Känguru der Mathematik 2001
LÖSUNGEN

GRUPPE JUNIOR

1) Wir werfen drei Spielwürfel und addieren die gefallenen Augenzahlen. Wie viele verschiedene Werte kann die Summe annehmen?
(A) 18 (B) 17 (C) 16 (D) 15 (E) 14

Antwort: **C**
Die kleinste mögliche Augensumme beträgt 3, die größte 18. Weil alle Werte dazwischen auch auftreten können, gibt es für die Summe 16 Möglichkeiten.

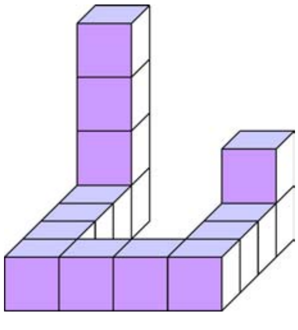
2) Die Schüler A, B, C; D, E und F stehen in einer Reihe. Wir wissen: 1) D steht zwischen E und F, 2) C zwischen D und E, 3) B zwischen C und D und 4) A zwischen Bund C. Welche der folgenden Aussagen ist sicher richtig?
(A) A ist der Dritte von links oder rechts.
(B) A ist der Zweite von links oder rechts.
(C) A steht an einem Ende (links oder rechts) der Reihe.
(D) Eine solche Anordnung ist nicht möglich.
(E) Die Anordnung ist möglich, aber die Position von A ist nicht eindeutig.

Antwort: **A**
Die erste Angabe liefert für D, E und F die Reihenfolge E-D-F, die zweite zusätzlich für C die Reihenfolge E-C-D-F. B steht zwischen C und D, das liefert die Reihenfolge E-C-B-D-F. Nach “Einordnen” von A ergibt sich schließlich die Reihenfolge E-C-A-B-D-F. Daher ist A der Dritte von rechts oder links.

3) Die Diagonale d eines Vielecks mit dem Umfang 31cm teilt das Vieleck in zwei Vielecke mit den Umfängen 21cm bzw. 30cm. Die Länge von d ist dann
(A) 5cm (B) 10cm (C) 15cm (D) 20cm (E) nicht feststellbar

Antwort: **B**
Bei den Umfängen der Teilvielecke ist jeweils neben den Umfangsstücken, die auch zum Umfang des großen Vielecks gehören, die Diagonale der Länge d mitgerechnet. Daher ist die Summe der Umfänge der Teilvielecke (21cm+30cm=51cm) um 2d größer als der Umfang des ganzen Vielecks (31cm), d ist also 10cm lang.

4) Das abgebildete Objekt ist aus Einheitswürfeln zusammengeklebt. Es sollen weitere Einheitswürfel so hinzugefügt werden, dass ein großer Würfel ohne Lücken entsteht. Wie viele Einheitswürfel müssen mindestens ergänzt werden? (Die bestehenden Würfel dürfen nicht verändert werden.)
(A) 49 (B) 60 (C) 65
(D) 110 (E) 125



Antwort: **D**

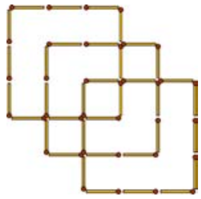
Das abgebildete Objekt besteht aus 15 Würfeln und hat als größte Ausdehnung (nach hinten) 5 Längeneinheiten. Daher ist der kleinste mögliche Würfel, der durch Hinzufügen von Einheistwürfeln gebildet werden kann, ein 5×5×5-Würfel. Weil der aus 125 Einheitswürfeln besteht, müssen 110 Würfel ergänzt werden.

5) Es sei m eine positive ganze Zahl mit ggT(m, 35) > 10. Welche der folgenden Aussagen muss unbedingt wahr sein?
(A) m hat mindestens drei Ziffern.
(B) m ist ein Vielfaches von 35.
(C) m ist durch 15 teilbar.
(D) m ist durch 25 teilbar.
(E) m ist entweder durch 5 oder durch 7 teilbar, nicht aber durch beide.

Antwort: ***B***

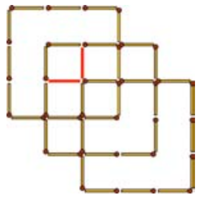
Es muss ggT(m, 35) ein Teiler von 35 sein. Der einzige Teiler von 35, der größer als 10 ist, ist aber 35 selbst, also gilt ggT(m, 35), und m ist ein Vielfaches von 35.

