

Känguru der Mathematik 2004

Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)

Lösungen



- 3 Punkte Beispiele -

1) *Wie viel ist $(1 - 2) - (3 - 4) - (5 - 6) - (7 - 8) - (9 - 10) - (11 - 12)$?*

- A) 13 B) 0 C) -6 D) 6 E) 4

Antwort: E

$$(1 - 2) - (3 - 4) - (5 - 6) - (7 - 8) - (9 - 10) - (11 - 12) = -1 - 5 \cdot (-1) = -1 + 5 = 4$$

2) *Peter hat 2004 Murmeln. Die Hälfte davon ist blau, ein Viertel ist rot und ein Sechstel ist grün. Wie viele haben eine andere Farbe?*

- A) 167 B) 334 C) 501 D) 1002 E) 1837

Antwort: A

Von den 2004 Murmeln sind 1002 blau, 501 rot und 334 grün. Zusammen sind das 1837 Murmeln. Daher haben $2004 - 1837 = 167$ Murmeln eine andere Farbe.

3) *Die Oberfläche einer Pyramide besteht aus 7 Flächen. Wie viele Kanten hat die Pyramide?*

- A) 8 B) 9 C) 12 D) 18 E) 21

Antwort: C

Von den 7 Begrenzungsflächen ist eine die Grundfläche, die restlichen 6 sind dreieckige Seitenflächen. Daher handelt es sich um eine 6-seitige Pyramide. Sie hat als Grundfläche ein 6-eck mit 6 Kanten; jede weitere Kante verbindet einen der 6 Eckpunkte der Grundfläche mit der Spitze, also gibt es 6 Kanten zur Spitze. Insgesamt hat die Pyramide damit 12 Kanten.

4) *Der Grundriss eines Gebäudes ist rechteckig mit den Maßen 40 m x 60 m. Auf den Bauplänen hat der Grundriss den Umfang 100 cm. In welchem Maßstab ist der Grundriss gezeichnet?*

- A) 1 : 100 B) 1 : 150 C) 1 : 160 D) 1 : 170 E) 1 : 200

Antwort: E

Der Umfang des Gebäudes beträgt in Wirklichkeit $2 \cdot (40\text{m} + 60\text{m}) = 200\text{m}$, ist also 200-mal so groß wie auf dem Plan, wo der Grundriss des Gebäudes den Umfang $100\text{cm} = 1\text{m}$ hat.

5) *Timmy und Tommy spielen Tischtennis. Wenn Timmy fünf Punkte mehr hätte, hätte er doppelt so viele wie Tommy. Hätte er sieben Punkte weniger, hätte er halb so viele wie Tommy. Wie viele Punkte hat Timmy?*

- A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 15

Antwort: D

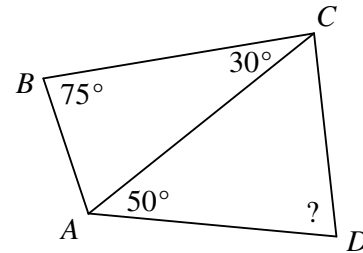
Hat Timmy x Punkte, Tommy y Punkte, so gilt

$$y = \frac{x+5}{2} = 2(x-7).$$

Daraus folgt $x + 5 = 4x - 28$, also $3x = 33$ und somit $x = 11$.

6) Einige Winkel sind in der Abbildung eingezeichnet. Es gilt $BC = AD$. Wie groß ist der Winkel $\angle ADC$?

- A) 30° B) 50° C) 55° D) 65° E) 70°



Antwort: D

Zunächst erhalten wir $\angle CAB = 180^\circ - (75^\circ + 30^\circ) = 75^\circ$. Daher ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichschenkelig mit Basis AB , und es gilt $AC = BC = AD$. Das bedeutet, dass das Dreieck $\triangle ACD$ ebenfalls gleichschenkelig ist (Basis CD). Die Winkel an der Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks sind gleich groß, also gilt

$$\angle ADC = \angle ACD = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ.$$

7) In einem Korb befinden sich Steinpilze und Eierschwammerl. Zusammen sind es 30 Schwammerl. Wenn ich beliebige 12 davon aus dem Korb nehme, befindet sich unter den Entnommenen sicher mindestens ein Steinpilz. Entnehme ich beliebige 20, befindet sich unter diesen sicher mindestens ein Eierschwammerl. Wie viele Steinpilze befinden sich im Korb?

