Elfmeterschießen im Fußball

Bei der zurückliegenden Fußball-Europameisterschaft 20/21 wurden einige Spiele erst durch Elfmeterschießen entschieden. Besonders in Erinnerung bleibt das dramatische Elfmeterschießen des Endspiels Italien gegenEngland, das Italien mit 3:2 gewann. Entscheidend war am Ende die fehlende Nervenstärke des letzten, erst19-jährigen englischen Schützens. Von großer Bedeutung, und das wird im folgenden gezeigt, war aber auch die Tatsache, dass Italien mit dem Elfmeterschießen beginnen konnte. Bei einem Elfmeterschießen in der üblichen Reihenfolge ABABAB... der Mannschaften A und B besteht für die Mannschaft A ein Vorteil gegenüber der Mannschaft B. Dieser Vorteil wird hier unter bestimmten Modellannahmen berechnet. Außerdem wird eine gerechtere Regelung für das Elfmeterschießen vorgeschlagen. Zunächst werden die Regeln für das übliche Elfmeterschießen am Ende eines Fußballspiels angegeben.

Regeln für das Elfmeterschießen

Der Schiedsrichter lost aus, auf welches Tor die Schüsse ausgeführt werden.
Der Schiedsrichter wirft eine Münze und der Gewinner der Wahl darf sich aussuchen, ob sein Team den ersten Schuss abgibt, oder ob er lieber dem gegnerischen Team den Vortritt überlässt.

Beide Mannschaften geben nun abwechselnd Schüsse ab.

1. Wer nach 5 Runden die meisten Tore erzielt hat ist Sieger des Elfmeterschießens.

2. Das Elfmeterschießen kann vorzeitig beendet sein. Das ist dann der Fall wenn eine Mannschaft mehr Treffer geschossen hat, als die andere mit den ihr noch zustehenden Elfmetern noch erzielen kann.
Beispiel: Steht es nach 3 Runden 3:0, dann stehen der zweiten Mannschaft noch 2 Elfmeter zu, mit denen sie aber nicht den Vorsprung der anderen Mannschaft wettmachen kann.

3. Falls es nach 5 Runden unentschieden steht, so wird das Elfmeterschießen fortgesetzt, bis ein Team bei gleicher Anzahl an Schüssen ein Tor mehr erzielt hat als der Gegner.

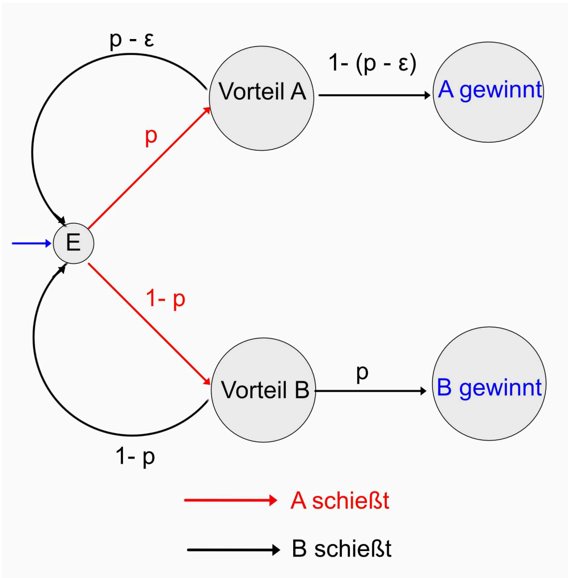
Modellannahmen für ein Elfmeterschießen

Es gibt gute und weniger gute Elfmeterschützen, d.h. für jeden Schützen gibt es eine individuelle Trefferwahrscheinlichkeit beim Elfmeterschuß. Außerdem beeinflußt die Tagesform die Trefferwahrscheinlichkeit. Weil hier eine allgemeine Aussage über das getroffen werden soll können diese individuellen Trefferwahrscheinlichkeiten nicht berücksichtigt werden. Es wird deshalb für jeden Schützen von einer durchschnittlichen Trefferwahrscheinlichkeit p ausgegangen. Statistiken [1] zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit p niedriger als bei Elfmetern während der regulären Spielzeit ist, und ungefähr gleich 75% beträgt. Außerdem ist bekannt, dass die Trefferwahrscheinlichkeit eines Schützens sinkt, wenn die gegnerische Mannschaft vorne liegt. Der Einfluss des Drucks, der dann auf dem Spieler lastet, verringert die Trefferwahrscheinlichkeit um durchschnittlich ε = 5%. Für das hier betrachtete Modell gelten damit die folgenden beiden Annahmen:

1. Trefferwahrscheinlichkeit p (durchschnittlich 75%)
2. Liegt die gegnerische Mannschaft vorne, dann beträgt die Trefferwahrscheinlichkeit $p-\varepsilon$ (ε ist durchschnittlich 5%).

Die Abfolge, dass Mannschaft A und dann Mannschaft B je einen Schuss abgeben, wird hier als eine *Runde* bezeichnet. Der jeweilige Spielstand des Elfmeterschießens wird mit a:b bezeichnet, wobei a die Anzahl der Treffer für Mannschaft A und b die Anzahl der Treffer der Mannschaft B bezeichnet.

Die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt, wenn nr = 5 und a = b ist (Regel 3) kann leicht berechnet werden. Zur Abkürzung wird diese Wahrscheinlichkeit mit w(p, ε) bezeichnet. Zur Berechnung von w(p, ε) betrachtet man eine Irrfahrt auf dem folgenden Graphen:



In der Situation nr = 5 und a = b wird im Knoten E (Einstand) gestartet. Die Mannschaft A schießt und erzielt mit der Wahrscheinlichkeit p ein Tor. Die Irrfahrt steht dann im Knoten „Vorteil A", denn wenn Mannschaft B jetzt daneben schießt hat A gewonnen. Falls Mannschaft A aber nicht trifft (Wahrscheinlichkeit 1 - p), dann steht die Irrfahrt im Knoten „Vorteil B". Falls die Mannschaft A getroffen hat, so liegt sie mit einem Zähler vor der Mannschaft B, weshalb diese nur mit der Wahrscheinlichkeit p - ε trifft. In diesem Fall steht die Irrfahrt wieder im Knoten E und alles beginnt von vorne. Dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit p (p - ε).
Entsprechend kann man auch mit der Wahrscheinlichkeit (1 - p)(1 - p) wieder in E landen, dann nämlich, wenn A und B beide nicht treffen.
Von E aus kann die Mannschaft A direkt, d.h. ohne wieder in E zu landen, mit der Wahrscheinlichkeit p (1 - (p - ε)) gewinnen.
Für die Wahrscheinlichkeit w(p, ε) gilt deshalb:
$w(p, \varepsilon) = p(p - \varepsilon)w(p, \varepsilon) + (1 - p)(1 - p)w(p, \varepsilon) + p\,(1 - (p - \varepsilon))$

Das Auflösen nach w liefert $w(p,\varepsilon) = \dfrac{p(1 - (p - \varepsilon))}{1 - p^2 + p\varepsilon - 1 + 2p - p^2}$

Vereinfachen führt auf: $w(p,\varepsilon) = \dfrac{1 - (p - \varepsilon)}{\varepsilon + 2(1 - p)}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft B gewinnt ist dann gleich

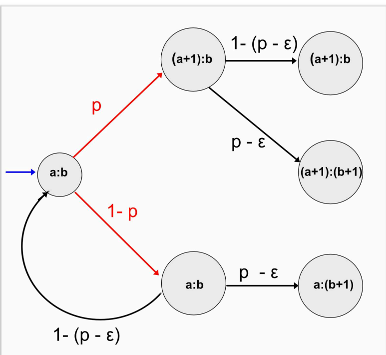
$$v(p,\varepsilon) = 1 - w(p,\varepsilon) = 1 - \frac{1 - (p - \varepsilon)}{\varepsilon + 2(1 - p)} = \frac{\varepsilon + 2(1 - p) - 1 + (p - \varepsilon)}{\varepsilon + 2(1 - p)} = \frac{1 - p}{\varepsilon + 2(1 - p)}$$

Speziell für p= 75% und ε = 5% werden w und v berechnet:

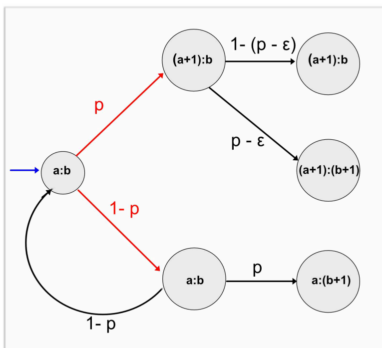
© A gewinnt:	
$w(p,\varepsilon) := \frac{1-(p-\varepsilon)}{\varepsilon+2\cdot(1-p)}$	*Fertig*
$w(0.75,0.05)$	0.545455
© B gewinnt:	
$v(p,\varepsilon) := 1-w(p,\varepsilon)$	*Fertig*
$v(0.75,0.05)$	0.454545
© Unterschied:	
$w(0.75,0.05)-v(0.75,0.05)$	0.090909

In dieser Situation besitzt die Mannschaft A damit einen Vorteil von ca. 9%.

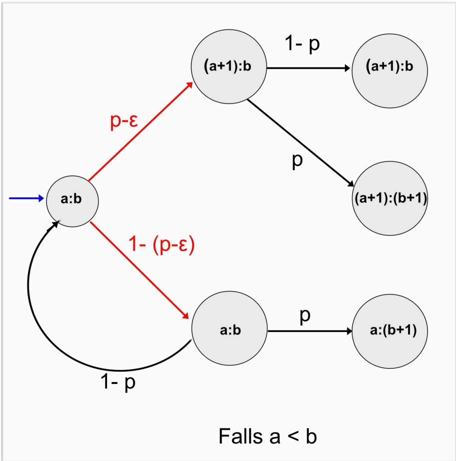
Es wird jetzt das Elfmeterschießen von Beginn an betrachtet und nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass die Mannschaft A gewinnt. Wegen der vielen Möglichkeiten wie das Elfmeterschießen ablaufen kann, ist es nicht sinnvoll einen Baum zu erstellen, dessen Äste diese Möglichkeiten darstellen. Einfacher ist es eine Funktion g(nr,a,b,p,ε) zu betrachten welche die Gewinnwahrscheinlichkeit für Mannschaft A liefert, wenn nr Runden gespielt wurden und der Spielstand a:b beträgt. Mit diesen Bezeichnungen würde dann g(0,0,0,0.75,0.05) die Gewinnwahrscheinlichkeit für A von Beginn an liefern. Die Funktion g kann man rekursiv aufbauen. Dazu muss allerdings beachtet werden, dass je nachdem, ob für den Spielstand a>b, a=b oder a<b gilt, die Funktion g anders aussieht, d.h. es ist eine dreifache Fallunterscheidung nötig. Die in diesem Zusammenhang erforderlichen Wahrscheinlichkeiten lassen sich den folgenden drei Abbildungen entnehmen:



Falls a > b



Falls a = b



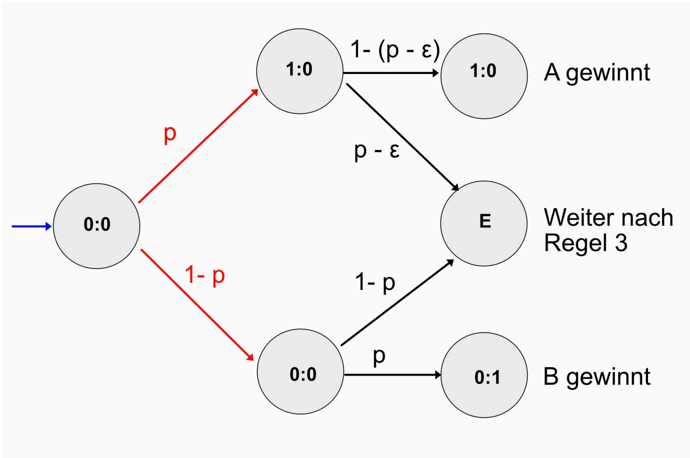
Ergänzt man diese drei Fälle noch um die Abbruchbedingungen der Rekursion, dann ergibt sich folgende Funktion:

$$
g(nr,a,b,p,\varepsilon):=\begin{cases} 1, & nr=5 \text{ and } a>b \\ 0, & nr=5 \text{ and } a<b \\ w(p,\varepsilon), & nr=5 \text{ and } a=b \\ \begin{cases} (1-p)\cdot(1-(p-\varepsilon))\cdot g(nr+1,a,b,p,\varepsilon)+p\cdot(p-\varepsilon)\cdot g(nr+1,a+1,b+1,p,\varepsilon)+p\cdot(1-(p-\varepsilon))\cdot g(nr+1,a+1,b,p,\varepsilon)+(1-p)\cdot(p-\varepsilon)\cdot g(nr+1,a,b+1,p,\varepsilon), & a>b \\ (1-p)^2\cdot g(nr+1,a,b,p,\varepsilon)+p\cdot(p-\varepsilon)\cdot g(nr+1,a+1,b+1,p,\varepsilon)+p\cdot(1-(p-\varepsilon))\cdot g(nr+1,a+1,b,p,\varepsilon)+(1-p)\cdot p\cdot g(nr+1,a,b+1,p,\varepsilon), & a=b \\ (1-(p-\varepsilon))\cdot(1-p)\cdot g(nr+1,a,b,p,\varepsilon)+p\cdot(p-\varepsilon)\cdot g(nr+1,a+1,b+1,p,\varepsilon)+(p-\varepsilon)\cdot(1-p)\cdot g(nr+1,a+1,b,p,\varepsilon)+(1-(p-\varepsilon))\cdot p\cdot g(nr+1,a,b+1,p,\varepsilon), & a<b \end{cases} & \text{Else} \end{cases}
$$

Die Berechnung von g(0,0,0,0.75,0.05) liefert eine Überraschung:

$g(0,0,0,0.75,0.05)$	0.545455

Es mag zunächst überraschen, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit für A beim gesamten Elfmeterschießen ebenso groß ist, wie die Gewinnwahrscheinlichkeit für ein Elfmeterschießen nur nach der Regel 3. Diese, etwas unübersichtliche Situation läßt sich klären, wenn man statt die üblichen 5 Runden durchzuführen zunächst nur eine Runde betrachtet, welche die Ergebnisse 1:0 (A gewinnt), 0:1 (B gewinnt) oder E haben kann. E steht für Einstand der sich als 0:0 oder als 1:1 äußern kann. Wenn E eintritt, so folgt dann das zuvor betrachtete Elfmeterschießen nach der Regel 3. Der Spielstand 1:0 tritt mit der Wahrscheinlichkeit $p\cdot(1-(p-\varepsilon))$ ein. Der Spielstand E tritt mit der Wahrscheinlichkeit $p\cdot(p-\varepsilon)+(1-p)\cdot(1-p)$ ein.



Die Wahrscheinlichkeit, dass A dieses Elfmeterschießen gewinnt ist dann:

$$P(A) = p\cdot(1-(p-\varepsilon)) + \left[p\cdot(p-\varepsilon)+(1-p)^2\right]w(p,\varepsilon)$$

$$= p\cdot(1-(p-\varepsilon)) + \left[p\cdot(p-\varepsilon)+(1-p)^2\right]\frac{1-(p-\varepsilon)}{\varepsilon+2(1-p)}$$

$$= (1-(p-\varepsilon))\cdot\left[p+\frac{(1-p)^2+p(p-\varepsilon)}{\varepsilon+2(1-p)}\right]$$

$$= (1-(p-\varepsilon))\frac{p\varepsilon+2p(1-p)+(1-p)^2+p(p-\varepsilon)}{\varepsilon+2(1-p)}$$

$$= \frac{1-(p-\varepsilon)}{\varepsilon+2(1-p)} = w(p,\varepsilon)\,.$$

Sieht man genauer hin, dann stellt man fest, dass der Ablauf der Runde genau so funktioniert wie das Schießen nach Regel 3. Wer nach den Schüssen von A und B führt, der hat gewonnen. Bei Einstand wiederholt sich alles.

