

Apéndice A

Propiedades estáticas de áreas planas

A.1 Momento estático y Centroide

Sea el área plana de la Figura A.1.

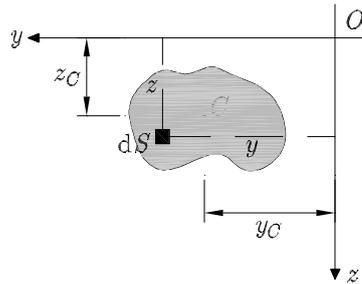


Figura A.1 Área plana. Centroide

El área S de la misma se obtiene mediante la expresión

$$S = \int_S dS \quad (\text{A.1})$$

siendo dS un elemento diferencial de área, con coordenadas y y z respecto a un sistema de coordenadas arbitrario, con origen en O , como el mostrado en la Figura A.1. Los momentos estáticos del área con respecto a los ejes y y z , se definen como

$$Q_y = \int_S z dS \quad (\text{A.2})$$

$$Q_z = \int_S y dS \quad (\text{A.3})$$

Los momentos estáticos pueden ser positivos o negativos, dependiendo de la posición de los ejes y y z . Su ecuación de dimensiones es $[L^3]$. La obtención de las coordenadas (y_C, z_C) del centroide es inmediata a partir de los momentos estáticos, mediante las expresiones

$$y_C = \frac{Q_z}{S} = \frac{\int_S y dS}{\int_S dS} \quad (\text{A.4})$$

$$z_C = \frac{Q_y}{S} = \frac{\int_S z dS}{\int_S dS} \quad (\text{A.5})$$

Las coordenadas pueden ser positivas o negativas, dependiendo de la posición de los ejes y y z .

Si un área es simétrica respecto a un eje, el centro de gravedad debe encontrarse sobre ese eje, como se muestra en la Figura A.2 a), ya que el momento estático de un área respecto a un eje de simetría es nulo. Si un área tiene dos ejes de simetría, el centro de gravedad se encuentra en la intersección de ambos ejes, como se muestra en la Figura A.2 b).

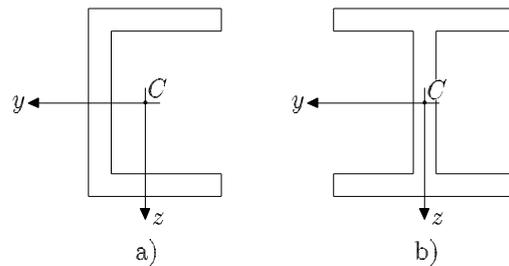


Figura A.2 Simetrías y posición del centroide

A menudo, un área se puede descomponer en varias figuras simples. Si se conoce el área S_i de cada una de estas figuras y la localización de su centroide (y_{C_i}, z_{C_i}) , es posible obviar la integración de las expresiones (A.4) y (A.5), y calcular las coordenadas del centroide mediante las expresiones

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_{C_i} S_i}{\sum_{i=1}^n S_i} \quad (\text{A.6})$$

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_{C_i} S_i}{\sum_{i=1}^n S_i} \quad (\text{A.7})$$

Si una de las figuras simples tuviera un agujero, dicho agujero se consideraría como una parte adicional de área negativa.

A.2 Momentos de inercia y radios de giro

A.2.1 Momentos de inercia

Los momentos de inercia I_y e I_z de un área con respecto a los ejes y y z , respectivamente, se definen como

$$I_y = \int_S z^2 dS \quad (\text{A.8})$$

$$I_z = \int_S y^2 dS \quad (\text{A.9})$$

Los momentos de inercia son cantidades siempre positivas y de dimensiones $[\text{L}^4]$.

El momento polar de inercia J_O , o momento respecto a un punto O , como se muestra en la Figura A.3,

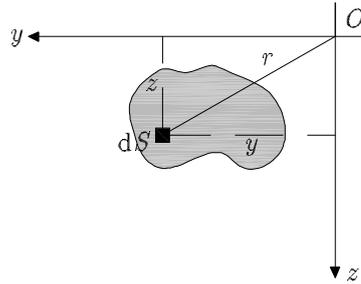


Figura A.3 Momento polar de inercia

se obtiene mediante la expresión

$$J_O = \int_S r^2 dS = \int_S (y^2 + z^2) dS = I_z + I_y \quad (\text{A.10})$$

El momento de inercia de una sección compuesta con respecto a cualquier eje es la suma de los momentos de inercia de sus partes respecto a dicho eje.