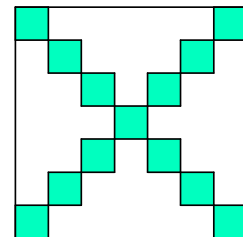
- A) 11 B) 12 C) 19 D) 20 E) 29

Antwort: C

Wenn unter beliebigen 12 Schwammerln sicher mindestens ein Steinpilz und unter beliebigen 20 Schwammerln sicher mindestens ein Eierschwammerl ist, dann sind im Korb höchstens 11 Eierschwammerl und höchstens 19 Steinpilze. Weil aber insgesamt genau 30 Schwammerl im Korb sind, müssen es genau 11 Eierschwammerl und genau 19 Steinpilze sein.

8) In einem Quadrat mit der Seitenlänge 2003 befinden sich in den Diagonalen lauter gefärbte kleine Einheitsquadrate, wie in der Figur für ein Quadrat mit der Seitenlänge 7 angedeutet. Wie groß ist die weiße Fläche?

- A) 2002^2 B) 2002×2001 C) 2003^2 D) 2003×2004 E) 2004^2

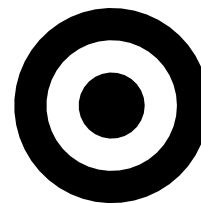


Antwort: A

Entlang der einen Diagonale gibt es 2003 Einheitsquadrate, längs der anderen 2002 weitere Einheitsquadrate. Insgesamt sind also $2003 + 2002$ Einheitsquadrate gefärbt. Der Inhalt der weißen Fläche ist daher

$$2003^2 - 2003 - 2002 = 2002 \times 2003 - 2002 = 2002^2.$$

9) Eine Zielscheibe besteht aus einem schwarzen Kreis mit einem weißen und schwarzen Ring. Die Breiten beider Ringe sind jeweils gleich dem Radius der inneren schwarzen Kreisscheibe. Wie viel Mal so groß wie die Fläche des kleinen Kreises ist die Fläche des schwarzen Rings?



- A) 2 Mal B) 3 Mal C) 4 Mal D) 5 Mal E) 6 Mal

Antwort: D

Ist der Radius des kleinen schwarzen Kreises r , dann ist der Außenradius des weißen Kreisrings $2r$, der des schwarzen Kreisrings $3r$. Der schwarze Kreis hat den Flächeninhalt $r^2\pi$, der schwarze Kreisring den Flächeninhalt $9r^2\pi - 4r^2\pi = 5r^2\pi$.

10) Drei Mädchen haben 770 Nüsse gesammelt und möchten sie nun im Verhältnis ihres Alters aufteilen. Für jeweils 3 Nüsse, die Oxana nimmt, nimmt Irmi 4. Für jeweils 7 Nüsse, die Natalie nimmt, nimmt Irmi 6. Wie viele Nüsse nimmt das jüngste Mädchen?

- A) 264 B) 256 C) 218 D) 198 E) 180

Antwort: D

Es sei o das Alter von Oxana, i das von Irmi und n das von Natalie.

Dann gilt

$$o : i = 3 : 4 = 9 : 12$$

$$n : i = 7 : 6 = 14 : 12$$

Daraus folgt $o : i : n = 9 : 12 : 14$. Erhält Oxana, die Jüngste, $9t$ Nüsse, so erhalten Irmi und Natalie $12t$ beziehungsweise $14t$.

Wegen $9t + 12t + 14t = 35t = 770$ gilt $t = 770/35 = 22$. Daher erhält Oxana $9 \cdot 22 = 198$ Nüsse.

- 4 Punkte Beispiele -

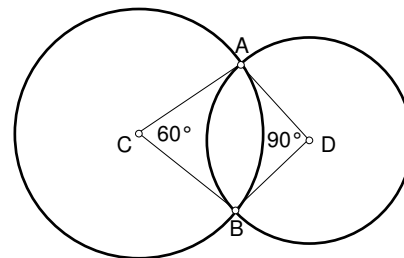
11) Jede von 5 Mathematikerinnen denkt an eine Zahl, die entweder eins, zwei oder vier sein kann. Sie multiplizieren diese 5 Zahlen miteinander. Welches Ergebnis könnte dabei herauskommen?

- A) 100 B) 120 C) 256 D) 768 E) 2048

Antwort: C

Keine der drei zur Wahl stehenden Zahlen 1, 2 und 4 enthält einen Primfaktor, der von 2 verschieden ist. Daher muss das Ergebnis eine Potenz von 2 nicht größer als $4^5 = 1024$ sein. 100 und 120 enthalten aber den Primfaktor 5, 120 und 768 den Primfaktor 3. Daher ist von den angegebenen Zahlen nur 256 ein mögliches Ergebnis.

12) Die Kreise mit Mittelpunkten C und D schneiden einander wie abgebildet in A und B . Es gilt $\angle ACB = 60^\circ$ und $\angle ADB = 90^\circ$. In welchem Verhältnis steht der Radius des großen Kreises zu dem des kleinen?