6) Was ist die kleinste Zahl von Zündhölzern, die man noch dazulegen muss, damit es im Bild genau 11 Quadrate gibt?



(A) 2 (B) 3 (C) 4
(D) 5 (E) 6

Antwort: ***A***



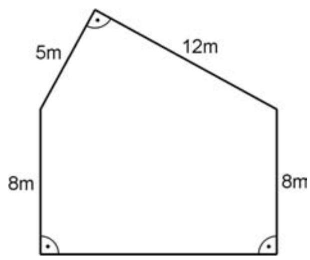
In der gegebenen Abbildung finden sich 3 Quadrate mit Seitenlänge 3, 2 mit Seitenlänge 2 und 3 mit Seitenlänge 1. Legt man die 2 rot eingezeichneten Zündhölzer, dann ergeben sich drei weitere Quadrate mit Seitenlänge 1.

7) Wie viele Primzahlen kleiner als 2001 haben die Ziffernsumme 2?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) mehr als 4

Antwort: **C**

Die Zahlen kleiner als 2001 mit Ziffernsumme 2 sind die Zahlen 2, 11, 20, 101, 110, 200, 1001, 1010, 1100 und 2000. Von den geraden Zahlen ist nur 2 ein Primzahl, von den 3 ungeraden Zahlen sind 11 und 101 Primzahlen, $1001 = 11 \cdot 91$ nicht. Daher gibt es 3 Primzahlen mit den geforderten Eigenschaften.

8) Die Länge der Umzäunung des abgebildeten Grundstücks beträgt



(A) 38m (B) 41m (C) 46m
(D) 50m (E) 59m

Antwort: **C**

Das Grundstück setzt sich aus einem Rechteck und einem rechtwinkeligen Dreieck zusammen. Die Länge des Rechtecks ist die Hypotenusenlänge des Dreiecks, also (in Meter) $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Daher ist die Länge der Umzäunung 46m.

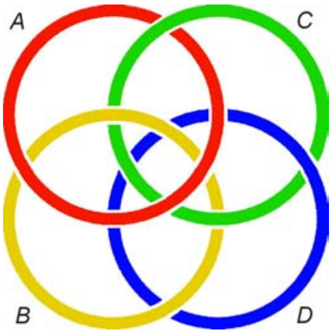
9) Wie viele Ziffern hat die kleinste durch 225 teilbare Zahl, die man im Zehnersystem nur mit den Ziffern 0 und 1 schreiben kann?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

Antwort: **B**

225 = 9·25, daher muss die gesuchte Zahl durch 9 und durch 25 teilbar sein. Damit sie durch 9 teilbar ist, muss ihre Ziffernsumme 9 (oder ein Vielfaches davon) sein, die Zahl der Ziffern “1” ist also mindestens 9. Damit die durch 25 teilbar ist muss sie auf …00 enden. Die kleinste solche Zahl ist 11111111100 (11Ziffern).

10) Welchen dieser Ringe muss man durchschneiden, um alle auseinander zu nehmen?



(A) A (B) B (C) C (D) D

(E) Es geht nicht.

Antwort: **C**

Ring C geht durch A, durch B und durch D.

A, B und D sind nicht „verflochten“.

11) a, b, c und d sind positive ganze Zahlen mit a + b = cd und a + b + c = 12. Wie viele verschiedene Werte sind für d möglich?

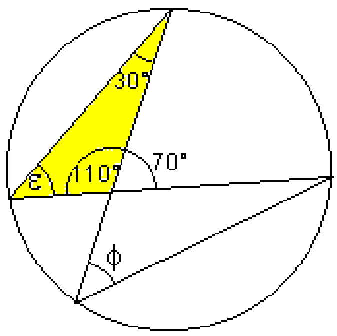
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Antwort: ***D***

Lösung 1: Zunächst erhalten wir cd + c = 12 bzw. c(d + 1) = 12. Weil a, b, c und d positive ganze Zahlen sein sollen, so kann c nicht größer als 10 sein, und d + 1 muss mindestens 2 sein. Damit liefert 12 = 1·12 = 2·6 = 3·4 = 4·3 = 6·2 = 12·1 insgesamt 5 Lösungen für d. (Nur c = 12, d + 1 = 1 liefert keine!)

