Känguru der Mathematik 2001
LÖSUNGEN

GRUPPE STUDENT

1) Josef hat 100 Mäuse, die jeweils entweder weiß oder grau sind. Mindestens eine Maus ist grau. Fängt er sieben seiner Mäuse ein, so sind darunter immer mindestens vier weiße Mäuse. Wie viele graue Mäuse kann Josef höchstens haben?
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 93 (E) 99

Antwort: **B**
Sind unter vier eingefangenen Mäusen immer mindestens vier weiße, so sind darunter immer höchstens drei graue Mäuse. Hätte Josef mehr als drei graue Mäuse, dann könnte er eventuell beim Einfangen von sieben Mäusen auch vier oder mehr graue Mäuse fangen.

2) Was ist die größte Anzahl von festen Kugeln mit Radius 1cm, die in einer würfelförmigen Schachtel mit Volumen 64cm^3 Platz finden können?
(A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 64 (E) 128

Antwort: **A**
Ein Würfel mit Volumen 64cm^3 hat eine Kantenlänge von 4cm, daher können nicht mehr als zwei Schichten von je 4Kugeln mit Durchmesser 2cm, also nicht mehr als 8 Kugeln in der Schachtel Platz finden.

3) Wenn $\log_2 10 = a$, dann gilt $\log_{10} 2 =$

(A) 2a (B) a/2 (C) 5a (D) a/5 (E) 1/a

Antwort: **E**
Wenn $\log_2 10 = a$, dann ist $2a = 10$, also $2 = 10^{\frac{1}{a}}$ und somit $\log_{10} 2 = 1/a$.

4) Wie viele zusammengesetzte positive ganze Zahlen kleiner als 1000 mit der Ziffernsumme 2 gibt es?
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) andere Anzahl

Antwort: **E**
Positive ganze Zahlen mit Ziffernsumme bestehen entweder aus einer Ziffer 2 und Nullen oder aus zwei Ziffern 1 und Nullen. Kleiner als 1000 sind davon nur die Zahlen 2, 20, 200, 11, 101, und 110. Die Zahlen 2, 11 und 101 sind Primzahlen, daher sind nur die drei Zahlen 20, 200 und 110 zusammengesetzt.

5) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte dreistellige positive ganze Zahl gerade und größer als 399 ist?
(A) 1/2 (B) 1/3 (C) 1/6 (D) 2/3 (E) 1/9

Antwort: **B**

Es gibt 600 dreistellige positive ganze Zahlen größer als 399; 300 davon sind gerade. Weil es 900 dreistellige positive ganze Zahlen gibt, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich 300/900 = 1/3.

6) $\dfrac{\overbrace{9999\ldots9999}^{18\,Ziffern}}{999999999} - 1 =$

(A) 9^9 (B) $9^9 - 1$ (C) 9^{10} (D) 10^9 (E) 10^{10}

Antwort: **D**

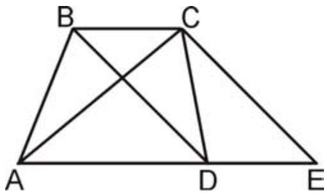
Lösung 1:

$$\frac{\overbrace{9999\ldots9999}^{18\,Ziffern}}{999999999} - 1 = \frac{10^{18} - 1}{10^9 - 1} - 1 = \frac{(10^9)^2 - 1}{10^9 - 1} - 1 = \frac{(10^9 - 1)(10^9 + 1)}{10^9 - 1} - 1 =$$
$$= (10^9 + 1) - 1 = 10^9$$

Lösung 2: Wir setzen 999999999 = z. Dann ergibt sich

$$\frac{\overbrace{9999\ldots9999}^{18\,Ziffern}}{999999999} - 1 = \frac{\overbrace{99\ldots99}^{9\,Ziffern}\overbrace{00\ldots00}^{9\,Ziffern} + \overbrace{99\ldots99}^{9\,Ziffern}}{999999999} - 1 = \frac{10^9 z + z}{z} - 1 = (10^9 + 1) - 1 = 10^9$$

7) In der Zeichnung gilt $BC \| AE$ und $BD \| CE$. Es sei x die Fläche des Vierecks ABCD und y die Fläche des Dreiecks ACE. Dann gilt