- A) 4:3 B) $\sqrt{2}:1$ C) 3:2 D) $\sqrt{3}:1$ E) 2:1

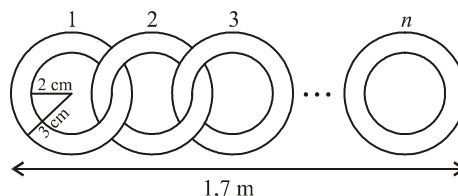
Antwort: B

Wir bezeichnen den Radius des großen Kreises mit R , den des kleinen mit r . Im (wegen $AC = BC = R$) gleichschenkeligen Dreieck $\triangle ABC$ schließen die Schenkel AC und BC einen Winkel von 60° ein, also ist dieses Dreieck sogar gleichseitig. Daher ist auch die Länge der Hypotenuse im (wegen $AD = BD = r$, $AD \perp BD$) gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABD$ gleich R , und wir erhalten nach Satz von Pythagoras

$$R^2 = r^2 + r^2, R^2 = 2r^2, R^2 : r^2 = 2 : 1, R : r = \sqrt{2} : 1$$

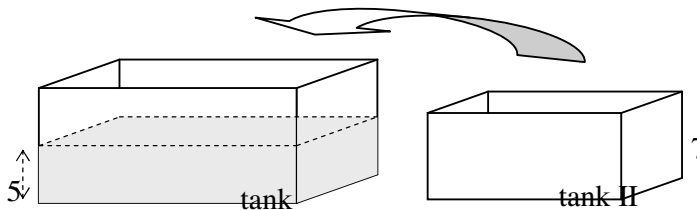
13) Ringe werden wie abgebildet zu einer Kette zusammengefügt. Die Gesamtlänge der Kette ist 1,7 m. Wie viele Ringe werden dabei verwendet?

- A) 21 B) 30 C) 17 D) 85 E) 42

**Antwort: E**

Der erste Ring sorgt für eine "Kette" der Länge 6cm, jeder weitere Ring verlängert die Kette um 4cm. Wegen $1,7\text{m} = 170\text{cm} = 6\text{cm} + 41 \cdot 4\text{cm}$ besteht die Kette aus 42 Ringen.

14) Im großen Tank ist die Bodenfläche 2dm^2 . Das Wasser steht darin 5cm hoch. Ich stelle den 7cm hohen kleinen Tank (mit der Bodenfläche 1dm^2) hinein. Das Wasser im großen Tank steigt und fließt in den kleinen teilweise über. Wie hoch steht schließlich das Wasser im kleinen Tank?



- A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 4 cm E) 5 cm

Antwort: C

Die Grundfläche des großen Tanks ist doppelt so groß wie die des kleinen. Wäre der kleine Tank "hoch genug", würde sich beim Eintauchen des kleinen Tanks die Höhe des Wasserstands im großen Tank verdoppeln, das Wasser also ein Prisma mit Grundfläche 1dm^2 und Höhe 10cm füllen. Weil der kleine Tank aber nur 7cm hoch ist, fließen die obersten 3cm dieses Prismas in den kleinen Tank über, der ebenfalls die Grundfläche 1dm^2 hat. Daher steht das Wasser im kleinen Tank schließlich 3cm hoch.

15) Das Ziffernblatt einer Uhr ist so gestaltet, dass der Stundenzeiger 4 cm lang ist und der Minutenzeiger 8 cm lang. Wie groß ist das Verhältnis der Distanzen, die die Spitzen der Zeiger zwischen 2 Uhr und 5 Uhr zurücklegen?

- A) 1:2 B) 1:4 C) 1:6 D) 1:12 E) 1:24

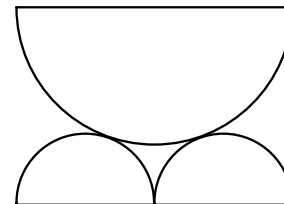
Antwort: E

Der Stundenzeiger braucht für eine Umdrehung 12 Stunden, der Minutenzeiger nur 1 Stunde. Daher dreht sich der Minutenzeiger 12-mal so schnell wie der

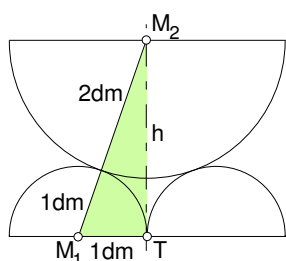
Stundenzeiger. Wären beide Zeiger gleich lang, so würde – unabhängig davon, welcher Zeitabschnitt konkret betrachtet wird – die Spitze des Minutenzeigers stets einen 12-mal so langen Weg beschreiben wie die des Stundenzeigers. Weil der Minutenzeiger aber doppelt so lang ist, verdoppelt sich der Weg seiner Spitze nochmals, daher ist das gesuchte Verhältnis 1 : 24.

