

Känguru der Mathematik 2003

Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)



Lösungen

3 Punkte Beispiele

1) Thomas hat 9 Hundert-Euro-Scheine, 9 Zehn-Euro-Scheine und 10 Ein-Euro-Münzen. Wie viel Euro hat er?

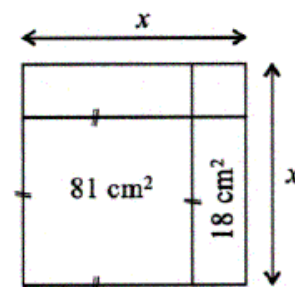
- A) 1000 B) 991 C) 9910 D) 9901 E) 99010

Antwort: A

$$9 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 10 \cdot 1 = 900 + 90 + 10 = 1000$$

2) Welche Länge hat x in der nebenstehenden Figur?

- A) 9 cm B) 2 cm C) 7 cm D) 11 cm E) 10 cm



Antwort: D

Die rechte untere Figur ist ein Quadrat. Sein Flächeninhalt beträgt 81 cm^2 , seine Seitenlänge demnach 9 cm. Daher hat das rechts daneben liegende Rechteck die "Höhe" 9 cm; weil sein Flächeninhalt 18 cm^2 beträgt, ist es 2 cm breit. Daraus folgt $x = 9 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 11 \text{ cm}$.

3) Bettina addiert gerne die Ziffern in der Anzeige ihrer Digitaluhr. Um 21:17 Uhr erhält sie zum Beispiel 11. Was ist die größte Zahl, die Bettina auf diese Art errechnen kann?

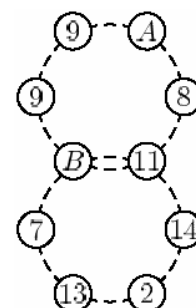
- A) 24 B) 36 C) 19 D) 25 E) Eine andere Zahl.

Antwort: A

Die größte Zahl kann Bettina um 19:59 Uhr berechnen: $1 + 9 + 5 + 9 = 24$.

4) Die Summe der 6 Zahlen ist in jedem Ring 55. Wie groß ist A ?

- A) 9 B) 10 C) 13 D) 16 E) 17



Antwort: B

Lösung 1: Für den unteren Ring wissen wir:

$$B + 11 + 14 + 2 + 13 + 7 = 55$$

Daraus folgt $B = 55 - (11 + 14 + 2 + 13 + 7) = 55 - 47 = 8$.

Für den oberen Ring erhalten wir dann

$$A + 8 + 11 + 8 + 9 + 9 = 55$$

$$A = 55 - 45 = 10.$$

Lösung 2: Die Zahlen B und 11 kommen in beiden Ringen vor; wenn also die Summe der sechs Zahlen in jedem der Ringe gleich sein soll (in unserem Fall 55), dann muss auch die Summe der jeweils 4 restlichen Zahlen übereinstimmen, das heißt

$$A + 8 + 9 + 9 = 7 + 13 + 2 + 14$$

$$A = (7 + 13 + 2 + 14) - (8 + 9 + 9) = 36 - 26 = 10$$

5) In unserem Garten gibt es ein kreisförmiges Blumenbeet mit 1,2 m Durchmesser. Im Park nebenan gibt es auch ein kreisförmiges Blumenbeet. Sein Flächeninhalt ist viermal so groß wie der des Beets in unserem Garten. Wie groß ist sein Durchmesser?

- A) 2,4 m B) 3,6 m C) 4,8 m D) 6,4 m E) 9,6 m

Antwort: A

Wegen $A = r^2\pi$ verhalten sich die Flächeninhalte zweier Kreise wie die Quadrate ihrer Radien, also auch wie die Quadrate ihrer Durchmesser. Ist der Flächeninhalt des Beets im Park viermal so groß wie der des Beets im Garten, dann ist sein Durchmesser doppelt so groß, also $2 \cdot 1,2\text{m} = 2,4\text{m}$.

6) Welche der folgenden Zahlen ist für jede ganze Zahl n ungerade?

- A) $2003n$ B) $n^2 + 2003$ C) n^3 D) $n + 2004$ E) $2n^2 + 2003$

Antwort: E

Für jede ganze Zahl ist $2n^2$ als Vielfaches von 2 gerade. Addiert man dazu die ungerade Zahl 2003, so ist die Summe $2n^2 + 2003$ in jedem Fall eine ungerade Zahl. ($2003n$, n^3 und $n+2004$ sind nur für ungerade n ungerade, $n^2 + 2003$ nur für gerade n .)