(A) x = y (B)x = 2y (C) y = 2x

(D) etwas anderes

(E) es gibt keinen eindeutigen Zusammenhang

Antwort: **A**

Aufgrund der Voraussetzungen ist das Viereck BCED ein Parallelogramm, daher haben die beiden Teildreiecke BCD und CED denselben Flächeninhalt. Wegen $BC \| AE$ haben auch die Dreiecke BCD und BCA denselben Flächeninhalt. Daraus folgt

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{CDA} = A_{BCD} + A_{CDA} = A_{CED} + A_{CDA} = A_{ACE}$$

8) Die Anzahl der Quadrupel positiver ganzer Zahlen x, y, z, t mit x < y < z <t, die die Gleichung xyzt – 1 = 2001 lösen, ist gleich

(A) 10 (B) 7 (C) 6 (D) 4 (E) 1

Antwort: **B**

Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit xyzt = 2002. Wegen 2002 = 2·7·11·13 gibt es für Lösungen nur die Möglichkeiten x = 1 und x = 2. Mit x = 2 existiert nur die Lösung (2; 7; 11; 13). Mit x = 1 ergibt sich eine weitere der drei Zahlen der Lösungsquadrupel durch Multiplikation von zwei der vier Primfaktoren von 2002, die restlichen beiden Zahlen sind die übrigen zwei Primfaktoren. Weil man aus vier Zahlen zwei auf genau sechs Arten auswählen kann, erhalten wir insgesamt sieben Lösungsquadrupel der Gleichung.

9) Zwei Radfahrer fahren von derselben Stelle um 14:10 Uhr ab. Der erste fährt in Richtung Norden mit 32km/h, der andere fährt in Richtung Osten mit 24km/h. Um welche Zeit beträgt ihr Abstand genau 130km?

(A) 16:10 (B) 16:20 (C) 17:10 (D) 17:25 (E) 17:35

***Antwort:* D**

Nach t Stunden hat der erste Radfahre 32t km zurückgelegt, der zweite 24t km. Weil ihre Fahrtrichtungen zu einander normal sind, beträgt ihr Abstand (in km) dann

$$\sqrt{(32t)^2 + (24t)^2} = 40t.$$

Bis ihr Abstand 130km beträgt, müssen beide 130/40 Stunden = 3 Stunden 15 Minuten fahren. Einen Abstand von 130km haben sie demnach um 17:25 Uhr.

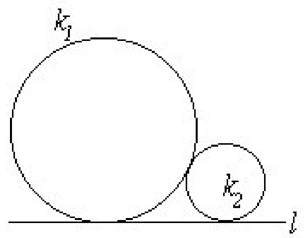
10) Es sei m eine positive ganze Zahl mit ggT(m, 35) > 10. Welche der folgenden Aussagen muss unbedingt wahr sein?

(A) m hat mindestens drei Ziffern.
(B) m ist ein Vielfaches von 35.
(C) m ist durch 15 teilbar.
(D) m ist durch 25 teilbar.
(E) m ist entweder durch 5 oder durch 7 teilbar, nicht aber durch beide.

Antwort:* *B

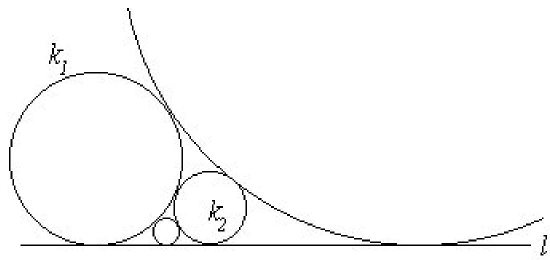
Es muss ggT(m, 35) ein Teiler von 35 sein. Der einzige Teiler von 35, der größer als 35 ist, ist aber 35 selbst, also gilt ggT(m, 35), und m ist ein Vielfaches von 35.

11) Zwei Kreise k_1 und k_2 mit verschiedenen Radien berühren einander, beide berühren auch die Gerade l. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?