16) Toni baut aus drei halben Baumstämmen eine Sitzbank. Die beiden unteren Stämme haben den Durchmesser 2 dm, und der obere hat den Durchmesser 4 dm. Wie hoch ist die Sitzbank in dm?

- A) 3 B) $\sqrt{8}$ C) 2,85 D) $\sqrt{10}$ E) 2,5



Antwort: B



Das markierte Dreieck ist rechtwinklig, weil die Seite, deren Länge gleich der Höhe h der Bank ist, Symmetrieachse des Querschnitts der Bank ist. Die andere Kathetenlänge ist der Radius 1 dm eines kleinen Stammes, die Hypotenusenlänge setzt sich aus den Radien eines kleinen und des großen Stammes zusammen, beträgt also 3 dm. Nach Satz von Pythagoras gilt dann

$$h = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}.$$

17) Bei einem Quiz mit 20 Fragen bekommt man sieben Punkte für jede richtige Antwort und keinen Punkt für eine nicht beantwortete Frage. Zwei Punkte werden für jede falsche Antwort abgezogen. Andreas erreicht 87 Punkte. Wie viele Fragen hat er ausgelassen?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Antwort: D

Ist r die Anzahl von Andreas' richtigen Antworten, f die Anzahl der falschen Antworten, so gilt

$$7r - 2f = 87$$

$$7r = 87 + 2f$$

$$r = \frac{87 + 2f}{7} = 12 + \frac{3 + 2f}{7}$$

Weil r und f natürliche Zahlen sein müssen, muss 7 ein Teiler von $3 + 2f$ sein. Das ist genau dann der Fall, wenn f einen der Werte 2, 9, 16, ... annimmt, also eine Zahl der Form $2 + 7t$ (mit $t \in \mathbb{N}$) ist. Dann ergibt sich

$$r = 12 + \frac{3 + 2f}{7} = 12 + \frac{3 + 2(2 + 7t)}{7} = 12 + \frac{7 + 14t}{7} = 13 + 2t$$

$$r + f = (13 + 2t) + (2 + 7t) = 15 + 9t$$

Die Zahl $r + f$ gibt die Anzahl der von Andreas beantworteten Fragen an, ist also nicht größer als 20. Das ist nur für $t = 0$ der Fall: Andreas hat also 15 Fragen beantwortet; 5 Fragen hat er ausgelassen.

18) Igor hat 16 Spielkarten: 4 Pik (♠), 4 Kreuz (♣), 4 Karo (♦) und 4 Herz (♥). Er möchte sie in folgendem Quadrat so auflegen, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jede der 4 Farben vorkommen. Du siehst schon, wie er begonnen hat. Auf wie viele Arten kann er das Quadrat fertig stellen?

♠			
♣	♠		
	♦		
	♥		

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 16 E) 128

Antwort: C

In das gelb markierte Feld (erste Zeile von oben, zweite Spalte von links) kann Igor nur Kreuz (♣) legen. In die blau markierten Felder am linken Rand gehören Herz und Karo, und zwar wegen der rechts daneben liegenden Karten in die linke untere Ecke Karo, darüber Herz. So weit hat Igor also keine Wahlmöglichkeiten.

♠	♣	A	B
♣	♠	B	A
♥	♦	X	Y
♦	♥	Y	X

Nun liegen sowohl in der ersten als auch in der zweiten Zeile schon je ein Pik und ein Kreuz, sowohl in der dritten als auch in der vierten Zeile schon je ein Herz und ein Karo. Daher fehlen im rot markierten "rechten oberen Viertel" noch zwei Karo und zwei Herz, im grün markierten "rechten unteren Viertel" noch zwei Pik und zwei Kreuz. Für jeden der beiden Bereiche gilt: Mit der ersten Karte, die Igor in diesen Bereich legt, ergibt sich die ("diagonale") Anordnung der restlichen drei Karten zwangsläufig. Daher hat Igor in zwei Situationen (Legen der ersten "roten" Karte ins rechte obere Viertel, Legen der ersten "schwarzen" Karte ins rechte untere Viertel) zwei Wahlmöglichkeiten, insgesamt also 4 verschiedene Möglichkeiten, das Quadrat fertig zu stellen.

19) Wie viele ganze Zahlen gibt es zwischen 100 und 200, die nur aus den Primfaktoren 2 und 3 zusammengesetzt sind?