A.2.2 Radios de giro

El radio de giro i de una sección, se define como la raíz cuadrada del cociente entre el momento de inercia y el área de la sección. Referidos a unos ejes de referencia y y z , serán

$$i_y = \frac{\sqrt{I_y}}{S} \quad (\text{A.11})$$

$$i_z = \frac{\sqrt{I_z}}{S} \quad (\text{A.12})$$

El radio de giro es una cantidad siempre positiva y de dimensiones $[\text{L}]$. Aunque el radio de giro no tiene un significado físico obvio, se puede considerar como la distancia (medida desde el eje de referencia) donde debería concentrarse todo el área para dar el mismo momento de inercia que el área original.

A.3 Producto de inercia

El producto de inercia de una sección respecto a un sistema de ejes perpendiculares y y z , se define como

$$I_{yz} = \int_S y z dS \quad (\text{A.13})$$

Al igual que en los momentos de inercia, la dimensión del producto de inercia es $[L^4]$. Sin embargo, el producto de inercia puede ser positivo o negativo, como se muestra en la Figura A.4 a), o nulo, como se muestra en la Figura A.4 b).

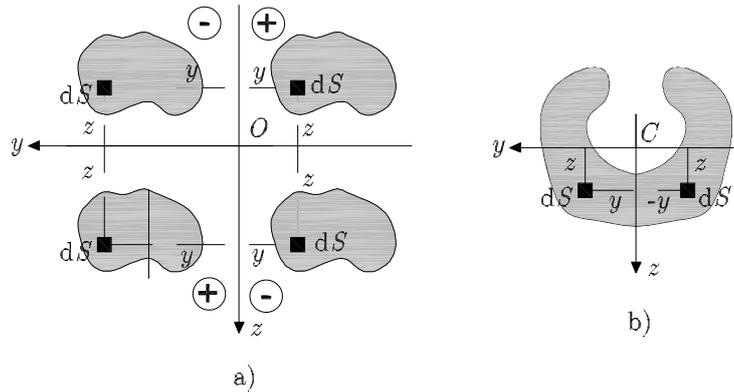


Figura A.4 a) Producto de inercia: signos. b) Sección simétrica respecto al eje z : producto de inercia nulo

Si todo el área se encuentra en el primer cuadrante respecto a los ejes de referencia, el producto de inercia es positivo, ya que y y z son siempre positivas. Si todo el área se encuentra en el segundo cuadrante, el producto de inercia es negativo, ya que la coordenada y es negativa y la z es positiva. Similarmente, si todo el área se encuentra en el tercer o cuarto cuadrante, tienen signo negativo y positivo, respectivamente. Cuando el área se sitúa en más de un cuadrante, el signo del producto de inercia depende de la distribución del área dentro de los cuadrantes.

Cuando uno de los ejes es de simetría, los productos de inercia de cada uno de los dos lados en los que se divide la sección se anulan, y por lo tanto, el producto de inercia es nulo. Es decir, el producto de inercia de un área es nulo con respecto a cualquier par de ejes donde al menos uno de ellos es de simetría.

A.4 Teorema de Steiner

El teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos, permite relacionar el momento de inercia respecto a un eje cualquiera con el momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior que pase por el centro de gravedad de la sección (en el caso del producto de inercia, relaciona el producto de inercia respecto a dos ejes cualesquiera con el producto de inercia respecto a dos ejes paralelos a los anteriores que pasen por el centro de gravedad de la sección).