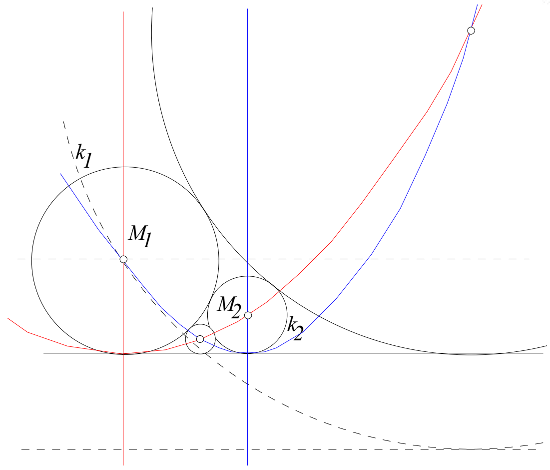
(A) Es gibt keinen Kreis, der k_1, k_2 und l berührt.
(B) Es gibt genau einen Kreis, der k_1, k_2 und l berührt.
(C) Es gibt genau zwei Kreise, die k_1, k_2 und l berühren.
(D) Es gibt drei Kreise, die k_1, k_2 und l berühren.
(E) Keine der Aussagen (A) bis (D) ist wahr.

Antwort:* *C



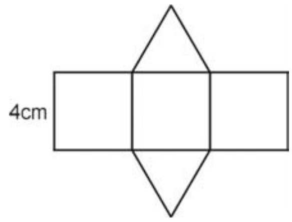
Die Abbildung zeigt die beiden Kreise die sowohl k_1 als auch k_2 und l berühren. Der Nachweis dafür, dass es nicht mehr als diese zwei Kreise gibt, ist etwas umfangreich und soll hier nur skizziert werden.

Zunächst beachten wir, dass es zu jedem Kreis k mit Radius r, der konzentrischen Kreis durch den M entweder um r_1 größer oder um r_1 gleichzeitig auch noch die Gerade l, beiden Parallelen zu l im Abstand r_1 und von einer der beiden Parall Parallelen geht eine durch M_1 (k_1 ber M_1 denselben Abstand, so liegt M au nicht durch M_1 gehenden Parallelen z M_1, so liegt M auf einer Parabel



Analoges gilt für Mittelpunkte von Kreisen, die k_2 und l berühren. Die Mittelpunkte von Kreisen, die k_1, k_2 und l berühren, liegen also auf zwei Parabeln mit identischen Scheitel-tangenten, also parallelen Achsen, oder auf einer der beiden Parabeln und der Achse der jeweils anderen Parabel. Die Schnittpunkte der Achse der einen Parabel mit der jeweils anderen Parabel sind genau M_1 beziehunsgweise M_2, diese scheiden als Mittelpunkte von Kreisen, die k_1, k_2 und l berühren, aus. Daher bleiben nur zwei mögliche Mittelpunkte über, nämlich die Schnittpunkte der beiden Parabeln: Zwei Parabeln mit parallelen Achsen haben nicht mehr als zwei Schnittpunkte.

12) In nebenstehender Abbildung sehen wir das Netz eines Körpers mit drei Quadraten mit der Seitenlänge 4cm und zwei gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen. Was ist das Volumen dieses Körpers?



(A) $16\sqrt{3}\,\text{cm}^3$ (B) 32cm³ (C) $\frac{64}{3}\text{cm}^3$

(D) $32\sqrt{3}\,\text{cm}^3$ (E) 64cm³

Antwort: A

Der Körper ist ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma mit Höhe 4cm; die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks, das Basis des Prismas ist, ist ebenfalls 4cm. Daher ist der Flächeninhalt der Grundfläche gleich $4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ und das Volumen $16\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

13) In New York kosten 16 Stück Kaugummi so viele Dollar, wie man Kaugummis für einen Dollar bekommt. Wie viele Cents kostet ein Stück Kaugummi? (1 Dollar = 100 Cents)

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 25

Antwort: E

Kostet ein Stück Kaugummi x Cents, so erhält man für einen Dollar 100/x Kaugummis, und 16 Kaugummis kosten 16x Cents, also 16x/100 Dollar. Das liefert

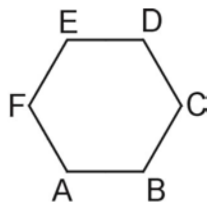
$$\frac{16x}{100} = \frac{100}{x}, \quad x^2 = \frac{100^2}{16}, \quad x = \frac{100}{4} = 25$$

14) Es sei 1, 4, 9, 16, … die Folge der Quadrate positiver ganzer Zahlen. Die Zahl 10^8 kommt in dieser Folge vor. Welche der folgenden Zahlen folgt unmittelbar darauf in der Folge?