7) Im Dreieck ABC ist der Winkel in C dreimal so groß wie der in A. Der Winkel in B ist doppelt so groß wie der in A. Dann ist das Dreieck ABC

- A) gleichseitig B) gleichschenkelig C) stumpfwinkelig
D) rechtwinkelig E) spitzwinkelig

Antwort: D

Es gilt $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 3\alpha$ und daher $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + 2\alpha + 3\alpha = 6\alpha = 180^\circ$. Daraus folgt $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 2\alpha = 60^\circ$ und $\gamma = 3\alpha = 90^\circ$. Das Dreieck ABC ist also rechtwinkelig.

8) Drei Sänger singen einen Kanon, der aus drei gleich langen Notenzeilen besteht. Jeder Sänger singt viermal die drei Zeilen. Der zweite Sänger beginnt zu singen, wenn der erste Sänger mit der zweiten Zeile beginnt, der dritte Sänger beginnt, wenn der erste Sänger die dritte Zeile beginnt. Welchen Bruchteil der Gesamtauführungszeit des Kanons singen alle drei Sänger gemeinsam?

- A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{7}{11}$

Antwort: D

Wenn der dritte Sänger einsetzt, hat der erste Sänger schon zwei Zeilen gesungen. Danach singt der dritte Sänger noch $4 \cdot 3 = 12$ Notenzeilen. Daher werden insgesamt 14 Notenzeilen gesungen. Während er ersten zwei Zeilen singt der dritte Sänger noch nicht, wenn der dritte Sänger noch die letzten zwei Zeilen zu singen hat, ist der erste Sänger schon fertig. Daher singen bei 4 der 14 Zeilen nicht alle Sänger, aber $10/14 = 5/7$ der Aufführungszeit singen alle drei gemeinsam.

9) Die Zahl $A = 11111\dots1111$ wird aus 2003 Ziffern "1" gebildet. Was ist die Ziffernsumme des Produkts $2003 \cdot A$?

- A) 10000 B) 10015 C) 10020 D) 10030 E) 2003×2003

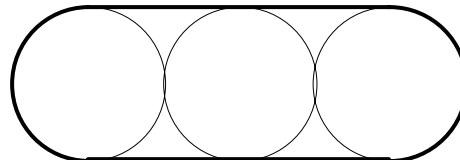
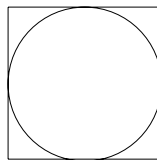
Antwort: B

An den vordersten drei Stellen des Produkts $2003 \cdot A$ steht die Ziffer 2, danach kommt 2000-mal die Ziffer 5 ($= 2 + 3$); an den letzten drei Stellen steht die Ziffer 3. Daher ist die Ziffernsumme von $2003 \cdot A$ gleich

$$3 \cdot 2 + 2000 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 10015.$$

$$\begin{array}{r} 11111\dots1111 \cdot 2003 \\ 22222\dots2222 \\ \underline{33\dots3333333} \\ 22255\dots5555333 \end{array}$$

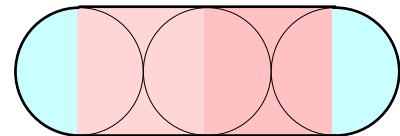
10) Die Fläche des abgebildeten Quadrats ist a und die Fläche jedes der Kreise ist b . Wie groß ist die Fläche, die von der dicken Linie eingeschlossen wird?



- A) $3b$ B) $2a+b$ C) $a+2b$ D) $3a$ E) $a+b$

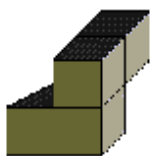
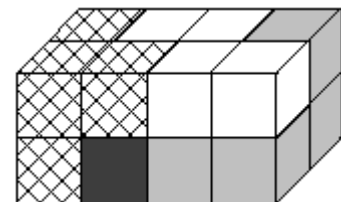
Antwort: B

Die von der dicken Linie eingeschlossene Fläche lässt sich in zwei Halbkreise und zwei Quadrate zerlegen (sh. Abbildung). Daher ist ihr Flächeninhalt $2a+b$.

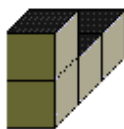


4 Punkte Beispiele

11) Unter Verwendung von 4 Bauelementen, die aus je 4 kleinen Würfeln zusammengesetzt sind, wird ein Quader gebaut (siehe Bild). Von drei der Bauelemente sind alle Teilwürfel teilweise sichtbar. Zu welchem Bauelement gehört die dunkle Fläche?