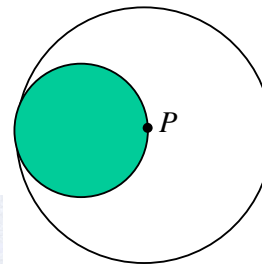
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6


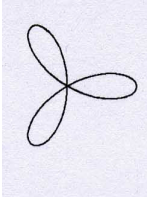
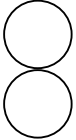

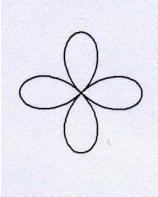
Antwort: D

Lösung 1: Die gesuchten Zahlen sind $108 = 2^2 \cdot 3^3$, $128 = 2^7$, $144 = 2^4 \cdot 3^2$, $162 = 2 \cdot 3^4$ und $192 = 2^6 \cdot 3$.

Lösung 2: 200 ist genau doppelt so groß wie 100. Daher kann man (durch wiederholtes Verdoppeln) zu jeder Zahl $n < 200$ genau ein Vielfaches von der Form $2^k \cdot n$ (mit $k \in \mathbb{N}$) bilden, für das $100 \leq 2^k \cdot n < 200$ gilt. Speziell sind die gesuchten Zahlen genau derartige Vielfache von Potenzen von 3. Weil $3^4 = 81$ die höchste Potenz von 3 mit natürlichem Exponenten ist, die kleiner als 200 ist, gibt es zu jeder der 5 Zahlen $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $81 = 3^4$ genau ein Vielfaches v mit $100 \leq v < 200$, das nur aus Primfaktoren 2 und 3 zusammengesetzt ist. Weil 100 den Primfaktor 5 enthält, gilt schließlich sogar, wie gefordert, $100 < v < 200$.

20) Im Bild sehen wir zwei Kreise, die sich von innen berühren. Der Radius des kleineren Kreises ist halb so groß wie der des großen. Der kleine Kreis rollt ohne zu rutschen innen am großen entlang. Welche geometrische Form hat die Bahn des Punktes P, der am Rand des kleineren Kreises befestigt ist?



- A)  B)  C)  D)  E) 

Antwort: A

Wir betrachten zunächst die Bahn, auf der sich der Berührungspunkt X des kleinen Kreises k in Ausgangslage beim Abrollen bewegt.

Nach einiger Zeit berührt der gerollte kleine Kreis k° den großen Kreis K in T , der ursprüngliche Berührungspunkt X liegt nun in X° . Weil k ohne zu rutschen auf K rollt, sind die Kreisbögen XT auf K und $X^\circ T$ auf k° gleich lang. Weil der Radius von K doppelt so groß wie der von k° ist, bedeutet das, dass der zum Bogen XT auf K gehörende Zentriwinkel

$\angle XMT$ halb so groß ist wie der zu $X^\circ T$ gehörende Zentriwinkel $\angle X^\circ NT$ auf k° , d.h.

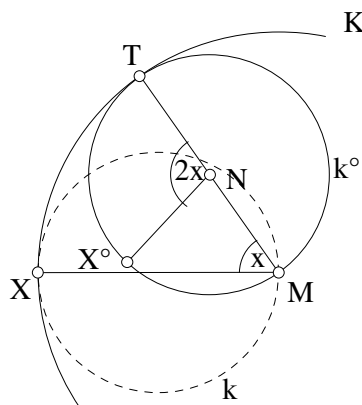
$$\angle X^\circ NT = 2 \cdot \angle XMT$$

Aus der Tatsache, dass der Radius von k° halb so groß ist wie der von K , folgt weiters, dass der Mittelpunkt M von K dem Punkt T auf k° diametral gegenüber liegt. Nach Peripheriewinkelsatz gilt für den Peripheriewinkel $\angle X^\circ MT$

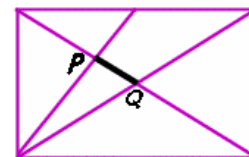
$$\angle X^\circ MT = \frac{1}{2} \cdot \angle X^\circ NT = \angle XMT,$$

also liegt X° auf MX , solange $\angle XMT$ nicht größer als 90° wird. Wird $\angle XMT$ größer als 90° , aber nicht größer als 180° , so wandert X° auf der Geraden MX über M hinaus weiter.

Der Punkt P wird beim Abrollen des kleinen Kreises zum Berührungspunkt mit K , wenn P° höchster oder tiefster Punkt von k° ist. Für seine Bahn gelten dann dieselben Überlegungen wie für die Bahn von X , also wandert er beim Abrollen auf dem senkrechten Durchmesser von K hin und her.

**- 5 Punkte Beispiele -**

21) In einem Rechteck werden die Diagonalen und die Verbindung eines Eckpunkts mit dem Mittelpunkt einer Seite eingezeichnet. Wie viel Mal so lang wie die Strecke PQ ist die Diagonale?



A) Es hängt vom Rechteck ab.

