

Känguru der Mathematik 2003

Gruppe Student (11. Schulstufe und höher)

20.3.2003



3 Punkte Beispiele

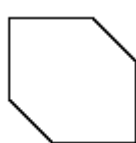
1) Bei der Zugfahrt nach Rimini ist Lisa im 7. Waggon von vorne gesessen, während Marco weiter vorne saß, und zwar im 6. Waggon von hinten. Zwischen ihren beiden Waggonen war genau ein weiterer. Wie viele Waggonen hatte der Zug?

- A) 15 B) 14 C) 13 D) 10 E) 9

2) Welche der folgenden Figuren entspricht der Deckfläche des abgebildeten Objekts?



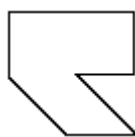
A)



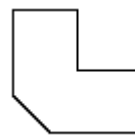
B)



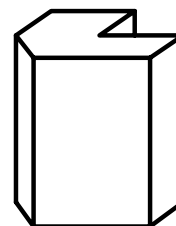
C)



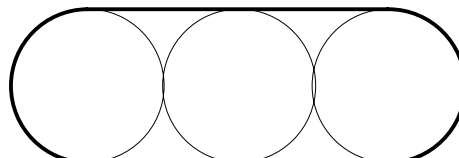
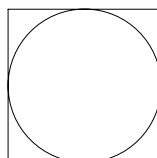
D)



E)



3) Die Fläche des abgebildeten Quadrats ist a und die Fläche jedes der Kreise ist b . Wie groß ist die Fläche, die von der dicken Linie eingeschlossen wird?



- A) $3b$ B) $2a+b$ C) $a+2b$ D) $3a$ E) $a+b$

4) Marlene berechnet das Volumen einer Kugel. Irrtümlich verwendet sie dabei die Länge des Durchmessers anstatt der Länge des Radius. Was kann sie mit ihrem Ergebnis machen, um die richtige Antwort zu erhalten?

- A) Durch 2 dividieren. B) Durch 4 dividieren. C) Durch 6 dividieren.
 D) Durch 8 dividieren. E) Durch 16 dividieren.

5) $2^{n+2003} + 2^{n+2003} =$

- A) 2^{n+2004} B) $2^{2n+4006}$ C) $4^{2n+4006}$ D) $4^{2n+2003}$ E) 4^{n+2003}

6) Welche der folgenden Zahlen ist für jede ganze Zahl n ungerade?

- A) $2n^2 + 2003$ B) $n^2 + 2003$ C) n^3 D) $n + 2004$ E) $2003n$

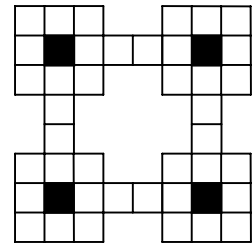
7) Eine Schule hat in den vier Jahren von 1999 bis 2002 durchschnittlich 325 Schüler pro Jahr aufgenommen. Für die fünf Jahre von 1999 bis 2003 ist der Durchschnitt um 20% höher. Wie viele Schüler hat die Schule im Jahr 2003 aufgenommen?

- A) 650 B) 600 C) 455 D) 390 E) 345

8) Die Menge aller Parameterwerte für m , für welche die Kurven $x^2+y^2=1$ und $y=x^2+m$ genau einen gemeinsamen Punkt besitzen, ist

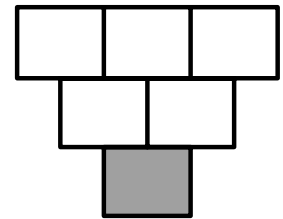
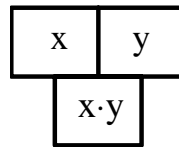
- A) $\{-5/4, -1, 1\}$ B) $\{-5/4, 1\}$ C) $\{-1, 1\}$ D) $\{-5/4\}$ E) $\{1\}$

9) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, alle weißen Einheitsquadrate mit 20 1×2 Rechtecken (Dominos) zu überdecken? (Hinweis: Zwei Möglichkeiten zählen als gleich, wenn alle Rechtecke ohne Verdrehen des Bretts an derselben Stelle liegen.)



- A) 8 B) 16 C) 32 D) 64 E) 100

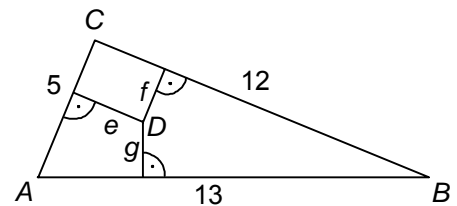
10) Wir bauen nach der angedeuteten Vorschrift ein Dreieck mit ganzen Zahlen größer als 1 in jedem Feld. Welche der vorgeschlagenen Zahlen kann nicht im grauen Feld stehen?