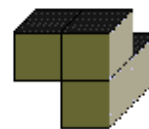
A)



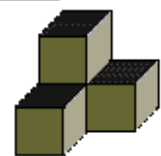
B)



C)

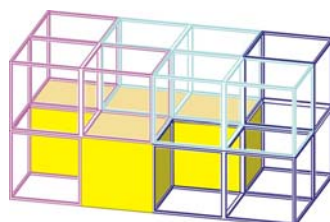


D)



E)

Antwort: C



12) Ein Känguru springt zu einem Stück Grasland hin und zurück in 15 Minuten. Seine Geschwindigkeit auf dem Hinweg ist 5 m/s, auf dem Rückweg 4 m/s. Die Entfernung zum Grasland ist

- A) 4,05 km B) 8,1 km C) 9 km D) 2 km E) nicht bestimmbar

Antwort: D

Bezeichnet s die Weglänge (in m), t die Zeit (in s) und v die Geschwindigkeit (in m/s), so gilt (wegen $v = s/t$)

$$t = \frac{s}{v}$$

Berücksichtigt man die unterschiedlichen Geschwindigkeiten hin (5m/s) und zurück (4m/s), so ergibt sich mit der Gesamtzeit von 15min = 900s die Gleichung

$$\frac{s}{5} + \frac{s}{4} = 900, \quad \frac{9s}{20} = 900, \quad s = 2000$$

Die Entfernung zum Grasland beträgt also 2km.

13) Wenn ein Fass zu 30% leer ist, enthält es um 30 Liter mehr, als wenn es zu 30% gefüllt ist. Wie viel Liter sind im Fass, wenn es voll ist?

- A) 60 B) 75 C) 90 D) 100 E) 120

Antwort: B

Ist das Fass zu 30% leer, so ist es zu 70% voll, daher entsprechen die 30 Liter 40% des Fassinhalts; im vollen Fass sind 75 Liter.

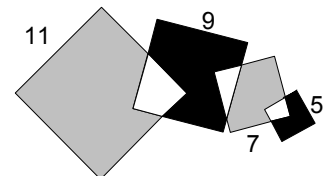
14) Barbara bildet zuerst die größte durch 8 teilbare dreistellige Zahl, die man ausgehend von 888 durch Ändern zweier Ziffern erreichen kann, und dann die kleinste durch 8 teilbare dreistellige Zahl, die man ausgehend von 888 durch Ändern zweier Ziffern erhalten kann. Was ist die Differenz dieser beiden Zahlen?

- A) 800 B) 840 C) 856 D) 864 E) 904

Antwort: C

Um die Zahl möglichst groß zu machen, muss Barbara die Hunderterziffer auf 9 ändern. Weil sie nun nurmehr eine Ziffer ändern darf, muss sie eine durch 8 teilbare Zahl der Form $9*8$ oder $98*$ bilden. 998 ist nicht durch 8 teilbar, die größte erreichbare Zahl ist 984. Um eine möglichst kleine durch 8 teilbare 3-stellige Zahl zu erhalten, muss sie als Hunderterziffer 1 verwenden, die gesuchte Zahl hat also die Form $1*8$ oder $18*$. Die kleinste derartige Zahl ist 128. Daher erhält sie als Differenz $984 - 128 = 856$.

15) Vier Quadrate mit Seitenlängen 11cm, 9cm, 7cm und 5cm überlappen einander teilweise. Um wie viel cm^2 ist die Summe der beiden grauen Flächenstücke größer als die Summe der beiden schwarzen Flächenstücke?



- A) 0 B) 25 C) 36 D) 49 E) 64

Antwort: E

Die gesuchte Differenz bleibt gleich, wenn man sowohl zu den schwarzen als auch zu den grauen Flächenstücken die weißen Flächenstücke dazufügt, sie ist daher (in cm^2)

$$11^2 + 7^2 - (9^2 + 5^2) = 121 + 49 - 81 - 25 = 64$$

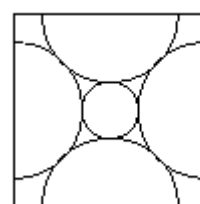
16) Der Wert des Produkts $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2003}\right)$ ist

- A) 2004 B) 2003 C) 2002 D) 1001 E) 1002

Antwort: E

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2003}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2004}{2003} = \frac{2004}{2} = 1002$$

17) Die Abbildung zeigt vier Halbkreise mit Radius 1, deren Mittelpunkte in den Seitenmittelpunkten eines Quadrats liegen. Wie groß ist der Radius des kleinen Kreises, der alle vier Halbkreise berührt?