B) 6

C) $\frac{13}{3}$

D) 4

E) 3

Antwort: B

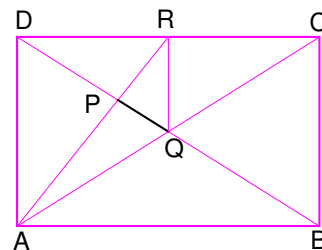
Lösung 1: Q halbiert beide Diagonalen des Rechtecks. Nach Strahlensatz ist dann die Strecke, die Q mit dem Mittelpunkt R der Seite CD verbindet, parallel zu AD und halb so lang wie AD . Das bedeutet, dass die Dreiecke $\triangle APD$ und $\triangle RPQ$ (zentrisch) ähnlich bezüglich P sind, also gilt

$$PQ : PD = QR : AD = 1 : 2,$$

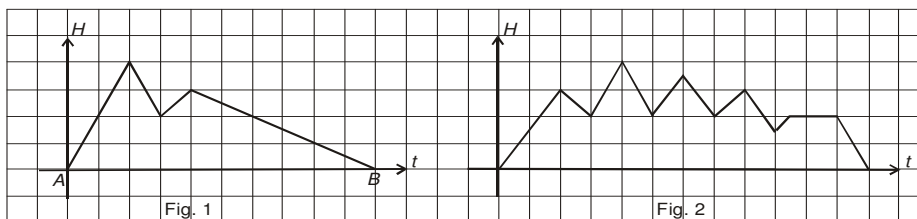
$$PQ : QD = PQ : (PQ + PD) = 1 : 3$$

Folglich ist QD dreimal so lang wie PQ , BD also 6-mal so lang wie PQ .

Lösung 2: P ist Schwerpunkt im Dreieck $\triangle ACD$, also ist QD dreimal so lang wie PQ , BD sechsmal so lang wie PQ .



22) Ein zerstreuter Bergsteiger wandert über einen Berg, dessen Profil wir in Fig.1 sehen, von A nach B. Er lässt immer wieder etwas liegen und muss umkehren. Seine Höhe über dem Meer zu jedem Zeitpunkt sehen wir in Fig. 2. Wie oft hat er umkehren (wieder in Richtung A gehen) müssen?



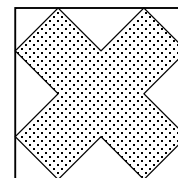
- A) 1 Mal
 B) 2 Mal
 C) 3 Mal
 D) 4 Mal
 E) 5 Mal

Antwort: C

Aus dem rechten Diagramm ist ablesbar, dass der Wanderexperte vor dem Erreichen des ersten (höheren) Gipfels ein erstes Mal umkehrt. Danach steigt er zum ersten Gipfel auf und ohne Rast bis zur Senke zwischen den beiden Gipfeln ab. In weiterer Folge steigt er wieder höher als bis zur Höhe des zweiten Gipfels auf. Das bedeutet, dass er von der Senke zurück in Richtung Gipfel 1 geht. Dann steigt er zur Senke ab, überschreitet ohne Rast den zweiten Gipfel und bringt etwa den halben Abstieg nach B hinter sich, bevor er wieder ein Stück zurück geht. Nach einer Rast beendet er schließlich die Wanderung. Insgesamt hat er also dreimal etwas liegen gelassen.

23) Im Bild sehen wir ein Quadrat und ein gleichseitiges, kreuzförmiges 12-eck. Das 12-eck hat den Umfang 36 cm. Wie groß ist die Fläche des Quadrats in cm^2 ?

- A) 48 B) 72 C) 108 D) 115.2 E) 144



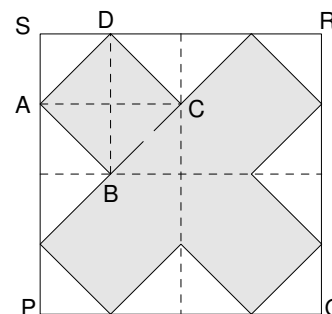
Antwort: B

Wenn alle Seiten des 12-ecks gleich lang sind und sein Umfang 36cm beträgt, dann ist die Seitenlänge des 12-ecks und folglich auch die Seitenlänge des Quadrats ABCD 3cm. Daraus folgt

$$AC = 3\sqrt{2}\text{cm}, \quad PQ = 2 \cdot AC = 6\sqrt{2}\text{cm}$$

Für den Flächeninhalt A_{PQRS} des großen Quadrats PQRS erhalten wir damit

$$A_{PQRS} = PQ^2 = 72\text{cm}^2.$$



24) Wie viele dreiziffrige Zahlen n , nicht größer als 200, haben die Eigenschaft, dass $(n+1)(n+2)(n+3)$ durch 7 teilbar ist?

