Transformées de Laplace.

Programme de Lars Fredericksen, adapté par Philippe Fortin

Le programme sur les transformées de Laplace, pour les calculatrices TI-*n*spire, est disponible ici : ETS_specfunc.tns

Il a été écrit initialement par Lars Fredericksen, ltf@post8.tele.dk, pour la TI-92; il a été adapté pour la TI-*n*spire par Philippe Fortin, du Lycée Louis Barthou, à Pau.

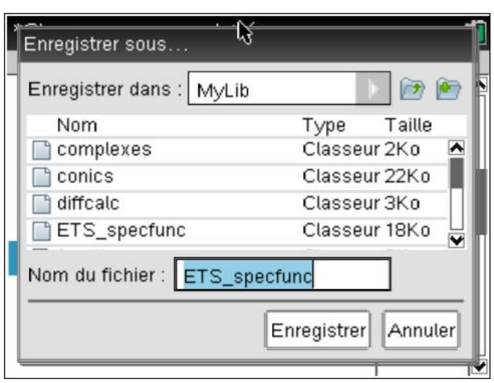
Ce fichier doit être placé dans le dossier Mylib de la calculatrice, et dans le dossier utilisé pour les bibliothèques de programmes sur l'ordinateur.

Ce programme contient des fonctions qui servent à résoudre des équations différentielles et des systèmes d'équations différentielles, à coefficients constants. Il n'y a pas de limite à l'ordre des équations différentielles. Les fonctions du programme peuvent aussi résoudre la plupart des équations intégrales, et la plupart des équations intégro-différentielles. La méthode utilisée est la transformée de Laplace.

Ce programme sert aussi (surtout) à calculer des transformées de Laplace et des transformées inverses.

Raccourci librairie

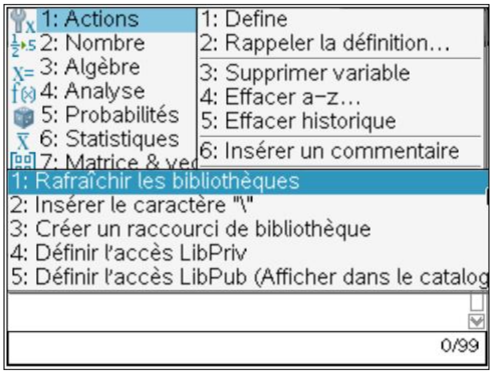
Il faut installer ETS_specfunc.tns sur notre calculatrice, ou sur notre logiciel, dans MyLib. menu-3 : Enregistrer sous...

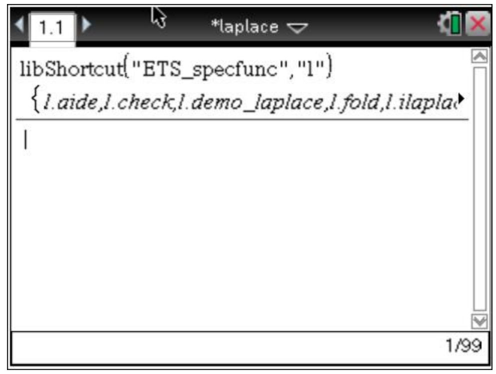


On pourra alors utiliser les fonctions de ce programme dans un autre classeur.

On peut toujours passer par [📖]-[6], choisir « ETS_specfunc » puis descendre jusqu'à la fonction voulue; on voit alors dans la ligne d'édition ETS_specfunc\notre fonction.

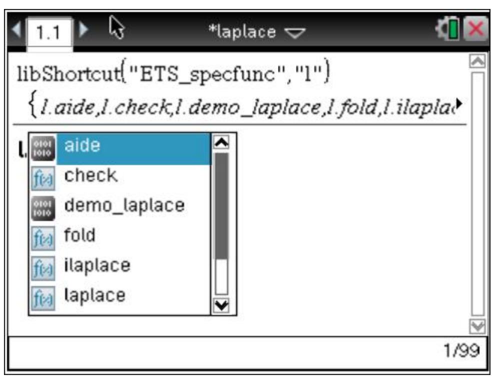
Puisqu'on utilisera vraisemblablement ce programme assez régulièrement, on peut utiliser un raccourci. Pour ce faire, ouvrez le classeur dans lequel vous voulez travailler. [menu]-[1]-[7]-[1] pour rafraîchir les bibliothèques. Ensuite [menu]-[1]-[7]-[3] pour créer un raccourci de bibliothèque.