(A) $(10^4+1)^2$ (B) $(10^8+1)^2$ (C) $(10^5)^2$ (D) $(10^8)^2$ (E) $(10^4)^2+1$

Antwort: A

Es ist 10^8 das Quadrat von 10^4. Die nächste Zahl in der Folge ist das Quadrat von 10^4+1, also $(10^4+1)^2$.



15) ABCDEF ist ein regelmäßiges Sechseck. Dann ist $\vec{BC} - \vec{AD} + 2 \cdot \vec{AF} =$

(A) $\vec{AA}$ (B) $\vec{CA}$ (C) $\vec{FD}$ (D) $\vec{FB}$ (E) $\vec{CE}$

Antwort:* *E

Bezeichnen wir den Mittelpunkt des Sechsecks mit M, dann erhalten wir

$$\vec{BC} - \vec{AD} + 2 \cdot \vec{AF} = \vec{AM} - 2 \cdot \vec{AM} + 2 \cdot \vec{BM} = 2 \cdot \vec{BM} - \vec{AM} = \vec{BE} + \vec{EF} = \vec{BF} = \vec{CE}$$

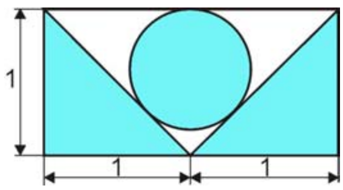
16) In einer Gruppe von vier Mannschaften einer Fußballmeisterschaft hat jede Mannschaft gegen jede andere genau einmal gespielt. In der Punktetabelle hat nun die Mannschaft A 7 Punkte, B 4 Punkte, C 3 Punkte und D 3 Punkte. (In einer solchen Meisterschaft bekommt jede Mannschaft für einen Sieg 3 Punkte, für ein Unentschieden 1 Punkt und für eine Niederlage 0 Punkte). Wie ist das Spiel zwischen A und D ausgegangen?

(A) A muss gewonnen haben. (B) Es muss unentschieden ausgegangen sein.
(C) D muss gewonnen haben (D) Es hängt vom Ergebnis A gegen B ab.
(F) Es hängt vom Ergebnis A gegen C ab.

Antwort:* *A

Wie A auf 7 Punkte kommt man bei drei Spielen genau mit 2 Siegen und 1 Unentschieden, eine andere Möglichkeit gibt es nicht. Ebenso gibt es nur eine Möglichkeit, wie Mannschaft B auf 4 Punkte zu kommen, nämlich mit 1 Sieg, 1 Unentschieden und 1 Niederlage.
Endet ein Spiel mit dem Sieg einer Mannschaft, so werden in diesem Spiel 3 Punkte vergeben. Endet das Spiel Unentschieden, so werden nur 2 Punkte vergeben. In den insgesamt sechs Spielen von A, B, C und D gegen einander wurden insgesamt 17 Punkte (7+4+3+3) vergeben. Das bedeutet, dass genau ein Spiel mit einem Unentschieden endete. Weil A und B jeweils einmal unentschieden gespielt haben, war das das Spiel A gegen B. Folglich hat Mannschaft A die Spiele gegen C und D gewonnen.

17) Wie groß ist die schattierte Fläche?



(A) 1 (B) $\pi + 1$ (C) $\frac{\pi}{4} + 1$
(D) $\pi(3 - 2\sqrt{2}) + 1$ (E) $\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

Antwort:* *D

Die beiden schattierten Dreiecke ergeben zusammen ein Quadrat mit Seitenlänge 1, haben also zusammen den Flächeninhalt 1. Der Kreis ist Inkreis eines gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreiecks mit Kathetenlänge 2 und Schenkellänge $\sqrt{2}$, sein Umfang U ist $2 + 2\sqrt{2}$, sein Flächeninhalt A ist 1. Für seinen Inkreisradius r erhalten wir (wegen $A = \frac{U \cdot r}{2}$) $r = \frac{2A}{U} = \frac{2}{2+2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} - 1$. Daher ist sein Flächeninhalt gleich $(\sqrt{2} - 1)^2 \pi = (3 - 2\sqrt{2})\pi$, der Flächeninhalt der ganzen schattierten Fläche ist $\pi(3 - 2\sqrt{2}) + 1$.

18) Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks hat die Länge 0,9cm, und die Katheten des Dreiecks haben die Längen a cm bzw. b cm. Welche der folgenden Zahlen ist am kleinsten?