- A) 43 B) 31 C) 34 D) 28 E) 39

Antwort: A

$(n+1)(n+2)(n+3)$ ist durch 7 teilbar genau dann, wenn einer der Faktoren $n+1$, $n+2$ oder $n+3$ ein Vielfaches von 7 ist. Daher ist die Frage gleichwertig mit der Frage, für wie viele natürlichen Zahlen n mit $100 \leq n \leq 200$ eine der Zahlen $n+1$, $n+2$ oder $n+3$ ein Vielfaches von 7 ist. Das kleinste in Frage kommende Vielfache von 7 ist $105 = 7 \cdot 15$, das größte $203 = 7 \cdot 29$.

Jede der 14 Zahlen $105 = 7 \cdot 15$, $112 = 7 \cdot 16$, ... $196 = 7 \cdot 28$ liefert 3 mögliche Werte für n , weil er gleich $n+1$, $n+2$ oder $n+3$ sein kann. $203 = 7 \cdot 29$ liefert nur einen zulässigen Wert für n : Wird $n+3 = 203$ gesetzt, erhalten wir $n = 200$. Daher ist die gesuchte Anzahl $3 \cdot 14 + 1 = 43$.

25) Ein 1 cm dicker Teppich wird zu einem Zylinder mit dem Durchmesser 1 m dicht zusammengerollt. Was ist die beste Schätzung für die Länge des Teppichs?

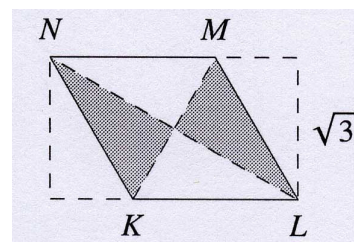
- A) 20m B) 50m C) 75m D) 150m E) 300m

Antwort: C

Der Querschnitt des Teppichs ist in ausgelegtem Zustand (annähernd) ein Rechteck mit Länge x m, Breite (Höhe) $1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$ und Flächeninhalt $0,01x \text{ m}^2$. In aufgerolltem Zustand erhält man als Querschnitt einen Kreis mit Durchmesser 1 m , Radius $0,5 \text{ m}$ und Flächeninhalt $0,25\pi \text{ m}^2$. Da die Querschnittsfläche in beiden Fällen annähernd gleich sein muss, ergibt sich $0,01x = 0,25\pi$, also $x = 25\pi$. Wegen $\pi \approx 3$ ist $x = 75$ die beste Schätzung.

26) Der Rhombus KLMN entsteht wie abgebildet dadurch, dass die Ecken eines Rechtecks zu dessen Mittelpunkt hineingefaltet werden. Die kürzere Seite des Rechtecks hat die Länge $\sqrt{3}$. Was ist die Fläche des Rhombus?

- A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) $3\sqrt{2}$ D) 4 E) $2\sqrt{3}$



Antwort: E

Weil die Dreiecke $\triangle AKN$ und $\triangle XKN$ zu einander symmetrisch liegen bezüglich KN , gilt $AN = XN$ und damit $LN = 2 \cdot AN = 2\sqrt{3}$. Wegen $AN \perp AL$ folgt daraus nach Satz von Pythagoras

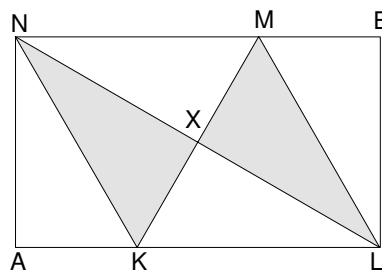
$$AL = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12 - 3} = 3.$$

Damit erhalten wir für den Flächeninhalt A_{ALBN} des Rechtecks $ALBN$

$$A_{ALBN} = AL \cdot AN = 3\sqrt{3}$$

und folglich für den Flächeninhalt A_{KLMN} des Rhombus

$$A_{KLMN} = \frac{4}{6} \cdot A_{ALBN} = 2\sqrt{3}$$



27) Es sind 200 Zahlen gegeben. Zunächst sind sie alle gleich 0. Im ersten Schritt wird zu jeder Zahl 1 addiert. Im zweiten Schritt wird zu jeder zweiten Zahl (von links beginnend) 1 addiert. Im dritten Schritt wird zu jeder dritten Zahl 1 addiert usw. Welche Zahl ist nach dem 200. Schritt an der 120. Stelle von links?

- A) 16 B) 12 C) 20 D) 24 E) 32

Antwort: A

Bezeichnet a_n die n -te Zahl von links, dann wird a_n im k -ten Schritt genau dann um 1 erhöht, wenn n durch k teilbar ist. Somit wird a_n genau so oft um 1 vergrößert,

wie n Teiler hat. Am 120. Stelle steht also schon nach 120 Schritten die Anzahl der Teiler von 120, und diese Zahl wird dann nie mehr erhöht.
Wegen $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ hat 120 genau $(3+1)(1+1)(1+1) = 16$ Teiler.