On complète l'instruction en indiquant le nom de la bibliothèque, ETS_specfunc, et celui du raccourci souhaité; ici on a donné « L », pour Laplace.

À l'avenir, pour avoir accès à toutes les fonctions qui sont présentées plus bas, il nous suffira d'écrire « l. »; en écrivant le point il y a un menu déroulant qui apparaît, avec toutes les fonctions disponibles. Il faut bien sûr travailler <u>dans le classeur et dans l'activité</u> où on a créé ce raccourci.



Pour toutes explications sur les bibliothèques et les raccourcis, consultez le texte « Bibliothèques de programmes », TI-Nspire_chap17_capes.pdf , qui vient du site www.univers-ti-nspire.fr.

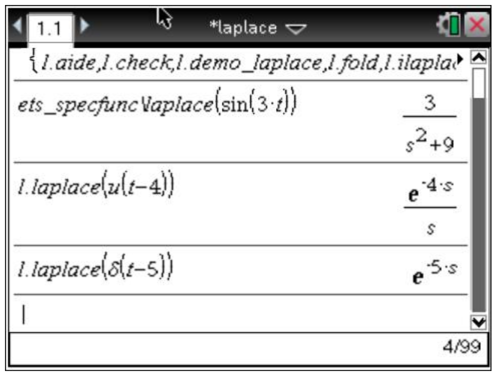
Aide

On peut avoir une brève présentation du programme en entrant « aide( ) ».

Et on peut avoir une démonstration de l'utilisation des fonctions en tapant « demo_laplace( ) ». Ou bien, en passant par le catalogue [📖]-[6], la syntaxe est donnée pour chaque fonction; pour l'utilisation du catalogue, le texte à lire est TI-Nspire_chap17_capes.pdf : « Bibliothèques de programmes », qui vient du très beau site www.univers-ti-nspire.fr.

Laplace

On obtient la transformée de Laplace d'une fonction en t en demandant Laplace(notre fonction). C'est important que la variable indépendante utilisée soit t; on n'a pas le choix. L'expression de notre fonction peut contenir des constantes, quelles qu'elles soient, sauf s qui est utilisée dans les calculs.



On appelle la fonction en passant par « ETS_specfunc\ » ou bien par le raccourci qu'on vient de créer « l. ».

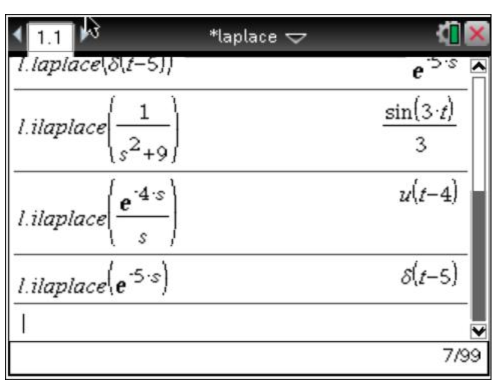
Fonctions spéciales :

La fonction échelon-unité (Heaviside) : $\text{laplace}\left(u\left(t-a\right)\right)=\dfrac{e^{-as}}{s}$.

La fonction Delta de Dirac : $\text{laplace}\left(\delta\left(t-a\right)\right)=e^{-as}$.

iLaplace

Pour obtenir la transformée inverse d'une fonction en s; la syntaxe est iLaplace(notre fonction). Ici encore, on n'a pas le choix pour le nom de la variable, c'est s qu'on doit utiliser.



SolveD

Pour résoudre des équations différentielles et même des équations intégro-différentielles.

Le principe est que le programme transformera l'équation dans le domaine de Laplace, deuxièmement il résoudra l'équation linéaire obtenue, et finalement il retransformera la solution dans le domaine du temps.

En principe, SolveD peut résoudre des équations intégro-différentielles de n'importe quel ordre. La limite est imposée par la mémoire de la calculatrice. Si l'équation est vraiment complexe, la calculatrice peut donner un message « Out of memory ».

La syntaxe est SolveD(équation, {fonction, conditions initiales}).