Para la sección mostrada en la Figura A.5, el momento de inercia respecto al eje y es

$$I_y = \int_S (z + d_1)^2 dS \quad (\text{A.14})$$

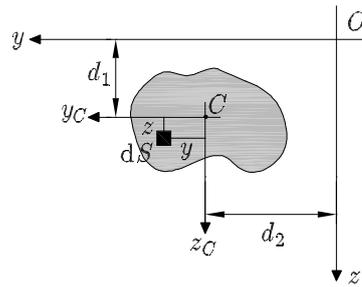


Figura A.5 Teorema de Steiner

Desarrollando la ecuación A.14, se obtiene

$$I_y = \int_S z^2 dS + 2d_1 \int_S z dS + d_1^2 \int_S dS \quad (\text{A.15})$$

El primer término del segundo miembro es el momento de inercia de la sección respecto al eje y que pasa por el centroide del área. El segundo término es el momento estático de la sección respecto al eje y_C (dicha integral es nula ya que el momento estático respecto a un eje que pasa por el centroide de la sección es nulo). El tercer término de la integral es el área S de la sección. Por lo tanto la ecuación (A.15) se puede expresar como

$$I_y = I_{yC} + S d_1^2 \quad (\text{A.16})$$

De la misma manera, el momento de inercia respecto al eje z se obtiene mediante la expresión

$$I_z = I_{zC} + S d_2^2 \quad (\text{A.17})$$

El teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos, para **momentos de inercia**, se expresa de la siguiente forma:

El momento de inercia de un área con respecto a cualquier eje en su plano es igual al momento de inercia con respecto a un eje paralelo al anterior y que pase por el centro de gravedad del área, más el producto del área y el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.

En el caso del producto de inercia, la expresión (A.14) tomaría la forma

$$I_{yz} = \int_S (z + d_1)(y + d_2) dS \quad (\text{A.18})$$

Desarrollando esta ecuación, se obtiene

$$I_{yz} = \int_S y z dS + d_1 \int_S z dS + d_2 \int_S y dS + d_1 d_2 \int_S dS \quad (\text{A.19})$$

El primer término del segundo miembro de la ecuación es el producto de inercia respecto a unos ejes que pasan por el centroide, paralelos a los de referencia. Los términos segundo y tercero son nulos, ya que corresponden a los momentos estáticos del área respecto a unos ejes que pasan por el centroide. La integral del último

término es el área de la sección. Por tanto, la ecuación (A.19) se puede expresar como

$$I_{yz} = I_{yzC} + S d_1 d_2 \quad (\text{A.20})$$

El teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos, para el **producto de inercia**, se expresa de la siguiente forma:

El producto de inercia de un área con respecto a cualquier par de ejes en su plano es igual al producto de inercia con respecto a unos ejes paralelos a los anteriores y que pasen por el centroide del área, más el producto del área y las distancias de cada uno de estos ejes que pasan por el centroide, respecto a los de referencia.

A.5 Ejes principales y momentos principales de inercia

Los momentos de inercia de un área plana dependen de la posición del origen y de la orientación de los ejes de referencia. Así, para un cierto sistema de referencia, los momentos y producto de inercia varían conforme se giran los ejes alrededor del origen, habiendo unos valores máximos y mínimos de los momentos y producto de inercia.

Se considerará como tensor de inercia \mathbf{I} , respecto a unos ejes cualesquiera

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{yC} & -I_{yzC} \\ -I_{yzC} & I_{zC} \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

en el que los elementos de la diagonal principal son los momentos de inercia respecto a los ejes de referencia considerados y los elementos fuera de la diagonal principal son los productos de inercia, cambiados de signo, respecto a los mismos ejes de referencia.

Los valores propios de este tensor serán los momentos principales de inercia, mientras que los vectores propios asociados a dichos valores propios, serán los cosenos directores de los ejes principales de inercia. Resolviendo la ecuación característica obtenida del determinante de la ecuación (A.22) se obtienen los momentos de inercia principales I_1 e I_2 .

$$\begin{vmatrix} I_{yC} - I & -I_{yzC} \\ -I_{yzC} & I_{zC} - I \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.22})$$

Para cada valor de I_i , la dirección del eje principal asociado se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (A.23) y (A.24)

$$\begin{pmatrix} I_{yC} & -I_{yzC} \\ -I_{yzC} & I_{zC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$l^2 + m^2 = 1 \quad (\text{A.24})$$

El producto de inercia referido a los ejes principales de inercia, es nulo.