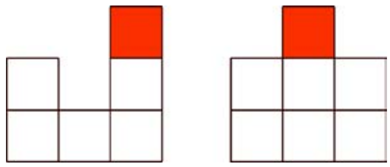
(A) $a^2 + b^2$ (B) $(a+b)^2$ (C) 0,9 (D) $a + b$ (E) ab

Antwort:* *A

Als Kathetenlängen in einem rechtwinkeligen Dreieck sind a und b kleiner als 0,9 und damit auch kleiner als 1. Daher ist $a > a^2$, $b > b^2$ und folglich $a + b > a^2 + b^2$.
Aus ab > 0 folgt weiters $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2$.

Nach Satz von Pythagoras gilt $a^2 + b^2 = 0{,}9^2 = 0{,}81 < 0{,}9$.
Schließlich ist ab sicher nicht größer als das Quadrat der längeren der beiden Katheten, also gilt sicher $ab < a^2 + b^2$. Daher ist ab die kleinste der fünf Zahlen.

19) In der Abbildung sieht man zwei Ansichten eines Hauses, welches aus kleinen Würfeln zusammengesetzt ist: die Ansicht von links und die Ansicht von vorne. Wie viele Würfel wurden höchstens verwendet?



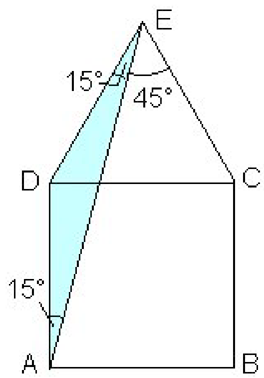
(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

Antwort: **E**

Die in der linken Ansicht gezeichneten weißen Quadrate könnten mit jeweils höchstens 3 Würfeln, das gefärbte mit genau 1 Würfel bestückt sein $\Rightarrow 5 \cdot 3 + 1 = 16$.

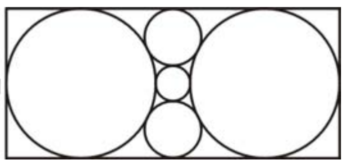
20) An der Seite CD eines Quadrats ABCD wird nach außen ein gleichseitiges Dreieck CDE angehängt. Wie viel Grad hat der Winkel ∠AEC?
(A) 30 (B) 36 (C) 45 (D) 54 (E) 60

Antwort:* *B



Wir betrachten zunächst das Dreieck AED: Es ist wegen AD = ED gleichschenkelig, und der Winkel zwischen den Schenkeln (∠ADE) misst 90° + 60° = 150°.
Weil ΔAED gleichschenkelig ist, sind die Winkel ∠EAD und DEA gleich groß, sie messen also 15° (Winkelsumme im Dreieck!).
Daher erhalten wir letztlich
∠AEC = ∠DEC - ∠DEA = 60° - 15° = 45°.

21) Bestimme die Länge der größeren Rechtecksseite.



(A) $-2+\sqrt{5}$ (B) $\frac{-2+\sqrt{5}}{2}$ (C) 2,5
(D) $\sqrt{5}$ (E) $2\sqrt{5}$

Antwort:

Der Radius der beiden großen Kreise ist ½. Ist r der Radius des kleinsten Kreises, so ist die Länge der größeren Rechtecksseite gleich 2r + 2. Zur Berechnung von r bezeichnen wir den Radius der beiden mittelgroßen Kreise mit R. Dann gilt einerseits 2R + r = ½, also $R = \frac{1-2r}{4}$, andererseits nach Satz von Pythagoras

$$(r+R)^2 + (r+\tfrac{1}{2})^2 = (R+\tfrac{1}{2})^2$$

$$(r+\tfrac{1-2r}{4})^2 + (r+\tfrac{1}{2})^2 = (\tfrac{1-2r}{4}+\tfrac{1}{2})^2$$