- A) $\sqrt{2} - 1$ B) $\frac{\pi}{2} - 1$ C) $\sqrt{3} - 1$ D) $\sqrt{5} - 2$ E) $\sqrt{7} - 2$

Antwort: A

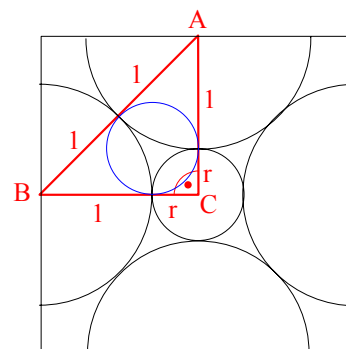
Das Dreieck $\triangle ABC$ ist gleichschenkelig-rechtwinklig mit Hypotenusenlänge 2, die Kathetenlänge ist $r + 1$. Daraus folgt

$$2(r+1)^2 = 2^2$$

$$(r+1)^2 = 2$$

$$r+1 = \sqrt{2}$$

$$r = \sqrt{2} - 1$$



(Anmerkung: Es lässt sich zeigen, dass die Punkte auf den Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$, in denen sich die Kreise berühren, zugleich jene Punkte sind, in denen der Inkreis des Dreiecks $\triangle ABC$ die Seiten berührt. Daraus folgt, dass der Radius des kleinen Kreises gleich dem Inkreisradius r des Dreiecks $\triangle ABC$ ist. Nun gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks $A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot U$. Wegen $U = 2 + 2\sqrt{2}$, $A = 1$ ($\triangle ABC$ ist "ein Viertel" eines Quadrats mit Seitenlänge 2) erhalten wir

$$r = \frac{2A}{U} = \frac{2}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1.$$

18) Wir betrachten alle vierstelligen Zahlen, die sich aus den Ziffern der Zahl 2003 bilden lassen. Die Summe all dieser Zahlen ist

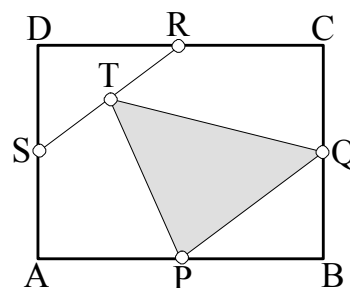
- A) 5005 B) 5555 C) 16665 D) 1110 E) 15555

Antwort: E

Lösung 1: Es gibt 6 derartige Zahlen, 3 davon haben die Tausenderziffer 2, drei die Tausenderziffer 3; bei den ersten drei Zahlen kommt 3 einmal als Hunderter-, einmal als Zehner- und einmal als Einerziffer vor, bei den restlichen Zahlen 2. Daher ist die Summe aller dieser Zahlen $3 \cdot (2000 + 3000) + 333 + 222 = 15555$.

Lösung 2: Die gesuchte Summe ist $2003 + 2030 + 2300 + 3002 + 3020 + 3200 = 15555$.

19) Im Rechteck ABCD sind P, Q, R und S die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD beziehungsweise AD. T ist der Mittelpunkt der Strecke RS. Welchen Bruchteil der Fläche des Rechtecks ABCD nimmt das Dreieck ΔPQT ein?



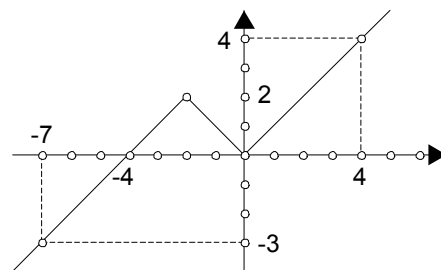
- A) 5/16 B) 1/4 C) 1/5 D) 1/6 E) 3/8

Antwort: B

Sowohl die Strecke PQ als auch die Strecke SR ist parallel zur Diagonale AC (Strahlensatz!). Daher hat T von der Geraden PQ denselben Abstand wie C, und die Dreiecke PQT und PQR haben denselben Flächeninhalt. Weil PR parallel zu BC ist, hat das Dreieck PQR denselben Flächeninhalt wie das rechtwinkelige Dreieck PBR, und es ergibt sich letztlich

$$A_{PQT} = A_{PBR} = \frac{1}{2} \cdot PB \cdot PR = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot BC = \frac{1}{4} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{4} \cdot A_{ABCD}$$

20) Der Graph der Funktion f, die für alle reellen Zahlen definiert ist, besteht aus einer Strecke und zwei Halbgeraden (siehe Abbildung). Was ist die Menge aller Zahlen x, für die $f(f(f(x))) = 0$ gilt?