Si lo que se desea es conocer las componentes del tensor de inercia para unos ejes girados un ángulo determinado respecto a los de referencia, se aplicaría la ecuación de Cauchy

$$\mathbf{I}^n = \mathbf{I}_n \quad (\text{A.25})$$

Los momentos principales de inercia también se pueden obtener gráficamente mediante el círculo de Mohr. En la Figura A.6 se representa un círculo de Mohr para un tensor de inercia determinado y los valores de los momentos de inercia principales.

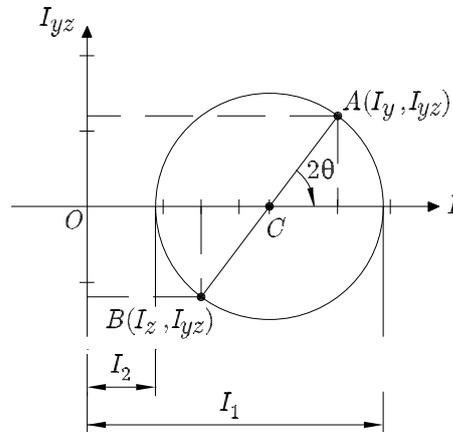


Figura A.6 Círculo de Mohr para un tensor de inercia

Observando el círculo de Mohr se pueden extraer las expresiones de los momentos de inercia principales y de la dirección de los ejes principales de inercia

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad (\text{A.26})$$

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (\text{A.27})$$

A.6 Ejemplos resueltos

Ejemplo A.1

Para la sección en Z que se muestra en la Figura A.7

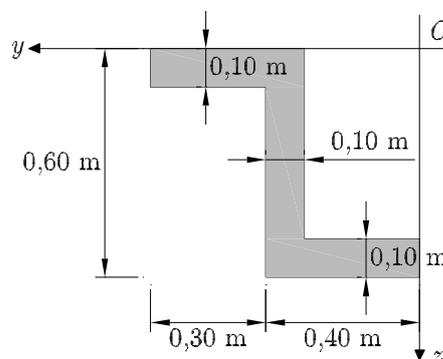


Figura A.7 Sección en Z

Obtener:

1. Las coordenadas del centroide referidas a los ejes de referencia
2. Los momentos de inercia, el producto de inercia y los radios de giro respecto a unos ejes paralelos a los de referencia, que pasen por el centroide
3. Los ejes y momentos principales de inercia

Solución:

1. Las coordenadas del centroide referidas a los ejes de referencia

La sección se puede dividir en tres trozos como se muestra en la Figura A.8

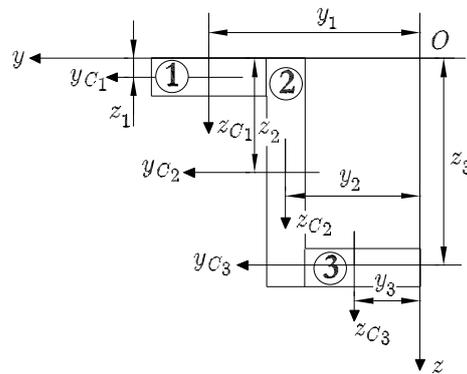


Figura A.8 Sección en Z. Descomposición en tres rectángulos

cuyas áreas parciales y total son

$$S_1 = 0,3 \times 0,1 = 0,03 \text{ m}^2$$

$$S_2 = 0,1 \times 0,6 = 0,06 \text{ m}^2$$

$$S_3 = 0,3 \times 0,1 = 0,03 \text{ m}^2$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 0,12 \text{ m}^2$$

El centroide de la sección se calcula a partir de las expresiones (A.6) y (A.7). Considerando las distancias que se muestran en la Figura A.8, las coordenadas del centroide son

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3}{S} = \frac{0,55 \times 0,03 + 0,35 \times 0,06 + 0,15 \times 0,03}{0,12}$$

$$= 0,35 \text{ m}$$

$$z_C = \frac{z_1 S_1 + z_2 S_2 + z_3 S_3}{S} = \frac{0,05 \times 0,03 + 0,3 \times 0,06 + 0,55 \times 0,03}{0,12}$$

$$= 0,30 \text{ m}$$

- Los momentos de inercia, el producto de inercia y los radios de giro respecto a unos ejes paralelos a los de referencia, que pasen por el centroide