$$\frac{(2r+1)^2}{16} + \frac{(2r+1)^2}{4} = \frac{(3-2r)^2}{16}$$

$$5(2r+1)^2 = (3-2r)^2$$

$$20r^2 + 20r + 5 = 9 - 12r + 4r^2$$

$$16r^2 + 32r - 4 = 0$$

$$4r^2 + 8r + 4 = 5$$

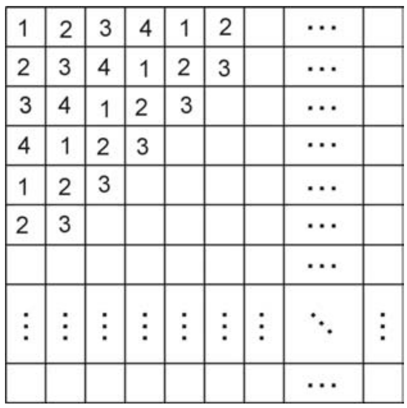
$$(2r+2)^2 = 5$$

$$2r = -2 \pm \sqrt{5}$$

Weil 2r positiv sein muss, ist $2r = -2 + \sqrt{5}$ und die Länge der größeren Rechtecksseite $\sqrt{5}$

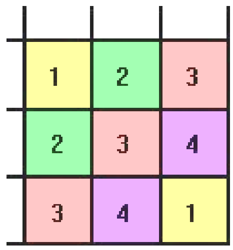
22) Die Quadrate eines 43×43-Rasters werden wie abgebildet mit 4 Farben gefärbt. Welche Farbe wird häufiger als die anderen drei verwendet?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) keine



Antwort: C

In den oberen 40 Zeilen des Rasters kommen alle vier Farben gleich oft vor, weil jede senkrechte Spalte dieses Teils des Rasters in 10 senkrechte Blöcke unterteilt werden kann, von denen jeder jede der Farben 1, 2, 3, und 4 genau einmal enthält. Genauso enthält der Teil des Rasters, der aus den linken 40 Feldern der untersten drei Zeilen des Rasters besteht, jede Farbe gleich oft, weil jede Zeile in 10 waag-rechte Blöcke zerteilt werden kann, von denen jeder jede Farbe genau einmal enthält. Daher muss nur der 3×3-Bereich in der rechten unteren Ecke betrachtet werden. Weil sich längs der Rasterdiagonalen von links oben nach rechtes unten in den ungeraden Zeilen jeweils Farbe 1, in den geraden Zeilen jeweils Farbe 3 findet, ist dieser Bereich wie abgebildet gefärbt. Daher kommt im ganzen Raster Farbe 3 am öftesten vor.



23) Wir berechnen für eine positive ganze Zahl n die Ziffernsumme, dann die Ziffernsumme der resultierenden Zahl, und so fort, bis wir als Ergebnis eine einstellige Zahl $l(n)$ erhalten. Wie groß ist $l(2001^{2001})$?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

Antwort: E

Die Basis 2001 der Potenz 2001^{2001} enthält den Primfaktor 3, daher ist 2001^{2001} ein Vielfaches von 9. Für jede durch 9 teilbare Zahl ist aber auch ihre Ziffernsumme durch 9 teilbar, also entsteht beim wiederholten Bilden der Ziffernsumme immer wieder eine durch 9 teilbare Zahl. Das bedeutet, dass auch $l(2001^{2001})$ durch 9 teilbar sein muss, also ist $l(2001^{2001})$ gleich 9.

24) Wie viele der Ziffernpaare 00, 11, 22, … , 88, 99 können als die letzten zwei Ziffern einer Quadratzahl auftreten?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) mehr als 4

Antwort: B

Die Quadrate von 0, 1, 2, …, 9 enden auf 0, 1, 4, 5, 6 oder 9. Daher kommen als Einerziffer einer Quadratzahl auch nur die Ziffern 0, 1, 4, 5, 6 und 9 in Frage.
Weiters ist $(2n)^2 = 4n^2$ und $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 4n(n+1)+1$, also ist das Quadrat einer geraden Zahl immer durch 4 teilbar, während das Quadrat jeder ungeraden Zahl bei Division durch 4 den Rest 1 lässt.
Endet eine Zahl auf 11, 55 oder 99, so lässt sie bei Division durch 4 aber den Rest 3, kann also keine Quadratzahl sein. Endet eine Zahl auf 66, so lässt sie bei Division durch 4 den Rest 2 und kann ebenfalls keine Quadratzahl sein.
Daher kommen als letzte zwei Ziffern einer Quadratzahl nurmehr die Ziffernpaare 00 und 44 in Frage. $10^2 = 100$ beziehungsweise $12^2 = 144$ sind Beispiele dafür, dass 00 und 44 tatsächlich die letzten zwei Ziffern von Quadratzahlen sein können. Genau die zwei Paare 00 und 44 treten somit als letzte zwei Ziffern von Quadratzahlen auf.