Lösung 2: Wegen d ≥ 1 muss aufgrund der ersten Gleichung a + b ≥ c gelten. Wegen der zweiten Gleichung kommen für c daher nurmehr die Werte 1 bis 6 in Frage. Eine Überprüfung zeigt, dass es nur bei c = 5 keinen zugehörigen ganzzahligen Wert für d gibt. Daher sind für d fünf Werte möglich.

12) Wie groß ist der Winkel φ in der Abbildung?



(A) 30° (B) 35° (C) 40°

(D) 45° (E) 50°

Antwort: ***C***

Nach Peripheriewinkelsatz ist φ gleich groß wie der mit ε beschriftete Winkel. Die anderen beiden Winkel im gefärbten Dreieck haben 30° beziehungsweise 110°, daher ist φ = 40° (Winkelsumme im Dreieck!)

13) Eine Uhr geht in Y Stunden X Minuten nach. Wie viele Stunden geht sie in einer Woche nach?

(A) $\frac{2X}{5Y}$ (B) $\frac{5Y}{2X}$ (C) $\frac{14X}{5Y}$ (D) $\frac{5Y}{14X}$ (E) $\frac{168X}{Y}$

Antwort:* *C

In 1 Stunde geht die Uhr $\frac{X}{Y}$ Minuten nach, in den 168 Stunden einer Woche also $\frac{168X}{Y}$ Minuten = $\frac{168X}{60Y}$ Stunden = $\frac{14X}{5Y}$ Stunden.

14) Kaspar hat 400 Eek und möchte damit 100 Sticker zu je 4 Eek kaufen. An der Kasse stellt er fest, dass er für je 6 Sticker einen gratis dazu bekommt. Wie viele Eek bleiben ihm nach dem Einkauf übrig?

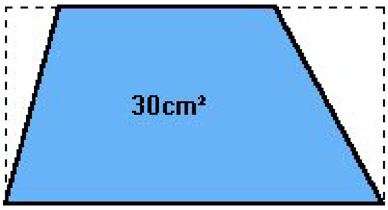
(A) 52 (B) 56 (C) 60 (D) 64 (E) 68

Antwort:* *B

Lösung 1: Die Angabe bedeutet, dass er 7 Sticker zum Preis von 6 bekommt. Für 14·7 = 98 Sticker zahlt er also den Preis von 14·6 = 84 Sticker, das sind 4·84 = 336 Eek. Für die restlichen 2 Sticker zahlt er zusammen 8 Eek, also zahlt er insgesamt 344 Eek, und es bleiben ihm 56 Eek nach dem Einkauf übrig.

Lösung 2: Bei jeweils 7 Sticker spart er sich an der Kassa die Bezahlung von einem. Wegen 100 : 7 = 14 (Rest 2) muss er insgesamt 14 Sticker nicht bezahlen, erspart sich also 56 Eek, die ihm nach dem Einkauf noch bleiben.

15) Von einem Rechteck werden zwei Dreiecke abgeschnitten (siehe Abbildung). Das verbleibenden Trapez hat eine Fläche von 30cm², und eine Parallelseite dieses Trapezes ist doppelt so lang wie die andere. Wie groß ist die Summe der Flächeninhalte der beiden abgeschnittenen Dreiecke?



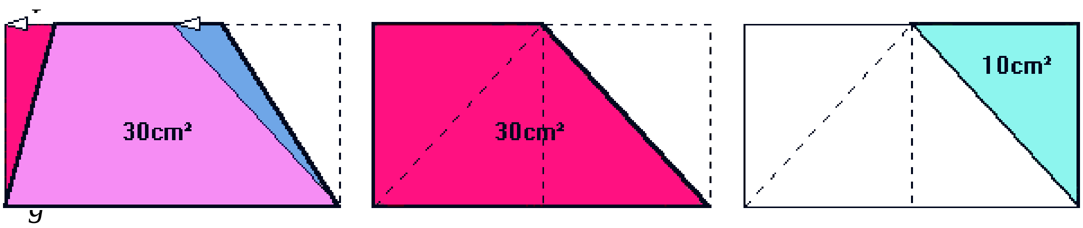
(A) 10cm² (B) 12cm² (C) 15cm² (D) 18cm² (E) 20cm²