Para calcular los momentos de inercia se utilizan las expresiones (A.8), (A.9), (A.16) y (A.17). Al comienzo, se calculan los momentos de inercia de cada trozo respecto a unos ejes paralelos a los de referencia (en este caso son los ejes que pasan por el centroide de la sección y son paralelos a los considerados inicialmente). Respecto los ejes y y z locales, los momentos de inercia son

$$\begin{aligned}
 I_{yC1} &= \frac{0,3 \times 0,1^3}{12} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 & I_{zC1} &= \frac{0,1 \times 0,3^3}{12} = 225 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \\
 I_{yC2} &= \frac{0,1 \times 0,6^3}{12} = 18 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 & I_{zC2} &= \frac{0,6 \times 0,1^3}{12} = 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \\
 I_{yC3} &= \frac{0,3 \times 0,1^3}{12} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 & I_{zC3} &= \frac{0,1 \times 0,3^3}{12} = 225 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

Aplicando Steiner se obtienen los momentos de inercia del conjunto respecto a los ejes y_C y z_C .

$$\begin{aligned}
 I_{yC} &= I_{yC1} + S_1 dz_1^2 + I_{yC2} + S_2 dz_2^2 + I_{yC3} + S_3 dz_3^2 \\
 I_{zC} &= I_{zC1} + S_1 dy_1^2 + I_{zC2} + S_2 dy_2^2 + I_{zC3} + S_3 dy_3^2
 \end{aligned}$$

Las distancias dy_i y dz_i se muestran en las Figuras A.9 a) y A.9 b), respectivamente.

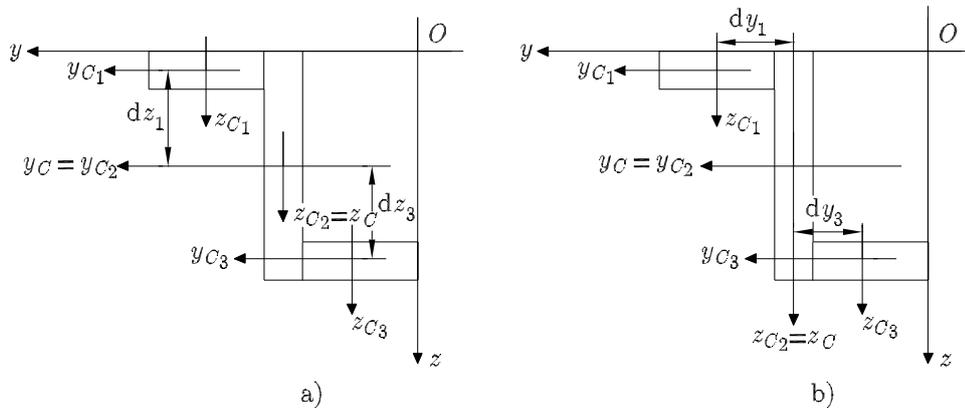


Figura A.9 Sección en Z. Distancias para el cálculo de los momentos y producto de inercia

Sustituyendo valores numéricos, se obtiene

$$\begin{aligned}
 I_{yC} &= 25 \cdot 10^{-6} + 0,03 \times (-0,25)^2 + 18 \cdot 10^{-4} + 0,06 \times 0^2 + \\
 &25 \cdot 10^{-6} + 0,03 \times 0,25^2 = 56 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

$$I_{zC} = 225 \cdot 10^{-6} + 0,03 \times 0,20^2 + 50 \cdot 10^{-6} + 0,06 \times 0^2 + \\ 225 \cdot 10^{-6} + 0,03 \times (-0,20)^2 = 29 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Para obtener el producto de inercia se utiliza la ecuación (A.20). Los productos de inercia de cada trozo respecto a unos ejes que pasen por el centro de gravedad de cada uno de ellos son nulos, precisamente por estar referidos a dichos ejes.