25) Es seien m und n positive ganze Zahlen mit $\log_{10} m \approx 12{,}3$ und $\log_{10} n \approx 15{,}4$. Wie viele Ziffern hat das Produkt $m \cdot n$?
(A) 3 (B) 5 (C) 9 (D) 11 (E) 13

Antwort: D

Es gilt $\log_{10} m \cdot n = \log_{10} m + \log_{10} n \approx 12{,}3 + 15{,}4 = 27{,}4$. Daraus folgt $m \cdot n \approx 10^{27{,}4}$, das Produkt $m \cdot n$ liegt also zwischen 10^{27} und 10^{28} und hat daher 28 Ziffern.

26) Zwei Männer und zwei Buben möchten in einem Boot einen Fluss überqueren. Das Boot fasst entweder einen Mann oder zwei Buben. Wie viele Flussüberquerungen sind mit dem Boot insgesamt mindestens notwendig, um alle ans andere Ufer zu bringen?
(A) 3 (B) 5 (C) 9 (D) 11 (E) 13

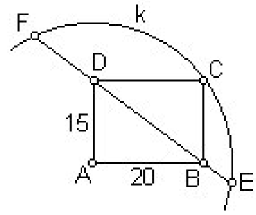
Antwort: C

Der folgende “Fuhrplan zeigt, dass das Problem mit 9 Überfahrten lösbar ist. Dabei sind vor dem Bindestrich die Personen angegeben, die nach der jeweiligen Fahrt am ersten Ufer sind. Das Ufer, an dem sich das Boot befindet, ist durch Fettdruck markiert.

1. Fahrt:	M1, M2	-	**B1, B2**
2. Fahrt:	**M1, M2, B1**	-	B2
3. Fahrt:	M1, B1	-	**M2, B2**
4. Fahrt:	**M1, B1, B2**	-	M2
5. Fahrt:	M1	-	**M2, B1, B2**
6. Fahrt:	**M1, B1**	-	M2, B2
7. Fahrt:	B1	-	**M1, M2, B2**
8. Fahrt:	**B1, B2**	-	M1, M2
9. Fahrt:		-	**M1, M2, B1, B2**

Weniger als 9 Überfahrten reichen nicht aus, um alle ans zweite Ufer zu bringen: Drei Überfahrten sind mindestens nötig, um alle vier Personen vom ersten Ufer zum zweiten Ufer zu bringen. Dazu kommen 2 weitere Überfahrten, die nötig sind, um das Boot jeweils ans erste Ufer zurückzubringen. Bei diesen zwei Überfahrten werden aber zwei Personen vom zweiten zum ersten Ufer zurückgebracht. Im sie wieder ans zweite Ufer zu holen, benötigt man zwei weitere Überfahrten. Dabei muss aber eine weitere Person ans erste Ufer zurückkehren, die ebenfalls wieder abgeholt werden muss, was zwei zusätzliche Überfahrten nötig macht. Daher benötigt man nicht weniger als 3+2+2+2 = 9 Überfahrten.

27) Es sei ABCD ein Rechteck und k ein Kreis mit Mittelpunkt A durch C. Wie lang ist die Sehne EF?



(A) $2 \cdot \sqrt{37 \cdot 13}$ (B) $2 \cdot \sqrt{20 \cdot 25}$ (C) 50
(D) 44 (E) 25

Antwort:* *A

Der Radius r von k ist gleich der Diagonalenlänge des Rechtecks ABCD, also nach Satz von Pythagoras $\sqrt{15^2 + 20^2} = 25$. Der Halbierungspunkt der Sehne EF ist zugleich Lotfußpunkt aus A auf EF. Sein Abstand d von A kann als Höhe im rechtwinkeligen Dreieck ABD berechnet werden: Es gilt $A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot d$ und damit

$$d = \frac{2\,A_{ABD}}{BD} = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12.$$

Nach Satz von Pythagoras erhalten wir schließlich

$$EF = 2 \cdot \sqrt{r^2 - d^2} = 2 \cdot \sqrt{(r+d)(r-d)} = 2 \cdot \sqrt{37 \cdot 13}$$

28) Was ist die Summe von Zähler und Nenner im folgenden Ausdruck, wenn er so weit wie möglich gekürzt wird?