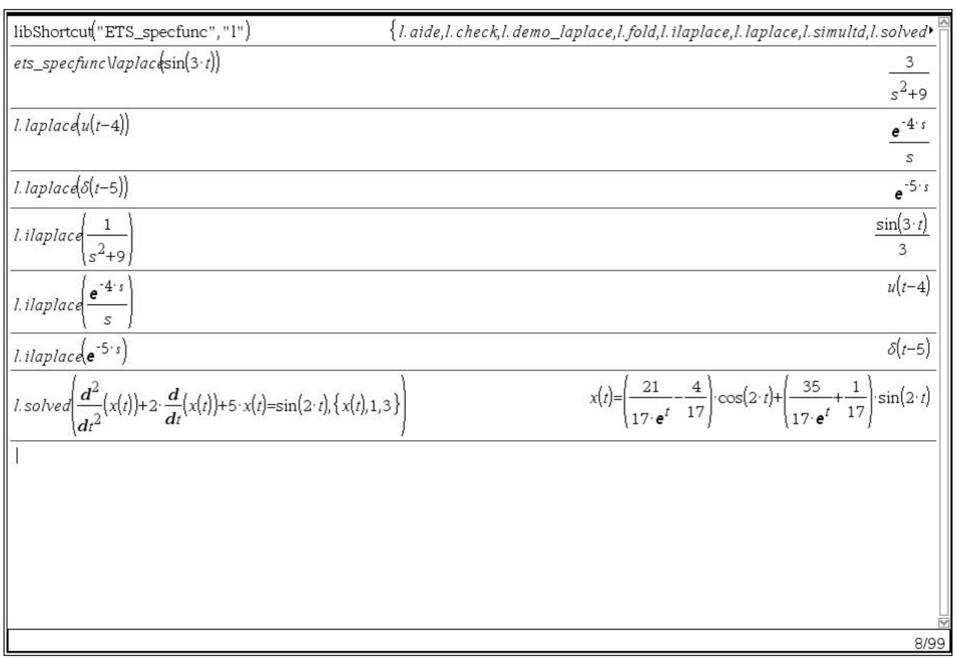
L'équation peut être une équation différentielle, une équation intégrale ou intégro-différentielle.

Les dérivées sont données en utilisant l'opérateur « dérivée » et les intégrales sont données avec l'opérateur « intégrale ».

La fonction est la fonction $f(x)$ pour laquelle on cherche une solution. Il faut toujours écrire f avec sa variable : $f(x)$ ou $f(t)$, etc.

Les conditions initiales sont dans l'ordre $f(0), f'(0), f''(0), \ldots$

<u>Exemple 1</u> : Soit à résoudre l'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = \sin(2t)$, avec les conditions initiales $x(0) = 1$ et $x'(0) = 3$.



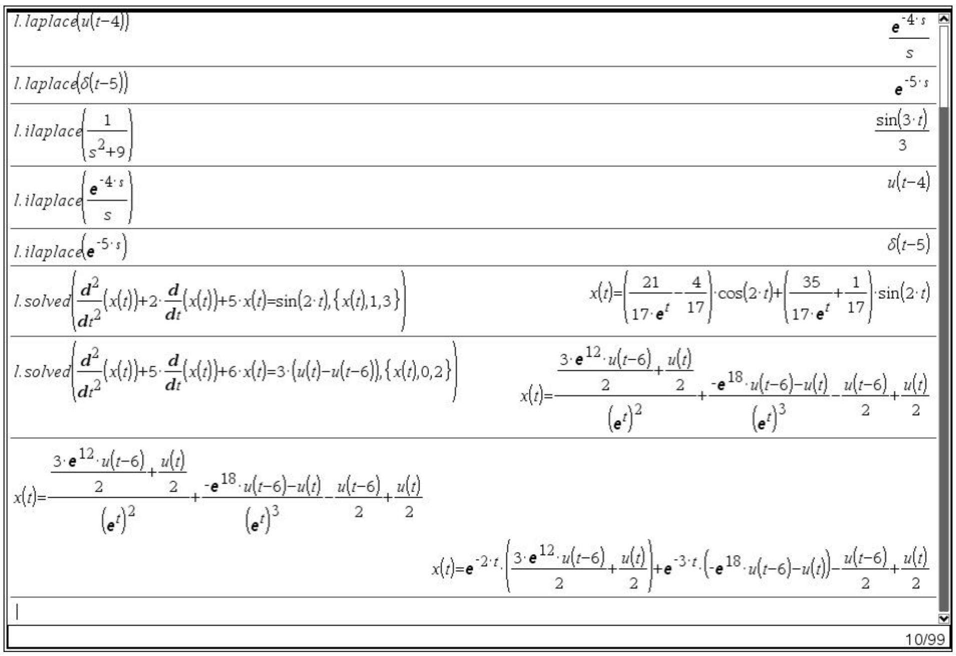
Remarquez qu'on n'écrit pas x mais bien $x(t)$; il faut toujours indiquer que x est une fonction et qu'elle dépend de t.