$$I_{yz} = S_1 dy_1 dz_1 + S_2 dy_2 dz_2 + S_3 dy_3 dz_3$$

Sustituyendo valores numéricos, se obtiene

$$I_{yz} = 0,03 \times (-0,25) \times 0,20 + 0,03 \times 0,25 \times (-0,20) = -30 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Para calcular los radios de giro se utilizan las expresiones (A.11) y (A.12). Sustituyendo los valores ya conocidos de área e inercias, se obtiene

$$i_y = \frac{\sqrt{56 \cdot 10^{-4}}}{0,12} = 0,216 \text{ m} \\ i_z = \frac{\sqrt{29 \cdot 10^{-4}}}{0,12} = 0,155 \text{ m}$$

3. Los ejes y momentos principales de inercia

El tensor de inercia es

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 56 \cdot 10^{-4} & 30 \cdot 10^{-4} \\ 30 \cdot 10^{-4} & 29 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Resolviendo el determinante

$$\begin{vmatrix} 56 \cdot 10^{-4} - I & 30 \cdot 10^{-4} \\ 30 \cdot 10^{-4} & 29 \cdot 10^{-4} - I \end{vmatrix} = 0$$

se obtiene la ecuación característica

$$I^2 - 0,0085I + 724 \cdot 10^{-8} = 0$$

cuyas raíces son los momentos principales de inercia:

$$I_1 = 75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4, \quad I_2 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Cálculo de la dirección principal correspondiente al momento principal de inercia $I = I_1$

$$\begin{pmatrix} 56 \cdot 10^{-4} - 75 \cdot 10^{-4} & 30 \cdot 10^{-4} \\ 30 \cdot 10^{-4} & 29 \cdot 10^{-4} - 75 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando la expresión anterior se obtiene el sistema lineal y homogéneo de ecuaciones, y teniendo en cuenta la condición

$$l^2 + m^2 = 1$$

se obtiene la dirección del eje principal 1

$$\mathbf{n}_1 = (\pm 0,8398 \quad \pm 0,5430)^T$$

Cálculo de la dirección principal correspondiente al momento principal de inercia $I = I_2$

$$\begin{pmatrix} 56 \cdot 10^{-4} - 10 \cdot 10^{-4} & 30 \cdot 10^{-4} \\ 30 \cdot 10^{-4} & 29 \cdot 10^{-4} - 10 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando la expresión anterior se obtiene el sistema lineal y homogéneo de ecuaciones, y teniendo en cuenta la condición

$$l^2 + m^2 = 1$$

se obtiene la dirección del eje principal 2

$$\mathbf{n}_2 = (\mp 0,5430 \quad \pm 0,8398)^T$$

En la Figura A.10 se muestran los ejes principales de inercia de la sección.

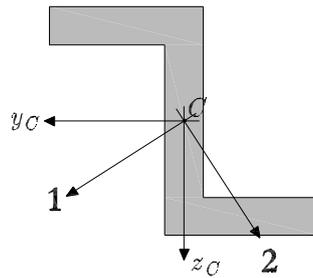


Figura A.10 Sección en Z. Ejes principales de inercia

Ejemplo A.2

Para la sección en L asimétrica que se muestra en la Figura A.11

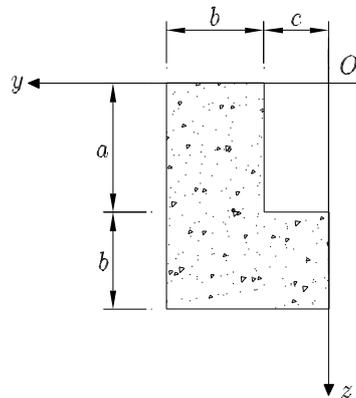


Figura A.11 Sección en L asimétrica

Obtener:

1. Las coordenadas del centroide referidas a los ejes de referencia
2. Los momentos de inercia, el producto de inercia y los radios de giro respecto a unos ejes paralelos a los de referencia, que pasen por el centroide
3. Analítica y gráficamente los ejes y momentos principales de inercia

Datos:

$$a = 400 \text{ mm} , b = 300 \text{ mm} , c = 200 \text{ mm}$$

Solución:

1. Obtener las coordenadas del centroide referidas a los ejes de referencia
La sección se puede dividir en dos trozos, como se muestra en la Figura A.12, cuyas áreas parciales y total son

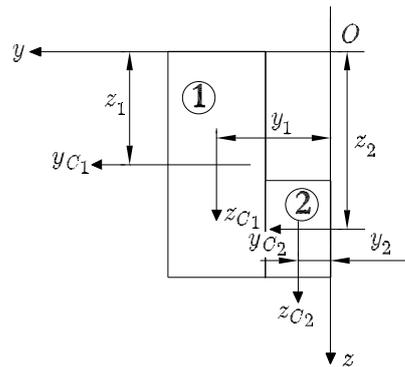


Figura A.12 Sección en L asimétrica. Descomposición en dos rectángulos

$$S_1 = 0,7 \times 0,3 = 0,21 \text{ m}^2$$

$$S_2 = 0,2 \times 0,3 = 0,06 \text{ m}^2$$

$$S = S_1 + S_2 = 0,27 \text{ m}^2$$

El centroide de la sección se calcula a partir de las expresiones (A.6) y (A.7). Considerando las distancias que se muestran en la Figura A.12, las coordenadas del centroide son

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S} = \frac{0,35 \times 0,21 + 0,1 \times 0,06}{0,27} = 0,294 \text{ m}$$

$$z_C = \frac{z_1 S_1 + z_2 S_2}{S} = \frac{0,35 \times 0,21 + 0,55 \times 0,06}{0,27} = 0,394 \text{ m}$$

2. Obtener los momentos de inercia, el producto de inercia y los radios de giro respecto a unos ejes paralelos a los de referencia, que pasen por el centroide

Para calcular los momentos de inercia se utilizan las expresiones (A.8), (A.9), (A.16) y (A.17). Al comienzo, se calculan los momentos de inercia de cada trozo respecto a unos ejes paralelos a los de referencia (en este caso son los ejes que pasan por el centroide de la sección y son paralelos a los que se consideran inicialmente). Respecto los ejes y y z locales, los momentos de inercia son

$$I_{yC1} = \frac{0,3 \times 0,7^3}{12} = 85,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \quad I_{zC1} = \frac{0,7 \times 0,3^3}{12} = 15,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{yC2} = \frac{0,2 \times 0,3^3}{12} = 45 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4 \quad I_{zC2} = \frac{0,3 \times 0,2^3}{12} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Aplicando Steiner, se obtienen los momentos de inercia del conjunto respecto a los ejes y_C y z_C .

$$I_{yC} = I_{yC1} + S_1 dz_1^2 + I_{yC2} + S_2 dz_2^2$$

$$I_{zC} = I_{zC1} + S_1 dy_1^2 + I_{zC2} + S_2 dy_2^2$$

Las distancias dy_i y dz_i se muestran en la Figura A.13).

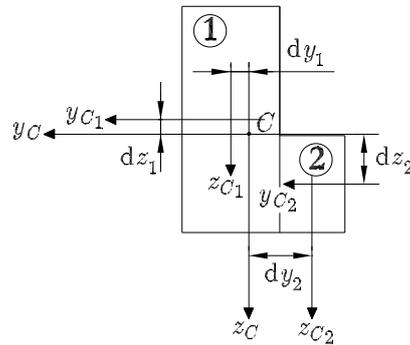


Figura A.13 Sección en L asimétrica. Distancias para el cálculo de los momentos y producto de inercia

Sustituyendo valores numéricos, se obtiene

$$\begin{aligned} I_{yC} &= 85,75 \cdot 10^{-4} + 0,21 \times (-0,044)^2 + 45 \cdot 10^{-5} + 0,06 \times 0,156^2 \\ &= 108,92 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{zC} &= 15,75 \cdot 10^{-4} + 0,21 \times 0,056^2 + 2 \cdot 10^{-4} + 0,06 \times (-0,194)^2 \\ &= 46,92 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

Para obtener el producto de inercia se utilizará la ecuación A.20. Los productos de inercia de cada trozo respecto a unos ejes que pasen por el centro de gravedad de cada uno de ellos son nulos, precisamente por estar referidos a dichos ejes.

