                      2
               1 + 4·x

#2:   ITERATES(g(x), x, 0.2, 10)

#3:   [0.2, 0.6965517241, 1.062374033, 0.9880277022, 1.002411363, 0.9995184273, 1.000096342, 0.9999807326, 1.000003853,
        0.9999992292, 1.000000154]

#4:   ITERATES(g(x), x, 0.2)

#5:   [0.2, 0.6965517241, 1.062374033, 0.9880277022, 1.002411363, 0.9995184273, 1.000096342, 0.9999807326, 1.000003853,
        0.9999992292, 1.000000154, 1, 1]
```

Figure 1.24

iterates avec TI-NspireCAS (contenu dans libraire *kit_ets_mb*):

$$g(x):=\frac{x\cdot\left(4+x^2\right)}{1+4\cdot x^2}$$ *Terminé*

$kit\_ets\_mb\backslash iterates(g(x),x,0.2,10)$

$[0.2 \quad 0.696552 \quad 1.06237 \quad 0.988028 \quad 1.00241 \quad 0.999518 \quad 1.0001 \quad 0.999981 \quad 1. \quad 0.999999 \quad 1.]$

Figure 1.25

wird fortgesetzt