- A) $\{-4, 0\}$ B) $\{-8, -4, 0\}$ C) $\{-12, -8, -4, 0\}$
 D) \emptyset E) $\{-16, -12, -8, -4, 0\}$

Antwort: C

Damit $f(f(f(x))) = 0$ gilt, muss $f(f(x)) = 0$ oder $f(f(x)) = -4$ gelten.

Damit $f(f(x)) = 0$ gilt, muss $f(x) = 0$ oder $f(x) = -4$ gelten. Ersteres gilt genau dann, wenn $x = 0$ oder $x = -4$, letzteres genau dann, wenn $x = -8$.

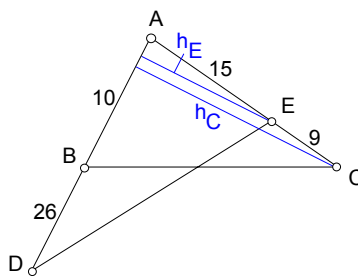
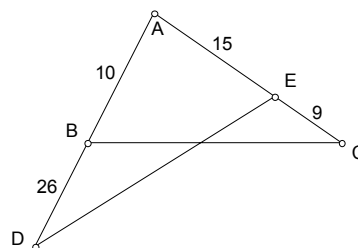
Damit $f(f(x)) = -4$ gilt, muss $f(x) = -8$ und somit $x = -12$ gelten.

Folglich gilt $f(f(f(x))) = 0$ genau für $x \in \{-12, -8, -4, 0\}$.

5 Punkte Beispiele

21) Wie groß ist das Verhältnis $A_{ADE} : A_{ABC}$ der Flächeninhalte der Dreiecke ADE und ABC?

- A) 9/4 B) 7/3 C) 4/5 D) 15/10 E) 26/9



Antwort: A

Es gilt $AD : AB = 36 : 10$ und nach Strahlensatz

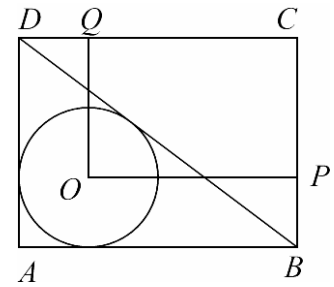
$$h_E : h_C = AE : AC = 15 : 24.$$

Daraus folgt

$$A_{ADE} : A_{ABC} = \frac{AD \cdot h_E}{2} : \frac{AB \cdot h_C}{2} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{h_E}{h_C} = \frac{36}{10} \cdot \frac{15}{24} = \frac{9}{4}$$

22) Der Flächeninhalt des Rechtecks ABCD beträgt 36 cm^2 . Der Punkt O ist der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABD. Welchen Flächeninhalt hat das Rechteck OPCQ?

- A) 24 cm^2 B) $6\pi \text{ cm}^2$
 C) 18 cm^2 D) $12\sqrt{2} \text{ cm}^2$
 E) Das hängt vom Verhältnis der Längen von AB und AD ab.

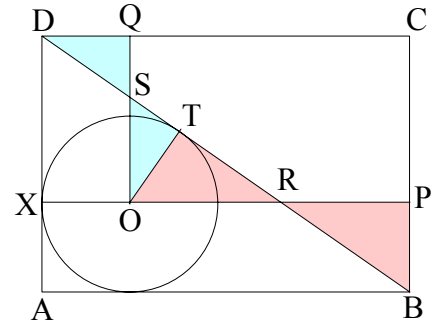


Antwort: C

Wir bezeichnen die Schnittpunkte von OP und OQ mit BD mit R beziehungsweise S; T sei der Berührungspunkt des Kreises mit BD, X der Schnittpunkt von OP mit AD. Zunächst beachten wir, dass OQDX ein Rechteck ist, also gilt $DQ = OX = OT$.

Das bedeutet in weiterer Folge, dass die Dreiecke OTS und DQS nicht nur in zwei Winkeln (rechte Winkel in T bzw. Q, Winkel in S), sondern auch in der Länge der dem Winkel in S gegenüberliegenden Kathete übereinstimmen, sie sind also kongruent. Analog sind auch die Dreiecke BPR und OTR kongruent. Daher stimmt der Flächeninhalt des Rechtecks OPCQ mit dem des Dreiecks BCD überein, denn beide sind aus denselben "Bausteinen" zusammengesetzt.

Daher erhalten wir $A_{OPCQ} = A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD} = 18 \text{ cm}^2$.