Antwort:* *A

Lösung 1: Wenn die kürzere Parallelseite halb so lang ist wie die längere (Länge a), dann bedeutet das, dass von der ursprünglichen Rechtecksseite mit den beiden Dreiecken die Hälfte weggeschnitten wurde. Die Länge der dazu normalen Katheten in den beiden weggeschnittenen Dreiecken entspricht der Breite b des Rechtecks, daher ist die Summe der Flächeninhalte der abgeschnittenen Dreieck gleich

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot b = \frac{ab}{4} = \frac{1}{4}\cdot A_{\text{Rechteck}}\,.$$

Die restlichen drei Viertel der Fläche des Rechtecks sind die Fläche des Trapezes, als 30cm². Die Summe der Flächeninhalte der beiden Dreiecke ist daher 10cm².



2: “Ohne Worte”

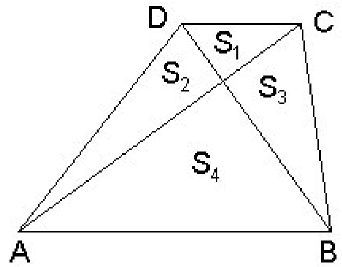
16) Wenn das Kamel Desirée Durst hat, besteht sein Körper zu 84% aus Wasser. Wenn es trinkt, steigt sein Gewicht auf 800kg, und dann besteht sein Körper aus 85% Wasser. Wie viel wiegt Desirée, wenn sie Durst hat?
(A) 672kg (B) 680kg (C) 715kg (D) 720kg (E)750kg

Antwort:* *E
Wenn Desirée trinkt, besteht ihr Körper zu 15% nicht aus Wasser. 15% von 800kg sind 120kg, und diese 120kg "Trockensubstanz" sind 16% von Desirées Gewicht, wenn sie durstig ist. Daher wiegt Desirée, wenn sie durstig ist, $\frac{120\cdot 100}{16} = 750\,\text{kg}$.

17) Das Produkt der Alter meiner Kinder ist 1664. Mein Jüngster ist halb so alt wie mein Ältester. Wie viele Kinder habe ich?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

***Antwort:* B**
Zunächst macht man eine Primfaktorenzerlegung von 1664:
$1664 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$.
Der Älteste muss sicher älter als 13 Jahre sein, da er doppelt so alt wie der Jüngste ist und „13“ nicht durch 2 teilbar ist. „13“ kommt in der Zerlegung nur einmal vor, also ist auch mein Jüngster nicht 13. Daher sind das Alter meines Ältesten und meines Jüngsten Potenzen von 2. Da in der Zerlegung die „2“ sieben mal vorkommt, gilt:
Ältester: $2^4 = 16$; Jüngster: $2^3 = 8$.
Damit gibt es drei Kinder im Alter von 8, 13 und 16 Jahren.

18) Das Trapez ABCD wird durch seine beiden Diagonalen wie abgebildet in Dreiecke mit den Flächen S_1, S_2, S_3 und S_4 geteilt. Es gilt $S_2 = 3\cdot S_1$. Dann gilt auch
(A) $S_4 = 3S_1$ (B) $S_4 = 4S_1$ (C) $S_4 = 6S_1$
(D) $S_4 = 9S_1$ (E) $S_4 = 12S_1$



Antwort:* *D
Wir bezeichnen den Diagonalenschnittpunkt des Trapezes mit S. Die Dreiecke ASD (Fläche S_2) und SCD (Fläche S_1) haben die Höhe des Punktes D über der gegenüberliegenden Seite (AS bzw. SC) gemeinsam. Wenn nun $S_2 = 3\cdot S_1$ gilt, so bedeutet das, dass $AS = 3\cdot SC$. Daher ist für die bezüglich S zentrisch ähnlichen Dreieck ABS und CDS das Verhältnis entsprechender Seitenlängen gleich 3 : 1, das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke also 9 : 1, d.h. $S_4 = 9S_1$.

19) Im Ausdruck $2{*}4{*}6{*}8{*}10{*}12{*}14$ kann jeder Stern entweder durch ein "+" oder durch ein "-" ersetzt werden. Welche der folgenden Zahlen kann man nicht als Ergebnis eines solchen Ausdrucks erhalten?
(A) 0 (B) 4 (C) –4 (D) 48 (E) 30

Antwort:* *E
Lösung 1: Es ist

$$2+4-6+8-10-12+14 = 0$$
$$2-4+6+8-10-12+14 = 4$$
$$2+4+6-8-10-12+14 = -4$$
$$2-4+6+8+10+12+14 = 48$$

Daher kommt nur 30 als Lösung in Frage.