Exemple 2 : Obtenons la solution de $\dfrac{d^2x}{dt^2}+5\dfrac{dx}{dt}+6x=f(t)$.

La fonction $f(t)=\begin{cases}3 & \text{si } 0\le t<6\\ 0 & \text{si t} \ge 6\end{cases}$ et les conditions initiales sont $x(0)=0$ et $x'(0)=2$.

Il faut d'abord traduire $f(t)=3\big(u(t)-u(t-6)\big)$, puis on utilise la syntaxe pour la calculatrice :

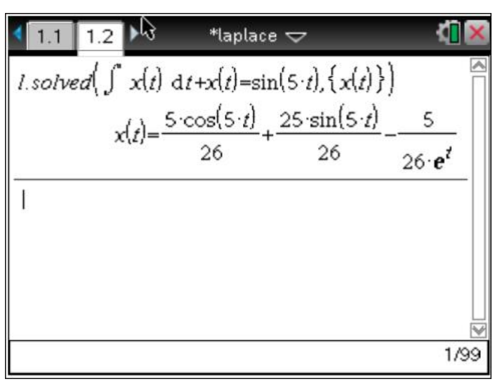
$$\text{SolveD}\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}+5\frac{dx(t)}{dt}+6x(t)=3\big(u(t)-u(t-6)\big),\{x(t),0,2\}\right)$$



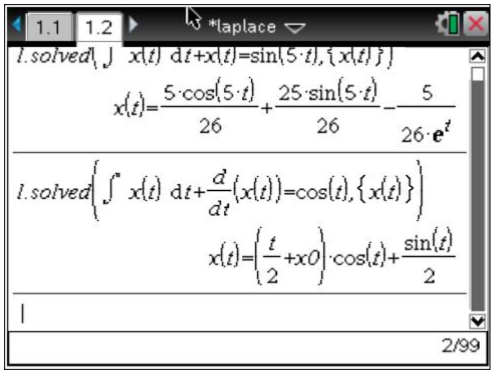
C'est bien de ramener la réponse dans la ligne d'édition, ▲-enter, pour obtenir une forme plus concise avec les exponentielles au numérateur, mais on peut aussi regrouper les échelons :

$$x(t)=\left(\frac{13}{25}-\frac{3t}{5}-\frac{13e^{-5t}}{25}\right)\cdot u(t)+\left(\frac{93}{25}-\frac{3t}{5}-\frac{3e^{-5t+30}}{25}\right)\cdot u(t-6)$$

Exemple 3 : Résolvons l'équation intégrale $\int x\,dt+x=\sin(5t)$.



Exemple 4 : Une équation intégro-différentielle : $\int x\,dt + \dfrac{dx}{dt} = \cos(t)$, sans condition initiale.



$x(t) = \dfrac{t}{2}\cos(t) + x_0\cos(t) + \dfrac{1}{2}\sin(t)$, où x_0 est la condition initiale inconnue.

SimultD

Pour résoudre un système d'équations intégro-différentielles. Comme pour SolveD, le programme prend la transformée de Laplace de chaque équation, résout le système d'équations linéaires et calcule la transformée inverse de ce qui a été obtenu.

Deux règles doivent être respectées. Premièrement, il doit y avoir le même nombre d'équations que d'inconnues (fonctions inconnues). Deuxièmement, les fonctions inconnues doivent dépendre d'une seule variable, la même pour toutes les fonctions.

Les fonctions et les conditions initiales peuvent contenir des constantes quelconques, mais la lettre « *s* » ne peut jamais être utilisée.

Les fonctions de Heaviside (échelon-unité) et de Dirac (delta) peuvent être utilisées dans les équations.