23) Die Kinder A, B, C und D machen folgende Aussagen:

A: B, C und D sind Mädchen.	B: A, C und D sind Knaben.
C: A und B lügen.	D: A, B und C sagen die Wahrheit.

Wie viele Kinder sagen die Wahrheit?

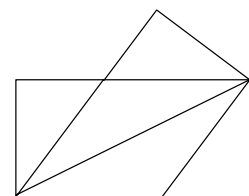
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Das lässt sich nicht bestimmen

Lösung: B

Die Aussagen von A und B widersprechen einander, also lügt mindestens eine(r) von beiden. Das bedeutet, dass auch D lügt.

Lügen A und B, so sagt C die Wahrheit. Lügt nur eine(r) von A und B, dann lügt C. Weitere Möglichkeiten gibt es nicht, als sagt genau ein Kind die Wahrheit.

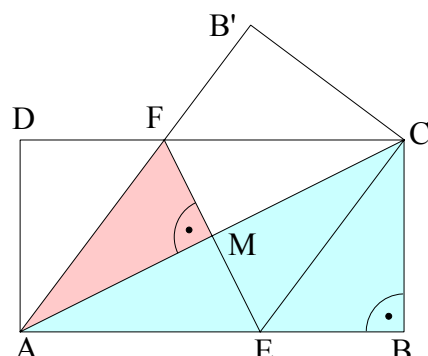
24) Ein rechteckiges Blatt Papier mit den Maßen $6 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$ wird entlang einer Diagonale gefaltet. Die Teile, die über den Rand des überlappenden Teiles hinausragen, werden weggeschnitten; danach wird das Stück Papier wieder auseinander gefaltet. Es hat nun die Form einer Raute. Wie groß ist die Seitenlänge dieser Raute?



- A) $\frac{7}{2}\sqrt{5} \text{ cm}$ B) 7,35 cm C) 7,5 cm D) 7,85 cm E) 8,1 cm

Antwort: C

Es sei M der gemeinsame Diagonalschnittpunkt des Rechtecks ABCD und der Raute AECF. Weil die Diagonalen einer Raute wie die Seiten eines Rechtecks zu einander normal stehen, sind



die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AMF$ erstens recht-winkelig und zweitens darüber hinaus (wegen des gleich großen Winkels in A) ähnlich, also gilt

$$AF : AM = AC : AB$$

und damit

$$AF = \frac{AM \cdot AC}{AB} = \frac{AC^2}{2 \cdot AB} = \frac{AB^2 + BC^2}{2 \cdot AB} = \frac{12^2 + 6^2}{2 \cdot 12} = \frac{180}{24} = 7,5$$

25) In der rechts angeschriebenen Addition steht jeder der Buchstaben X, Y und Z für eine andere von 0 verschiedene Ziffer. Für welche Ziffer steht der Buchstabe X?

$$\begin{array}{r} XX \\ YY \\ \hline ZZ \\ ZYX \end{array}$$

- A) 1 B) 2 C) 7 D) 8 E) 9

Antwort: D

Hat eine Zahl die Hunderterziffer H, die Zehnerziffer Z und die Einerziffer E, so ist ihr Wert $100H + 10Z + E$. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache lässt sich das Zahlenrätsel als Gleichung schreiben:

$$\begin{aligned} 11X + 11Y + 11Z &= 100Z + 10Y + X \\ 10X + Y &= 89Z \end{aligned}$$

Weil X und Y von 0 verschiedene Ziffern sein sollen, kann nur $Z = 1$ gelten. Daraus folgt unmittelbar $X = 8$, $Y = 9$.

26) Was ist die größtmögliche Zahl auf einander folgender natürlicher Zahlen, von denen keine eine durch 5 teilbare Ziffernsumme hat?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Antwort: D

Die Zahlen 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 sind ein Beispiel für 8 auf einander folgende natürliche Zahlen, von denen keine eine durch 5 teilbare Ziffernsumme hat.

Von mehr als 8 auf einander folgenden Zahlen hat stets mindestens eine eine durch 5 teilbare Ziffernsumme:

Von 9 (oder mehr) auf einander folgenden natürlichen Zahlen gehören (Schubfachprinzip!) mindestens 5 zur selben "Dekade" (von $xy\dots z0$ bis $xy\dots z9$). Innerhalb einer Dekade nimmt die Ziffernsumme von Zahl zu Zahl um 1 zu; die Ziffernsummen dieser 5 Zahlen sind also wieder 5 auf einander folgende natürliche Zahlen. Von fünf auf einander folgenden natürlichen Zahlen ist aber immer eine durch 5 teilbar.