- A) 154 B) 100 C) 90 D) 88 E) 60

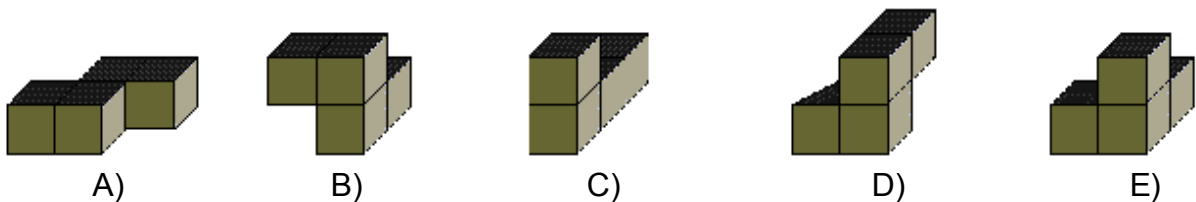
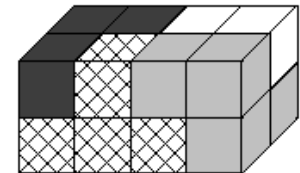
4 Punkte Beispiele

11) Es sei ABC ein Dreieck mit der Fläche 30 (siehe Figur). Seien D ein beliebiger Punkt im Inneren und e, f und g die Abstände von D zu den Dreiecksseiten wie abgebildet. Bestimme den Wert des Ausdrucks $5e + 12f + 13g$.



- A) 120 B) 90 C) 60 D) 30
E) Man kann den Wert nicht ohne Kenntnis des Punkts D bestimmen.

12) Ein Quader wurde aus vier Teilen gebaut, von denen jeder aus 4 Würfeln besteht. Wie sieht der weiße Teil aus?



13) Zwei weiße und acht graue Möwen fliegen über einen Fluss. Sie landen am Ufer und kommen in einer geraden Linie zu stehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden weißen nebeneinander zu stehen kommen?

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{9}$



14) $\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2002\sqrt{1+2003\sqrt{1+2004\sqrt{1+2005}}}}}} =$

- A) 2000 B) 2001 C) 2002 D) 2003 E) 2004

15) 12, 13 und 15 sind die Längen von zwei Seiten und der Höhe über der dritten Seite in einem spitzwinkligen Dreieck (nicht unbedingt in dieser Reihenfolge). Bestimme die Fläche des Dreiecks.

- A) 168 B) 80 C) 84 D) $6\sqrt{65}$ E) Die Fläche ist nicht eindeutig bestimmt.

16) Ein Computer druckt der Reihe nach die siebenten Potenzen aller positiven ganzen Zahlen aus, also $1^7, 2^7, 3^7, \dots$ usw. Wie viele dieser Zahlen liegen zwischen den Zahlen 5^{21} und 2^{49} ?

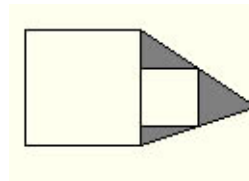
- A) 13 B) 8 C) 5 D) 3 E) 2

17) In welchem der folgenden Fälle ist ein Dreieck eindeutig aus den Bestimmungsstücken konstruierbar?

- A) $AB = 11\text{cm}, BC = 19\text{cm}, CA = 7\text{cm}$ B) $AB = 11\text{cm}, BC = 6\text{cm}, \angle BAC = 63^\circ$
 C) $AB = 11\text{cm}, CA = 7\text{cm}, \angle CBA = 128^\circ$ D) $AB = 11\text{cm}, \angle BAC = 63^\circ, \angle CBA = 128^\circ$
 E) In keinem Fall.

18) In der Abbildung sehen wir zwei Quadrate mit Seitenlänge 2 m bzw. 1 m. Was ist die Fläche des grauen Bereichs?

- A) 1 m^2 B) 2 m^2 C) $2\sqrt{2}\text{ m}^2$ D) 4 m^2
 E) Es hängt von der Lage der Quadrate ab.