Was geschieht wenn man 2 Runden spielt? Die letzte Runde ersetzt man wie eben gezeigt durch das Elfmeterschießen nach Regel 3. Dann ist man in genau derselben Situation wie zuvor bei nur einer Runde. So fährt man fort und kommt schließlich zu dem Schluss, dass die Mannschaft A in einem Elfmeterschießen über 5 Runden, mit eventuell sich anschließendem Schießen nach der Regel 3, mit der Wahrscheinlichkeit w gewinnt. Denkt man nur an Gewinnwahrscheinlichkeiten, dann könnte man die 5 Runden weg lassen und gleich mit dem Elfmeterschießen nach der Regel 3 starten. Für die Gewinnwahrscheinlichkeiten der Mannschaften hätte das denselben Effekt wie das gewohnte Elfmeterschießen.

Warum wird dies in der Praxis dann nicht durchgeführt? Darüber kann man nur spekulieren. Vielleicht war bei der Einführung des Elfmeterschießens den Erfindern dies nicht bewusst. Vielleicht aber will man den Anreiz für die Zuschauer dadurch hoch halten, dass man häufiger auf das Tor ballern lässt.

Für die Werte p = 0,75 und ε = 0,05 wurde w(p, ε) bereits berechnet und es wurde gezeigt, dass die Mannschaft A hat einen Vorteil von etwa 9% hat. .

Allgemein gilt:

$$w(p,\varepsilon)-v(p,\varepsilon)=\frac{1-(p-\varepsilon)}{\varepsilon+2(1-p)}-\frac{1-p}{\varepsilon+2(1-p)}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon+2(1-p)}\geq 0 \text{ für } 0\leq p\leq 1 \text{ und } 0\leq\varepsilon\leq p$$

Elfmeterschießen nach der herkömmlichen Art ist demnach stets unfair, unabhängig von den Werten für p und ε.

Lassen sich die Regeln für das Elfmeterschießen so ändern, dass diese Ungerechtigkeit beseitigt wird? Prinzipiell ist dies möglich, stellt jedoch für Zuschauer und Schiedsrichter eine gewisse Herausforderung dar.

Man spielt die erste Runde wie gewohnt in der Reihenfolge A B.
Der Vorteil den A in der erste Runde hatte wird dadurch ausgeglichen, dass B die zweite Runde beginnt, d.h. die erste und die zweite Runde sind dann A B B A.
Ein eventueller Vorteil für A oder B in dieser Abfolge wird erneut durch Umkehr der Reihenfolge ausgeglichen: A B B A B A A B.

Wie setzt man diese Folge fort? Das Bauprinzip der Folge lautet: Jeder Buchstabe des Ausgangswortes wird „invertiert2. Das sich so ergebende neue Wort wird an das Ausgangswort angehängt. Setzt man diesen Vorgang beliebig fort, dann erhält man die sog. Thue-Morse-Folge.
Die Beschreibung der Folge wird einfacher wenn man A durch 0 und B durch 1 ersetzt.

Dann ist die Invertierung rechnerisch leicht möglich durch $\bar{x}=1-x,\ x\in\{0,1\}$.

```
Define invert(liste)=
Func
© Invertiert die Elemente einer Liste
Local m,i
m:={}
For i,1,dim(liste)
  m:=augment(m,{1-liste[i]})
© 1-x liefert das duale Komplement
EndFor
Return m
EndFunc
```

```
Define t(i)=
Func
© Liefert die ersten 2^i Zeichen der Thue Morse Folge
If i=0 Then
{0}
Else
  Return augment(t(i-1),invert(t(i-1)))
EndIf
EndFunc
```

$t(0)$	$\{0\}$
$t(1)$	$\{0,1\}$
$t(2)$	$\{0,1,1,0\}$
$t(3)$	$\{0,1,1,0,1,0,0,1\}$
$t(4)$	$\{0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0\}$
$t(5)$	$\{0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,0,1,1,0,0,1,1,0,1,0,0,1\}$

Um weitere Eigenschaften der Folge zu erkennen streicht man alle Elemente mit einer ungeraden Platzziffer:

$x_0\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8\ x_9 \ldots$

$0,\cancel{1},1,\cancel{0},1,\cancel{0},0,\cancel{1},1,\cancel{0},0,\cancel{1},0,\cancel{1},1,\cancel{0},1,\cancel{0},0,\cancel{1},$

$0.\quad 1.\quad 1.\quad 0.\quad 1.\quad 0.\quad 0.\quad 1.\quad 1.\quad 0$

$x_0\quad x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4\quad x_5\quad x_6\quad x_7\quad x_8\quad x_9 \ldots$

Die sich dann ergebende Folge stimmt mit der ursprünglichen Folge überein. Dies zeigt, dass $x_2 = x_1$, $x_4 = x_2$, $x_6 = x_3$,... gilt, d.h. es ist $x_{2n} = x_n$.

Als nächstes verfolgt man die Paritätswechsel in der Folge. Es zeigt sich, dass diese an den Stellen mit ungerader Platzziffer stattfinden:

$0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad \ldots$

$x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_5,\quad x_6,\quad x_7,\quad x_8,\quad x_9,\quad x_{10} \ldots$

Also gilt: $x_{2n+1} = 1 - x_{2n}$

Zusammenfassung:

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_{2n} &= x_n \\ x_{2n+1} &= 1-x_{2n} = 1-x_n \end{aligned}}$$

Daraus kann man eine Rekursionsformel für die Berechnung der Folge aufstellen:

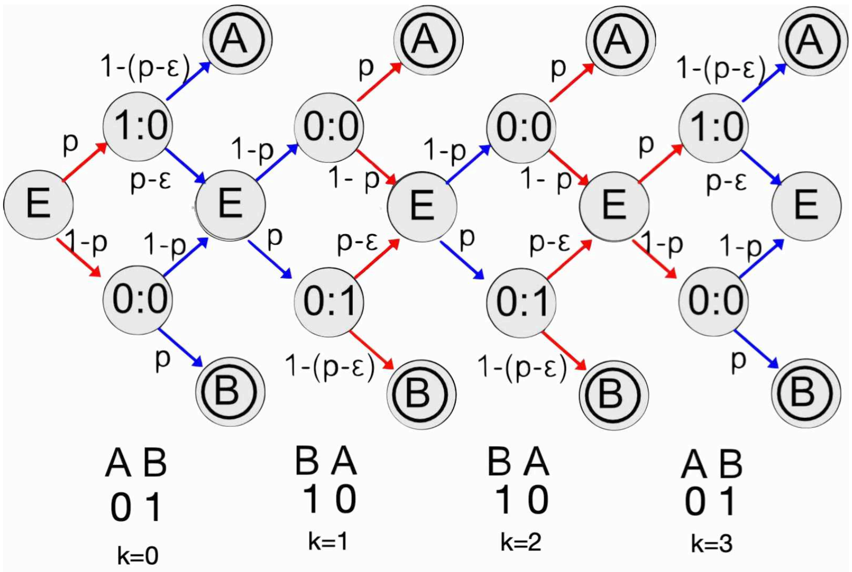
$$x_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ x_{\frac{k}{2}} & k \text{ gerade}, k>0 \\ x_{\frac{k-1}{2}} & k \text{ ungerade}, k>0 \end{cases}$$

```
Define x(k)=
Func
© Gibt das k–te Folgenglied der Thue–Morse–Folge zurück. Zählung
  beginnt bei 0
If k=0 Then
 0
Else
 If mod(k,2)=0 Then
  x(k/2)
 Else
  1−x((k−1)/2)
© 1−x ist das Inverse zu x
 EndIf
EndIf
EndFunc
```

```
seq(x(n),n,0,31)
      {0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,0,1,1,0,0,1,1,0,1,0,0,1}
```

Die Funktion x(k) wird im Folgenden verwendet um die Gewinnwahrscheinlichkeiten der Mannschaften A und B zu berechnen wenn in der Morse-Thue Reihenfolge geschossen wird. Bevor diese Rechnung erfolgen kann werden Terme für diese Gewinnwahrscheinlichkeiten aufgestellt.