27) Auf einem Bücherbord stehen 50 Bücher: Mathematik- und Physikbücher. Keine zwei Physikbücher stehen unmittelbar neben einander, aber jedes Mathematikbuch hat ein Mathematikbuch als Nachbar. Welche der folgenden Aussagen könnte eventuell falsch sein?

- A) Auf dem Bord stehen mindestens 32 Mathematikbücher.
 B) Auf dem Bord stehen höchstens 17 Physikbücher.
 C) Falls 17 Physikbücher auf dem Bord stehen, steht eines als erstes oder letztes in der Reihe.
 D) Unter beliebigen 9 neben einander stehenden Büchern sind mindestens 6 Mathematikbücher.
 E) Es gibt drei Mathematikbücher, die unmittelbar neben einander stehen.

Antwort: E

Wenn die Bücher in der Reihenfolge M-M-P-M-M-P-....-M-M-P-M-M auf dem Bord stehen, stehen keine zwei Physikbücher neben einander, jedes Mathematikbuch hat ein Mathematik-

buch als Nachbar, aber keine drei Mathematikbücher stehen unmittelbar neben einander. Also kann Aussage E falsch sein.

(Weil keine zwei Physikbücher unmittelbar neben einander stehen, aber jedes Mathematikbuch ein Mathematikbuch als Nachbar hat, stehen zwischen zwei Physikbüchern mindestens zwei Mathematikbücher. Das bedeutet, dass

- ⇨ von drei neben einander stehenden Büchern mindestens zwei Mathematikbücher sind,
- ⇨ von 9 neben einander stehenden Büchern mindestens 2 Mathematikbücher sind,
- ⇨ schon von 48 Büchern mindestens 32 Mathematik- und höchstens 16 Physikbücher sind,
- ⇨ unter 50 Büchern also höchstens 17 Physikbücher sein können.

Somit sind die Aussagen A, B und D sicher richtig. Aussage C ist ebenfalls sicher richtig: Ist das erste Buch auf dem Bord kein Physikbuch, dann auch das zweite nicht. Das erste Physikbuch kann dann frühestens als drittes Buch in der Reihe stehen, das 16. Physikbuch frühestens als 48. Buch. Ein 17. Physikbuch kann in diesem Fall nicht auf dem Bord stehen, weil jedes Mathematikbuch ein Mathematikbuch als Nachbar haben muss.

Folglich müssen bei 17 Physikbüchern auf dem Bord das erste und analog auch das letzte Buch in der Reihe ein Physikbuch sein.

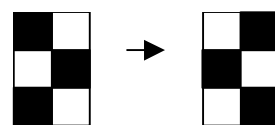
28) Drei verschiedene Zahlen a , b und c werden aus $\{1,4,7,10,13,16,19,22,25,28\}$ ausgewählt. Wie viele verschiedene Werte für die Summe $a+b+c$ sind dabei möglich?

- A) 13 B) 21 C) 22 D) 30 E) 120

Lösung: C

Die gegebenen Zahlen sind genau die natürlichen Zahlen der Form $3n+1$ mit $0 \leq n \leq 9$. Zählt man drei solche Zahlen zusammen, so erhält man stets eine durch 3 teilbare Summe. Die kleinste erreichbare Summe $a+b+c$ ist dabei $1+4+7 = 12 = 4 \cdot 3$, die größte erreichbare Summe ist $22+25+28 = 75 = 25 \cdot 3$. Weil die Summe $a+b+c$ als Wert jedes Vielfache von 3 von $4 \cdot 3$ bis $25 \cdot 3$ annehmen kann, sind 22 verschiedene Werte möglich.

29) Die 6 Felder eines 2×3 -Rechtecks werden schachbrettartig gefärbt (siehe Abbildung). Bestimme die kleinste Anzahl an Schritten, die nötig sind, um ein "entgegengesetzt gefärbtes" Brett zu erhalten, wenn folgende Regeln gelten:

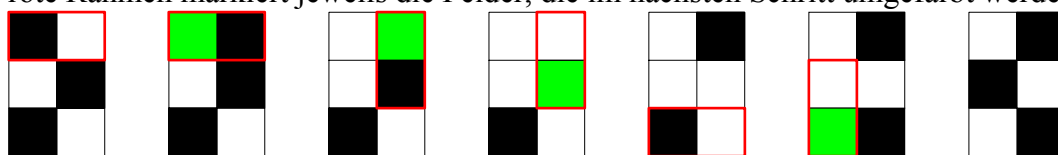


1. In jedem Schritt müssen genau zwei Felder mit gemeinsamer Seite umgefärbt werden.
2. Schwarze Felder müssen grün, grüne Felder weiß und weiße Felder schwarz gefärbt werden.