19) $100^2 - 99^2 + 98^2 - \dots + 2^2 - 1^2 =$

- A) 2002 B) 2020 C) 4040 D) 5050 E) 8008

20) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 6$, $a > 0$, $a^3 + \frac{1}{a^3} =$ A) $4\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{6}$ C) 6
 D) $5\sqrt{6}$ E) $6\sqrt{6}$

5 Punkte Beispiele

21) Wir zeichnen zuerst ein gleichseitiges Dreieck und dann seinen Umkreis. Wir zeichnen dann ein Quadrat, das diesen Umkreis umschließt und dann seinen Umkreis. Danach schreiben wir diesem Kreis ein regelmäßiges Fünfeck um, ergänzen seinen Umkreis, und so weiter. Wir setzen auf diese Weise mit Kreisen und regelmäßigen Vielecken (von denen jedes um eine Seite mehr als sein Vorgänger hat) fort, bis wir schließlich das regelmäßige 16-Eck gezeichnet haben. Wie viele einzelne (disjunkte) Gebiete haben wir im Inneren dieses letzten Vielecks erzeugt?



- A) 232 B) 240 C) 248 D) 264 E) 272

22) Ein Punkt $P(x_P/y_P)$ liegt auf einem Kreis mit Mittelpunkt $M(2/2)$ und Radius r . Wir wissen, dass $y_P = r > 2$, und dass x_P, y_P und r lauter positive ganze Zahlen sind. Was ist der kleinstmögliche Wert von x_P ?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

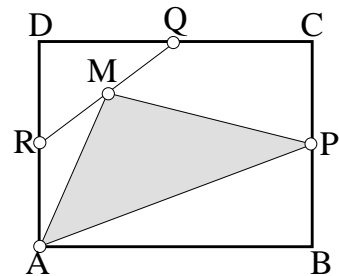
23) Es seien $A > B > 1$ positive ganze Zahlen, sodass A , B , $A-B$, $A+B$ lauter Primzahlen sind. Dann ist die Zahl $S = A+B+(A-B)+(A+B)$

- A) gerade. B) ein Vielfaches von 3. C) ein Vielfaches von 5.
D) ein Vielfaches von 7. E) eine Primzahl.

24) Eine Geschäftsführerin soll den Verkaufspreis eines Pullis festsetzen. Aus der Marktforschung weiß sie, dass 100 Leute in ihrem Gebiet einen Pulli kaufen werden, wenn sie sie um einen Stückpreis von € 75 verkauft. Für jede Preiserhöhung um € 5 kaufen um 20 Leute weniger einen Pulli. Für jede Preisreduktion um € 5 kaufen aber um 20 Leute mehr einen Pulli. Jeder Pulli kostet im Ankauf € 30. Welcher Verkaufspreis bringt dem Geschäft den größten Profit?

- A) € 85 B) € 80 C) € 75 D) € 70 E) € 65

25) Im Rechteck ABCD, sind P, Q und R die Mittelpunkte der Seiten BC, CD und AD. M ist der Mittelpunkt von QR. Welchen Bruchteil der Fläche von ABCD wird vom Dreieck $\triangle APM$ eingenommen?



- A) 1/4 B) 1/6 C) 3/8 D) 1/3 E) 5/16

26) Eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ ist folgendermaßen definiert :
 $a_0=4$; $a_1=6$; $a_{n+1}=(a_n)/(a_{n-1})$, für alle $n \geq 1$.

Dann ist a_{2003} gleich:

- A) 3/2 B) 2/3 C) 4 D) 1/4 E) 1/6

27) Es ist bekannt, dass $10^n + 1$ ein Vielfaches von 101 ist, und dass n eine 2-ziffrige Zahl ist. Was ist der größtmögliche Wert von n ?

- A) 92 B) 94 C) 96 D) 98 E) 99

28) Peter zeichnet auf jeder Kante eines Würfels einen Pfeil, womit er einen Vektor definiert. Er addiert alle 12 sich dabei ergebende Vektoren und erhält einen Summenvektor. Wie viele verschiedene Summenvektoren kann Peter auf diese Art erhalten?

- A) 25 B) 27 C) 64 D) 100 E) 125

29) Gegeben seien die 6 Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks und alle Strecken, die diese Punkte paarweise verbinden. Zwei solche Strecken, die einen gemeinsamen Punkt besitzen (auch ein gemeinsamer Endpunkt zählt als gemeinsamer Punkt) heißen „bekannt“. Haben zwei Strecken keinen gemeinsamen Punkt, so heißt das Streckenpaar „un-bekannt“. Wie viele „un-bekannte“ Streckenpaare gibt es?

- A) 26 B) 28 C) 30 D) 34 E) 36

30) Es sei f ein Polynom in x , für das $f(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$ gilt. Bestimme $f(x^2 - 1)$.

- A) $x^4 - 4x^2$ B) x^4 C) $x^4 + 4x^2 - 4$ D) $x^4 - 4$ E) Eine andere Antwort.