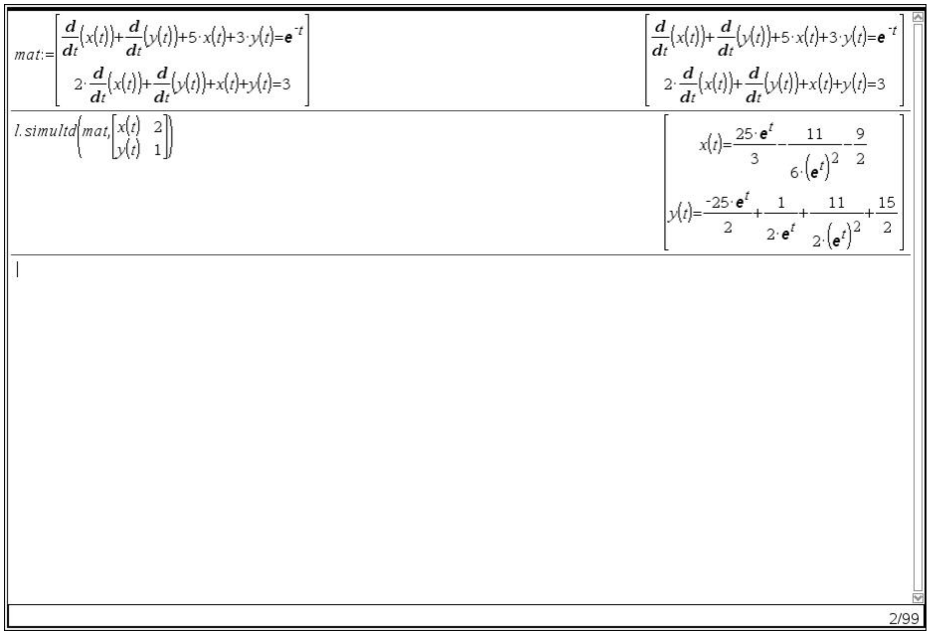
La syntaxe est SimultD([équation;équation;...],[f1(var),f1(0),f1'(0),...;f2(var),f2(0),f2'(0),...;...])

Les équations sont données avec les opérateurs dérivée et intégrale.

f1(var),f1(0),f1'(0),...;f2(var),... sont les fonctions et leurs conditions initiales, séparées par des « ; ».

Exemple 1 : Soit le système d'équations différentielles suivant :

$\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 5x + 3y = e^{-t}$ et $2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + x + y = 3$, avec les conditions initiales $x(0) = 2,\ y(0) = 1$.

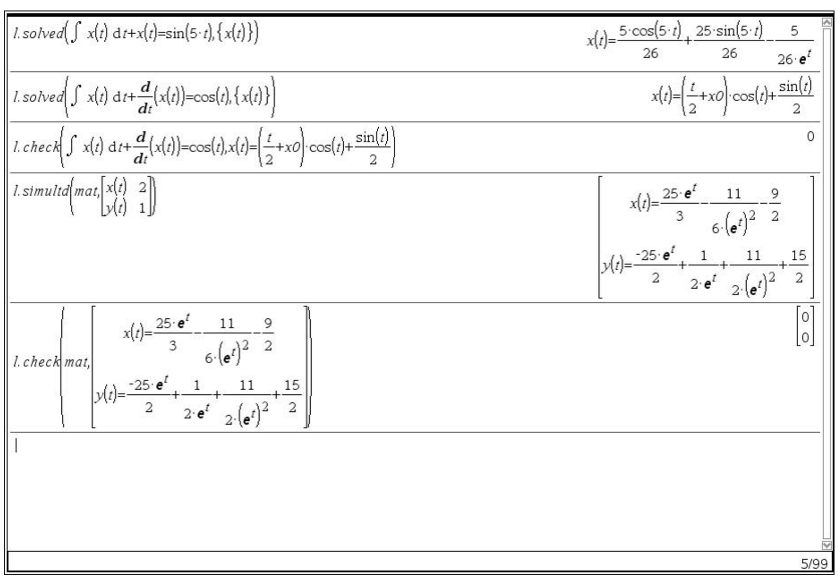


Le résultat obtenu est $x(t)=\frac{25}{3}e^{t}-\frac{11}{6}e^{-2t}-\frac{9}{2}$, $y(t)=\frac{15}{2}+\frac{11}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{25}{2}e^{t}$.

Check

Cette fonction a été construite pour vérifier la justesse des résultats obtenus par SolveD et SimultD.

Il y a certains cas où ces fonctions donnent des faux résultats; c'est donc une bonne idée de toujours vérifier les réponses obtenues.