$$I_{yz} = S_1 dy_1 dz_1 + S_2 dy_2 dz_2$$

Sustituyendo valores numéricos, se obtiene

$$\begin{aligned} I_{yz} &= 0,21 \times 0,056 \times (-0,044) + 0,06 \times (-0,194) \times 0,156 \\ &= -23,33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

Para calcular los radios de giro se utilizan las expresiones A.11 y A.12. Sustituyendo los valores ya conocidos de área e inercias, se obtiene

$$\begin{aligned} i_y &= \frac{\sqrt{108,92 \cdot 10^{-4}}}{0,27} = 0,2 \text{ m} \\ i_z &= \frac{\sqrt{46,92 \cdot 10^{-4}}}{0,27} = 0,132 \text{ m} \end{aligned}$$

3. Obtener analítica y gráficamente los ejes y momentos principales de inercia. Los ejes y momentos principales de inercia

El tensor de inercia es

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 108,92 \cdot 10^{-4} & 23,33 \cdot 10^{-4} \\ 23,33 \cdot 10^{-4} & 46,92 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Resolviendo el determinante

$$\begin{vmatrix} 108,92 \cdot 10^{-4} - I & 23,33 \cdot 10^{-4} \\ 23,33 \cdot 10^{-4} & 46,92 \cdot 10^{-4} - I \end{vmatrix} = 0$$

se obtiene la ecuación característica

$$I^2 - 0,0156I + 45,66 \cdot 10^{-6} = 0$$

cuyas raíces son los momentos principales de inercia:

$$I_1 = 116,72 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4, \quad I_2 = 39,12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Cálculo de la dirección principal correspondiente al momento principal de inercia $I = I_1$

$$\begin{pmatrix} (108,92 - 116,72) \cdot 10^{-4} & 23,33 \cdot 10^{-4} \\ 23,33 \cdot 10^{-4} & (46,92 - 116,72) \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando la expresión anterior se obtiene el sistema lineal y homogéneo de ecuaciones y teniendo en cuenta la condición

$$l^2 + m^2 = 1$$

se obtiene la dirección del eje principal 1

$$\mathbf{n}_1 = (\pm 0,9484 \quad \pm 0,3170)^T$$

Cálculo de la dirección principal correspondiente al momento principal de inercia $I = I_2$

$$\begin{pmatrix} (108,92 - 39,12) \cdot 10^{-4} & 23,33 \cdot 10^{-4} \\ 23,33 \cdot 10^{-4} & (46,92 - 39,12) \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando la expresión anterior se obtiene el sistema lineal y homogéneo de ecuaciones y teniendo en cuenta la condición

$$l^2 + m^2 = 1$$

se obtiene la dirección del eje principal 2

$$\mathbf{n}_2 = (\mp 0,3170 \quad \pm 0,9484)^T$$

En la Figura A.14 se muestran los ejes principales de inercia de la sección.

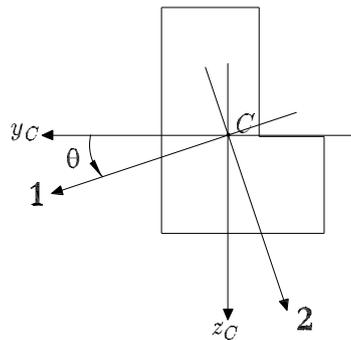


Figura A.14 Sección en L asimétrica. Ejes principales de inercia

En la Figura A.15 se muestra la solución gráfica.

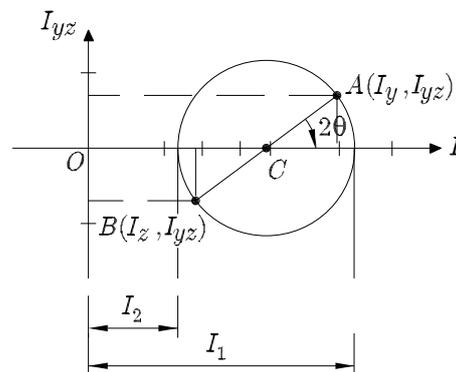


Figura A.15 Sección en L asimétrica. Momentos principales de inercia: solución gráfica