Lösung 2: Dass 30 wirklich nicht durch einen derartigen Ausdruck darstellbar ist, kann man auf folgende Art begründen: Werden alle Sterne durch “+” ersetzt, so erhält man als Ergebnis 56, eine durch 4 teilbare Zahl. Ersetzt man nun “+” durch “-“ (oder umgekehrt), so ändert sich der Wert des Ausdrucks jedes Mal um das doppelte jener geraden Zahl, vor der das geänderte Rechenzeichen steht, also jedes Mal um eine durch 4 teilbare Zahl. Daher kann man durch Verändern der Rechenzeichen immer nur durch 4 teilbare Zahlen erhalten, nie aber 30.

20) Bei der Division 999 : n durch eine zweistellige Zahl n bleibt der Rest 3. Welcher Rest bleibt bei der Division 2001 : n?
(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

Antwort: E

Lösung 1: Erhält man bei der Division 999 : n durch eine zweistellige Zahl n den Rest 3, so läst die Division 1998 : n den Rest 6 und folglich die Division 2001 : n den Rest 9.

Lösung 2: 999 : n liefert genau dann den Rest 3, wenn n ein Teiler von 996 ist. Die Primfaktorenzerlegung von 996 ist $996 = 2^2 \cdot 3 \cdot 83$. Die einzigen zweistelligen Teiler von 996 sind 12 und 83. Es lässt sich leicht überprüfen, dass sowohl die Division 2001 : 12 als auch die Division 2001 : 83 den Rest 9 liefert.

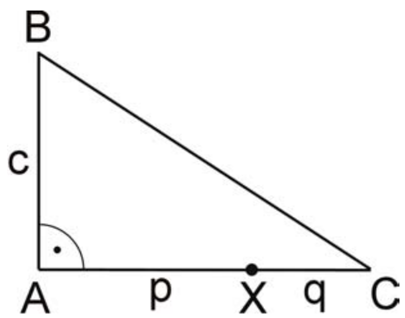
21) Christa und Paul erhalten gemeinsam eine Bonbonniere mit 31 Bonbons. Am ersten Tag isst Christa 3/4 so viele Bonbons wie Paul. Am zweiten Tag ist Christa 2/3 so viele wie Paul, dann ist die Schachtel leer. Wie viele von den 31 Bonbons isst Christa?
(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) 15

Antwort: D

Lösung 1: Der Anteil von Christa an den am ersten Tag verdrückten Bonbons beträgt 3/7, ihr Anteil an den am zweiten Tag weggenaschten Bonbons 2/5. Es ist 2/5 kleiner als 3/7, also isst Christa von allen Bonbons mehr als 2/5, aber weniger als 3/7, also mehr als 62/5 Bonbons und weniger als 93/7 Bonbons. Die einzige ganze Zahl zwischen $\frac{62}{5} = 12\frac{2}{5}$ und $\frac{93}{7} = 13\frac{2}{7}$ ist 13. Daher isst Christa 13 Bonbons.

Lösung 2: Am ersten Tag verhalten sich die Anteile von Christa und Paul wie 3 : 4, am zweiten Tag wie 2 : 3. Die beiden naschen am ersten Tag also gemeinsam 7x Bonbons weg, am zweiten Tag 5y Bonbons. Davon verdrückt Christa am ersten Tag 3x, am zweiten Tag 2y Bonbons. Weil die Bonbonniere danach leer ist, erhalten wir $7x + 5y = 31$. Die einzige Lösung dieser Gleichung in natürlichen Zahlen ist $x = 3$, $y = 2$. Daher isst Christa $3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13$ Bonbons.

22) Ein Feld hat die Gestalt eines rechtwinkeligen Dreeicks ABC mit AX = p und XC = q. Romana und Eva gehen gleichzeitig von X in entgegengesetzten Richtungen mit der selben Geschwindigkeit los. Sie treffen sich wieder in B. Wie groß ist q?