La syntaxe est Check(équation, solution obtenue par SolveD). On écrit l'équation de la même façon que pour la commande SolveD. Dans le cas d'un système, la syntaxe est semblable :

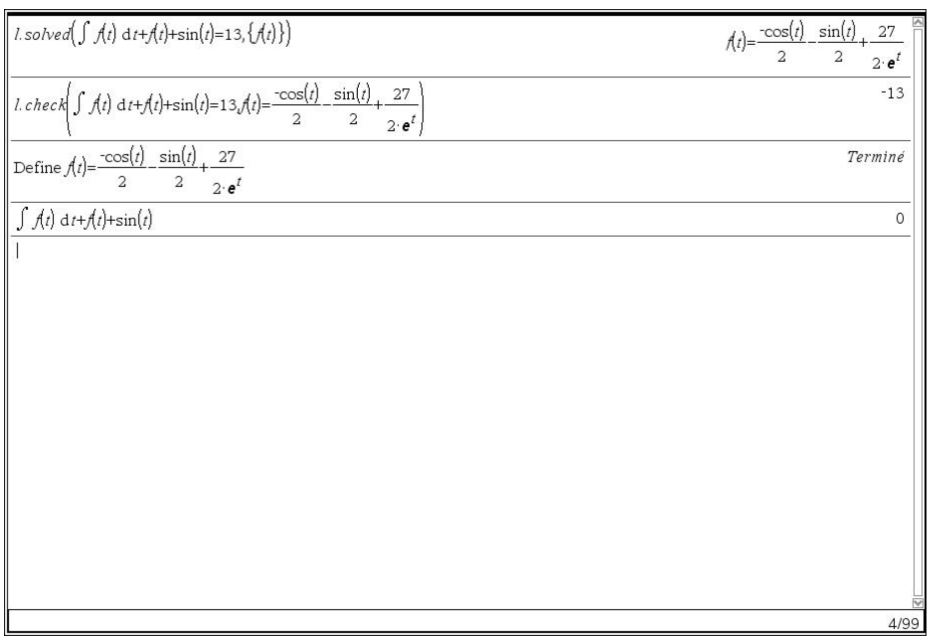
Check(système d’équations dans une matrice, solution obtenue par SimultD). Remarquez qu’on ne donne pas les conditions initiales.

La réponse doit être 0 (zéro); sinon, la solution est probablement fausse. Résolvez à la main!

Attention! Quand on résout un système d’équations contenant des intégrales, il y a quelques situations où la transformée de Laplace donne une mauvaise réponse.

1. Si la solution de SolveD ou SimultD contient des fonctions de Dirac, cela peut indiquer que quelque chose ne tourne pas rond. C’est alors sage d’utiliser la fonction Check pour vérifier si la solution est bonne. Si Check donne un résultat différent de zéro, alors la solution peut être fausse. Dans la plupart des cas, il suffit d’enlever les fonctions de Dirac, et la bonne solution est le reste de la réponse.
2. Quand l’équation contient des constantes, comme $\int f(t)\,dt + f(t) + \sin(t) = const$, alors la transformée de Laplace donnera la solution à $\int f(t)\,dt + f(t) + \sin(t) = 0$.

   Ici, on fait résoudre cette équation intégrale; on vérifie avec « check » et on obtient la valeur -13, qui indique que la réponse n’est pas bonne. En effet, si on enregistre la solution proposée dans $f(t)$, et qu’on remplace dans l’équation intégrale, ça donne 0, et non 13 comme on voulait.



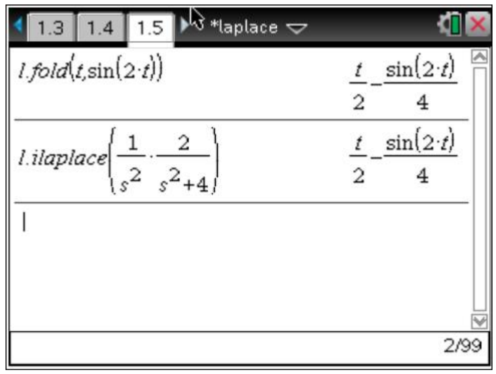
Fold

C’est la convolution de deux fonctions.

La syntaxe à employer est $\text{Fold}(f(t), g(t))$.

Cette fonction utilise le fait que si $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions d'ordre exponentiel, continues par morceaux sur $[0;\infty[$ et possèdent les transformées de Laplace $F(s)$ et $G(s)$ respectivement, alors la transformée inverse de $F(s)\cdot G(s)$ est $f(t)*g(t)$.

Exemple : Soit $F(s)=\dfrac{1}{s^2}$ et $G(s)=\dfrac{2}{s^2+4}$, de sorte que $f(t)=t$ et $g(t)=\sin(2t)$. On cherche la transformée inverse de $F(s)\cdot G(s)=\dfrac{1}{s^2}\cdot\dfrac{2}{s^2+4}$.



On peut vérifier cette solution avec iLaplace. On a bel et bien la même réponse.

Chantal Trottier