Es wird berechnet, mit welcher Wahrscheinlichkeit pa(k) die Mannschaft A nach k Runden oder früher gewonnen hat, wenn in der Thue-Morse Reihenfolge geschossen wird. Dazu wird die folgende Abbildung betrachtet, anhand der sich diese Wahrscheinlichkeiten bilden lassen. Die erste Runde trägt die Nummer k=0.



usw.

pa(0)=p•(1-(p-ε))

pa(1)=pa(0)+[p•(p-ε)+(1-p)^2] • (1-p)•p

pa(2)=pa(1)+[p•(p-ε)+(1-p)^2]^2 • (1-p)•p

pa(3)=pa(2)+[p•(p-ε)+(1-p)^2]^3 • p •(1-(p-ε))

Zusammenfassend ergibt sich:

$$pa(k)=\begin{cases} pa(k-1)+[p(p-\varepsilon)+(1-p)^2]^k\cdot p\cdot(1-(p-\varepsilon)) & \text{falls AB} \\ pa(k-1)+[p(p-\varepsilon)+(1-p)^2]^k\cdot(1-p)\cdot p & \text{falls BA} \end{cases}$$

Zum Vergleich betrachtet man die Wahrscheinlichkeiten pb(k), die angeben mit welcher Wahrscheinlichkeit die Mannschaft B nach k Runden oder früher gewonnen hat. Es ergibt sich:

$$pb(k)=\begin{cases} pb(k-1)+[p(p-\varepsilon)+(1-p)^2]^k\cdot(1-p)\cdot p & \text{falls AB} \\ pb(k-1)+[p(p-\varepsilon)+(1-p)^2]^k\cdot p\cdot(1-(p-\varepsilon)) & \text{falls BA} \end{cases}$$

Die Berechnung der Werte von pa und pb übernehmen die folgenden Funktionen:

Define **runde**(k)=
Func
© Die erste Runde hat die Nummer k=0
Return $\{x(2\cdot k),x(2\cdot k+1)\}$
EndFunc

Define **pa**(k)=
Func
Return $\begin{cases} p\cdot(1-(p-\varepsilon)), & k=0 \\ \mathbf{pa}(k-1)+\left(p\cdot(p-\varepsilon)+(1-p)^2\right)^k\cdot p\cdot(1-(p-\varepsilon)), & runde(k)=\{0,1\} \\ \mathbf{pa}(k-1)+\left(p\cdot(p-\varepsilon)+(1-p)^2\right)^k\cdot(1-p)\cdot p, & runde(k)=\{1,0\} \end{cases}$
EndFunc

Define **pb**(k)=
Func
Return $\begin{cases} (1-p)\cdot p, & k=0 \\ \mathbf{pb}(k-1)+\left(p\cdot(p-\varepsilon)+(1-p)^2\right)^k\cdot(1-p)\cdot p, & runde(k)=\{0,1\} \\ \mathbf{pb}(k-1)+\left(p\cdot(p-\varepsilon)+(1-p)^2\right)^k\cdot p\cdot(1-(p-\varepsilon)), & runde(k)=\{1,0\} \end{cases}$
EndFunc

$\mathrm{seq}(pa(k),k,1,8)|p=0.75 \text{ and } \varepsilon=0.05$

$$\{0.335156,0.399873,0.445498,0.467836,0.483584,0.492836,0.497365,0.500026\}$$

$\mathrm{seq}(pb(k),k,1,8)|p=0.75 \text{ and } \varepsilon=0.05$

$$\{0.319688,0.397348,0.435369,0.462174,0.475297,0.483007,0.488442,0.491636\}$$

$\mathrm{seq}(pa(k)-pb(k),k,1,8)|p=0.75 \text{ and } \varepsilon=0.05$

$$\{0.015469,0.002525,0.01013,0.005662,0.008287,0.009829,0.008923,0.008391\}$$

Die letzte Abbildung zeigt, dass die Unterschiede der Gewinnwahrscheinlichkeiten für die Mannschaften A und B zu vernachlässigen sind. Diese Art des Elfmeterschießens ist im Gegensatz zur herkömmlichen Praxis gerecht.