(A) $\frac{pc}{2p+c}$ (B) $\frac{p}{2}+c$ (C) $\sqrt{p^2+c^2}+\frac{c}{2}$
(D) $\frac{p+c}{2}$ (E) $c-p$

Antwort: A

Wenn die beiden auf ihrem Weg um das Feld gleich schnell gehen, dann legen sie Weg derselben Länge zurück. Eine geht einen Weg der Länge $XA + AB = p + c$, die andere einen Weg der Länge $XC + CB = q + \sqrt{(p+q)^2 + c^2}$. Das liefert die Gleichung

$$p + c = q + \sqrt{(p+q)^2 + c^2}$$
$$(p + c - q)^2 = (p+q)^2 + c^2$$
$$p^2 + q^2 + c^2 - 2pq + 2pc - 2qc = p^2 + q^2 + c^2 + 2pq$$
$$2pc = 4pq + 2qc$$
$$q = \frac{pc}{2p + c}$$

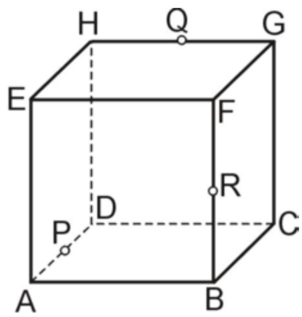
23) In einigen von 11 großen Schachteln befinden sich je 8 mittlere Schachteln, und in einigen von diesen befinden sich wiederum je 8 kleine Schachteln, die leer sind. Es sind insgesamt 102 Schachteln leer. Wie viele Schachteln gibt es im Ganzen?
(A) 102 (B) 64 (C) 118 (D) 115 (E) es kann nicht festgestellt werden

Antwort: **D**
Es sei x die Anzahl der vollen großen Schachteln und y die Anzahl der vollen mittleren. Dann gilt: $11 - x$ .... Anzahl der großen leeren Schachteln, $8x - y$ .....Anzahl der mittleren leeren und $8y$ ..... Anzahl der kleinen leeren Schachteln.
Deshalb gilt $11 - x + 8x - y + 8y = 102 \Rightarrow 7x + 7y = 91$.
Daraus folgt nach Division durch 7: $x + y = 13$.
Die Summe der vollen Schachteln ist also 13. Damit ist die Gesamtzahl der Schachteln 102 + 13 = 115.

24) Es sei $a = 1997^{1998} + 1998^{1999} + 1999^{2000} + 2000^{2001}$. Die letzte Ziffer von a ist
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 0

Antwort: A
2000^{2001} endet wie 2000 auf 0, jede gerade Potenz von einer auf 9 endenden Zahl und somit auch 1999^{2000} endet auf 1.
Endet eine ganze Zahl n auf 8, so endet n^2 (wie 8^2) auf 4, n^3 auf 2, n^4 auf 6 und n^5 wieder auf 8. Die Einerziffern 8, 4, 2 und 6 wiederholen sich in weiterer Folge mit Periodenlänge 4, also endet n^{1999} wie n^3 auf 2. Daher ist die Einerziffer von 1998^{1999} gleich 2. Analog enden die Potenzen einer auf 7 endenden ganzen Zahl, beginnend mit n^1, der Reihe nach auf 7, 9, 3, 1 (Periodenlänge 4). Daher ist die letzte Ziffer von 1997^{1998} dieselbe wie die von 7^2, also gleich 9.
Daraus folgt, dass die letzte Ziffer von a die Einerziffer von 9 + 2 + 1 + 0 = 12, also 2 ist.

25) ABCDEFGH ist ein Würfel mit Kantenlänge 2cm. P, Q und R sind die Mittelpunkte von AD, GH und BF. Wie groß ist die Fläche des Dreiecks PQR?

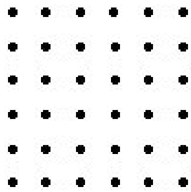


(A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$ (B) $3\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$
(D) $2\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ (E) $\frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{cm}^2$

Antwort: A
Nach Satz von Pythagoras ist die Länge jeder Seite des Dreiecks PQR (in cm) gleich $\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$, also ist das Dreieck PQR gleichseitig. Weil der

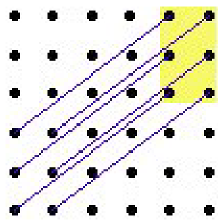
Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a gegeben ist durch $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, gilt für Flächeninhalt A des Dreiecks PQR (in cm²) $A = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

26) In der Zeichnung ist der Abstand zwischen je zwei waagrecht oder senkrecht benachbarten Punkten 1cm. Es werden zwei Punkte durch eine genau 5cm lange Strecke verbunden. Wie viele derartige Strecken können im Gitter gezeichnet werden?