- A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

Antwort: C

Bei jedem Umfärbungsschritt werden gleichzeitig genau ein ursprünglich schwarzes Feld und ein ursprünglich weißes Feld gefärbt. Weil jedes schwarze Feld (mindestens) zweimal umgefärbt werden muss, bis es weiß ist, sind insgesamt mindestens 6 Schritte zum Umfärben des Rechtecks nötig. Dass 6 Schritte tatsächlich genügen, zeigt folgendes Beispiel. (Der rote Rahmen markiert jeweils die Felder, die im nächsten Schritt umgefärbt werden.)



30) Wir schreiben eine Liste aller ein- bis siebenstelligen natürlichen Zahlen, in denen keine Ziffer außer "0" und "1" vorkommt. Wie oft müssen wir die Ziffer "1" schreiben?

A) 512

B) 288

C) 896

D) 128

E) 448

Antwort: E

Lösung 1: Schreiben wir auch alle betroffenen Zahlen mit weniger als sieben Stellen durch Ergänzen von "führenden Nullen" siebenstellig – also beispielsweise 1011 als 0001011 –, so gibt es zu jeder Zahl eine eindeutig bestimmte "inverse" Zahl, die man durch Vertauschen der Ziffern 0 und 1 erhält; die inverse Zahl zu 1011 = 0001011 ist also 1110100. Weil es 2^7 ein- bis siebenstelligen natürlichen Zahlen gibt, in denen nur die Ziffern 0 und 1 vorkommen (für jede der 7 Stellen gibt es 2 Auswahlmöglichkeiten), kann man diese Zahlen zu 2^6 Paaren zu einander inverser Zahlen zusammenfassen. In jedem dieser Paare kommt die Ziffer 1 genau 7-mal vor. Wegen $7 \cdot 2^6 = 7 \cdot 64 = 448$ muss die Ziffer 1 also genau 448-mal geschrieben werden.

Lösung 2: Die Anzahl der höchstens 7-stelligen Zahlen, in denen keine Ziffer außer "0" und "1" vorkommt, mit genau k Ziffern 1 ist

$$\binom{7}{k} = \frac{7!}{k! \cdot (7-k)!},$$

denn jede dieser Zahlen ist durch das Festlegen der Positionen der k Ziffern "1" schon eindeutig bestimmt.

Weil jede dieser Zahlen genau k-mal die Ziffer "1" enthält, ist die Anzahl A der zu schreibenden Einser

$$A = 7 \cdot \binom{7}{7} + 6 \cdot \binom{7}{6} + 5 \cdot \binom{7}{5} + 4 \cdot \binom{7}{4} + 3 \cdot \binom{7}{3} + 2 \cdot \binom{7}{2} + 1 \cdot \binom{7}{1} + 0 \cdot \binom{7}{0}$$

Nun gilt aber

$$\binom{7}{k} = \binom{7}{7-k}$$

und damit nach geeignetem Zusammenfassen und unter Anwendung des binomischen Lehrsatzes

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot 2A = \frac{1}{2} \cdot \left[7 \cdot \binom{7}{7} + 0 \cdot \binom{7}{0} + 6 \cdot \binom{7}{6} + 1 \cdot \binom{7}{1} + \dots + 1 \cdot \binom{7}{1} + 6 \cdot \binom{7}{6} + 0 \cdot \binom{7}{0} + 7 \cdot \binom{7}{7} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[7 \cdot \binom{7}{7} + 0 \cdot \binom{7}{7} + 6 \cdot \binom{7}{6} + 1 \cdot \binom{7}{6} + \dots + 1 \cdot \binom{7}{1} + 6 \cdot \binom{7}{1} + 0 \cdot \binom{7}{0} + 7 \cdot \binom{7}{0} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[7 \cdot \binom{7}{7} + 7 \cdot \binom{7}{6} + 7 \cdot \binom{7}{5} + \dots + 7 \cdot \binom{7}{1} + 7 \cdot \binom{7}{0} \right] = \\ &= \frac{7}{2} \cdot \left[\binom{7}{7} + \binom{7}{6} + \binom{7}{5} + \dots + \binom{7}{1} + \binom{7}{0} \right] = \\ &= \frac{7}{2} \cdot 2^7 = 448 \end{aligned}$$