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2001^2}\right)$$

(A) 2001 (B) 3002 (C) 4003 (D) 5002 (E) 6001

Antwort:* *B

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2001^2}\right) = \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \cdot \frac{4^2 - 1}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2001^2 - 1}{2001^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2000 \cdot 2002}{2001^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 1999^2 \cdot 2000^2 \cdot 2001 \cdot 2002}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 1999^2 \cdot 2000^2 \cdot 2001^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2002}{2 \cdot 2001} = \frac{1001}{2001}$$

29) Onkel Sepp hat einen erfolgreichen Tag beim Fischen erlebt. Er gibt seine drei größten Fische seinem Hund, womit er das Gesamtgewicht seines Fangs um 35% reduziert. Dann gibt er die drei kleinsten Fische seiner Katze, wmit er das Gesamtgewicht des bverbleibenden Fangs um 5/13 reduziert. Den Rest isst die Familie zum Abendmahl. Wie viele Fische hat Onkel Sepp gefangen?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

Antwort:* *C

Die drei schwersten Fische machen 35% = 7/20 des Gesamtgewichts des Fanges aus, also ist das Durchschnittsgewicht der drei schwersten Fische 7/60 des Gesamtgewichts.

Die drei leichtesten Fische wiegen 5/13 vom Rest, der seinerseits 65% des Gewichts des Gesamtfangs wiegt. Daher wiegen die drei leichtesten Fische

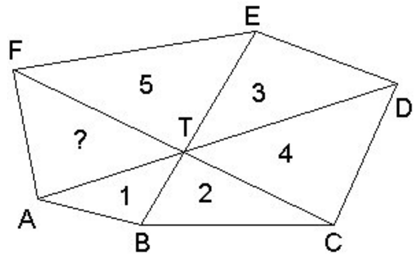
zusammen 25% = 5/20 des Gesamtgewichts, im Schnitt also 5/60 des Gesamtgewichts.
Die restlichen k Fische machen daher 40% = 2/5 des Gesamtgewichts aus. Daher ist das Durchschnittsgewicht dieser Fische 2/5k des Gesamtgewichts; es muss klarerweise geringer als das Durchschnittsgewicht der schwersten Fische und größer als das der leichstesten Fische sein. Daher erhalten wir

$$\frac{7}{60} > \frac{2}{5\,\mathrm{k}} > \frac{5}{60}, \quad 7\,\mathrm{k} > 24 > 5\,\mathrm{k}, \quad \frac{24}{5} > \mathrm{k} > \frac{24}{7}$$

und somit k = 4. Insgesamt hat Onkel Sepp 3+k+3 Fische, also 10 Fische gefangen.

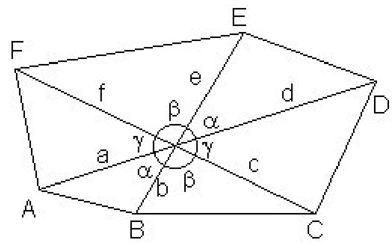
30) Die Diagonalen AD, BE und CF eines konvexen Sechsecks haben den gemeinsamen Punkt T. Die Fläche des Dreiecks FAT ist gleich

(A) 6/5 (B) 3 (C) 10/3
(D) 24/5 (E) eine andere Zahl



***Antwort:* C**

Bezeichnet man Streckenlängen und Winkel wie in der Abbildung, dann erhält man für die Flächeninhalte der einzelnen Teildreiecke



$$A_{ABT} = \frac{ab\cdot\sin\alpha}{2}, A_{BCT} = \frac{bc\cdot\sin\beta}{2}, A_{CDT} = \frac{cd\cdot\sin\gamma}{2},$$
$$A_{DET} = \frac{de\cdot\sin\alpha}{2}, A_{EFT} = \frac{ef\cdot\sin\beta}{2}, A_{FAT} = \frac{fa\cdot\sin\gamma}{2}.$$

Daraus folgt

$$A_{ABT}\cdot A_{CDT}\cdot A_{EFT} = A_{BCT}\cdot A_{DET}\cdot A_{FAT} = \frac{abcdef\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{8}$$

und somit

$$A_{FAT} = \frac{A_{ABT}\cdot A_{CDT}\cdot A_{EFT}}{A_{BCT}\cdot A_{DET}} = \frac{1\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3} = \frac{10}{3}$$