(A) 10 (B) 12 (C) 24 (D) 34 (E) 36

Antwort:* *E



Man kann 6 waagrechte und 6 senkrechte Strecken der Länge 5 zeichnen. Darüber hinaus ist 5 aber auch Hypotenusenlänge in einem rechtwinkligen Dreieck mit Kathetenlängen 3 und 4. Daher gibt es auch noch 5cm lange Strecken mit Steigung ±3/4 oder ±4/3, die zwei Gitterpunkte verbinden. Als rechte obere Endpunkte von Strecken mit Steigung +3/4 kommen die markierten sechs Punkte in der rechten oberen Ecke des Gitters in Frage, also gibt es 6 derartige Strecken. Entsprechend gibt es auch jeweils 6 Strecken mit den drei anderen möglichen Steigungen. Daher können im Gitter 36 derartige Strecken gezeichnet werden.

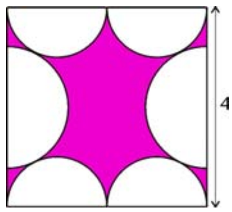
27) Streicht man die letzte Ziffer einer Zahl, erhält man ein Vierzehntel der Zahl. Wie viele positive ganze Zahlen gibt es mit dieser Eigenschaft?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Antwort:* *C

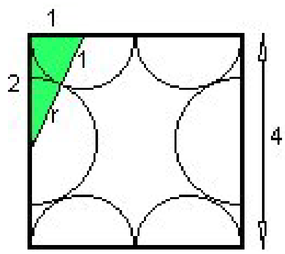
Es ist klar, dass die gesuchten Zahlen mindestens zweistellig sein müssen. Bezeich-nen wir die Zahl, die man nach Streichen der letzten Ziffer erhält, mit x und die letzte Ziffer mit y, dann ist die ursprüngliche Zahl gleich 10x + y, und nach Angabe gilt die Gleichung 10x + y = 14x bzw. y = 4x mit x ≠ 0. y muss eine einstellige natürliche Zahl sein, also gibt es zwei Möglichkeiten: x = 1, y = 4 und x = 2, y = 8; die Zahlen 14 und 28 sind die einzigen mit der geforderten Eigenschaft.

28) Es sei A die Fläche des Quadrats und B die Gesamtfläche der sechs Halbkreise. Dann ist A – B gleich



(A) 8 (B) $16-3\pi$ (C) $16-4\pi$
(D) $16-8\pi+2\sqrt{5}\cdot\pi$ (E) $16-4\pi+\sqrt{5}\cdot\pi$

Antwort:* *D



Lösung 1: Der Radius jedes der vier kleineren Halbkreise ist 1, daher ist die Summe ihrer Flächeninhalte gleich 2π. Der Radius der beiden größeren Halbkreise ergibt sich nach Satz von Pythagoras aus der Gleichung

$$(r+1)^2 = 1^2 + 2^2$$

$$r^2 + 2r - 4 = 0$$

$$r = -1 \pm \sqrt{1+4} = -1 \pm \sqrt{5}$$

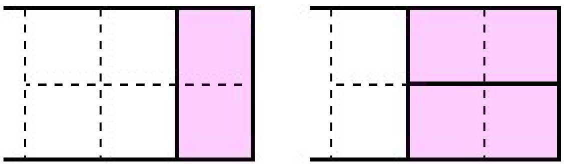
Weil r positiv sein muß, erhalten wir $r = \sqrt{5} - 1$. Daher ist die Summe der Flächeninhalte der beiden größeren Halbkreise gleich $(\sqrt{5} - 1)^2 \pi = 6\pi - 2\sqrt{5} \cdot \pi$. Daraus folgt $A - B = 16 - 2\pi - (6\pi - 2\sqrt{5} \cdot \pi) = 16 - 8\pi + 2\sqrt{5} \cdot \pi$

Lösung 2: Der Radius r der beiden größeren Halbkreise kann auch unter Berücksichtigung der Tatsache bestimmt werden, dass die Hypotenusenlänge im rot gefärbten rechtwinkeligen Dreieck gleich $\sqrt{5}$ ist. Um zu r zu kommen, muss man davon den Radius des kleineren Halbkreises, also 1, abziehen, d.h. $r = \sqrt{5} - 1$.

29) Auf wie viele Arten kann man ein 2×8-Rechteck vollständig ohne Überlappungen mit 1×2-Dominos überdecken?

(A) 16 (B) 21 (C) 30 (D) 32 (E) 34

Antwort: E



Wir betrachten den rechten Rand des 2×8-Rechtecks: Entweder er besteht aus einem Domino, das “senkrecht” an ein 2×7-Rechteck angefügt wird, oder aus zwei Dominos, die “waagrecht” an ein 2×6-Rechteck angefügt werden. Daher ist die Anzahl A(8) der möglichen Überdeckungen des 2×8-Rechtecks gleich der Summe der Anzahlen A(7) und A(6) der Überdeckungen des 2×7-Rechtecks beziehungsweise des 2×6-Rechtecks. Analog gilt

A(7) = A(6) + A(5), A(6) = A(5) + A(4), …. A(3) = A(2) + A(1).

Wegen A(1) = 1 - ein 2×1-Rechteck kann nur durch einen “senkrechten” Dominostein verdeckt werden – und A(2) = 2 – das 2×2-Rechteck lässt sich entweder durch zwei senkrechte oder durch zwei waagrechte Dominosteine verdecken - erhalten wir

A(3) = 3, A(4) = 5, A(5) = 8, A(6) = 13, A(7) = 21, A(8) = 34.

30) Auf wie viele Arten kann man die Zahl 30 als Summe von drei positiven ganzen Zahlen darstellen? Zwei Arten zählen als gleich, wenn sie sich nur in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden,

(A) 75 (B) 81 (C) 101 (D) 105 (E) 362

Antwort: A

Lösung 1: Ist der kleinste Summand 1, so ist die Summe der beiden größeren Summanden 29. Die Zahl 29 lässt sich auf 14 Arten als Summe zweier positiver Zahlen darstellen: 29 = 1+28 = 2+27 = … = 14+15.

Ist der kleinste Summand 2, so gibt es 13 Darstellungsmöglichkeiten für die Summe 28 der restlichen beiden Zahlen: 28 = 2+26 = 3+25 = … = 14+14.

Mit 3 als kleinstem Summanden ergeben sich 11 Möglichkeiten: Für die Summe der beiden anderen Summanden gilt 27 = 3+24 = 4+23 = … = 13+14.

Entprechend kann für 4, 5, 6, 7, 8 und 9 als kleinsten Summanden die Anzahl der Darstellungsmöglichkeiten bestimmt werde, bis sich letztlich mit 10 als kleinstem Summanden nur mehr eine Möglichkeit (30 = 10+10+10) ergibt. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten, 30 als Summe positiver ganzer Zahlen darzustellen, ist

14+13+11+10+8+7+5+4+2+1 = 75.

Lösung 2: Wir stellen uns 30 als Summe von dreißig Summanden “1” dargestellt vor. Um zu einer Darstellung von dreißig als Summe dreier positiver ganzzahliger

Summanden zu kommen, fixieren wir 2 der 29 “+”-Zeichen in dieser Summe, die durch die restlichen 27 “+”-Zeichen angeschriebenen Additionen führen wir aus, um die drei Summanden zu bilden. Dafür gibt es

$$\binom{29}{2} = \frac{29 \cdot 28}{2} = 406 \text{ Möglichkeiten.}$$

Dabei sind aber Summendarstellungen mit gleichen Summanden, aber unterschiedlicher Reihenfolge mehrfach gezählt.

1 Summendarstellung ist nur einmal gezählt: 30 = 10+10+10.

Unter den restlichen 405 Möglichkeiten gibt es **13**, die dreifach gezählt sind:

1+1+28 = 1+28+1 = 28+1+1
2+2+26 = 2+26+2 = 26+2+2
…
14+14+2 = 14+2+14 = 2+14+14

(In dieser Liste kommt 10+10+10 nicht vor). Damit bleiben noch 405-3·13 = 366 Darstellungsmöglichkeiten mit 3 verschiedenen Summanden. Jede dieser Darstellungen ist jedoch 6-fach gezählt (6 = 3!). Daher liefern die 366 Möglichkeiten nur 366/6 = **61** wesentlich verschiedene Darstellungen.

Die Anzahl der Möglichleiten, 30 als Summe positiver ganzer Zahlen darzustellen, ist also **1+13+61 = 75**.