28) Wie viele 10-ziffrige Zahlen $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10}}$, deren Ziffern nur 0 oder 1 sein können ($a_1 = 1$), gibt es mit der Eigenschaft, dass $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$ gilt?

- A) 2^9 B) 126 C) 81 D) 32 E) 64

Antwort: B

Von den 4 Ziffern a_3, a_5, a_7 und a_9 können 0, 1, 2, 3 oder alle 4 gleich 1 sein.
Allgemein gilt: Sind k dieser 4 Ziffern gleich 1 (Anzahl der verschiedenen

Möglichkeiten ist $\binom{4}{k}$), dann müssen von den 5 Ziffern a_2, a_4, a_6, a_8 und a_{10} genau

$k+1$ gleich 1 sein, weil sonst die Gleichung nicht erfüllt ist ($\binom{5}{k+1}$ verschiedene

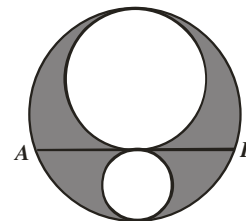
Auswahlmöglichkeiten). Weil jede Auswahl der k Ziffern auf der linken Seite der Gleichung mit jeder passenden Auswahl der $k+1$ Ziffern auf der rechten Seite kombiniert werden kann, ist die Anzahl der in der Angabe beschriebenen Zahlen gleich

$$\binom{4}{0} \cdot \binom{5}{1} + \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{3} + \binom{4}{3} \cdot \binom{5}{4} + \binom{4}{4} \cdot \binom{5}{5} =$$

$$= 1 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 5 + 40 + 60 + 20 + 1 = 126$$

29) Der graue Bereich hat die Fläche 2π . Wie lang ist die Strecke AB?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Es ist nicht eindeutig.



Antwort: D

Weil die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der beiden weißen Kreise den großen Kreis in den Endpunkten X und Y eines Durchmessers schneidet, ist das Dreieck AXY rechtwinkelig; aus Symmetriegründen ist der gemeinsame Berührungspunkt F von AB mit den beiden kleinen Kreisen zugleich Höhenfußpunkt auf der Hypotenuse XY .

Ist nun $AB = 2x$ (also $AF = x$), $MX = r$ und $NY = R$, dann hat der große Kreis den Radius $r+R$ der graue Bereich die Fläche

$$A = (r+R)^2 \pi - r^2 \pi - R^2 \pi = 2rR\pi.$$

Daraus folgt $rR = 1$.

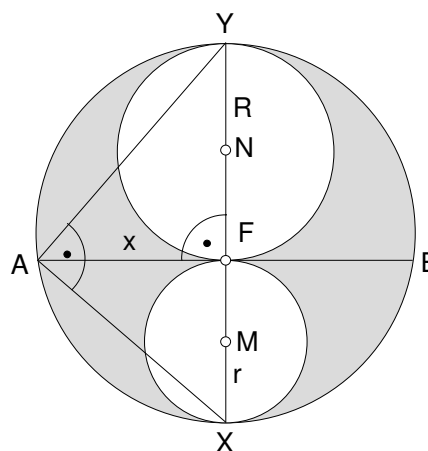
Andererseits gilt nach Höhensatz nach Höhensatz im Dreieck AXY

$$AF^2 = XF \cdot YF,$$

also

$$x^2 = 2r \cdot 2R = 4rR = 4.$$

Daraus folgt $x = 2$, $AB = 2x = 4$.



30) Auf einer Tafel werden alle Zahlen von 1 bis 10 000 aufgeschrieben. Alle Zahlen, die nicht durch 5 oder 11 teilbar sind, werden wieder gelöscht. Welche Zahl steht danach an der 2004. Stelle?

- A) 1000 B) 5000 C) 10 000 D) 6545 E) 7348

Antwort: E

Von den Zahlen von 1 bis 55 bleiben genau die 11 Vielfachen 5, 10, ..., 55 von 5 und darüber hinaus die weiteren 4 Vielfachen (neben 55) 11, 22, 33 und 44 von 11 an der Tafel. Von den ersten 55 positiven ganzen Zahlen bleiben also 15 übrig; die 15. Zahl ist 55. Von den jeweils nächsten 55 Zahlen bleiben wieder jeweils 15 übrig; an der $15n$ -ten Stelle steht dabei die Zahl $55n$.

Nun gilt $2004 : 15 = 133, 9$ Rest. Das bedeutet, dass an 2004. Stelle die Zahl steht, die als neunte Zahl nach $55 \cdot 133 = 7315$ nicht gestrichen wird. Die nicht gestrichenen Zahlen sind um 5, 10, 11, 15, 20, 22, 25, 30, 33, 35, 40, 44, ... größer als 7315. Die gesuchte Zahl ist daher $7315 + 33 = 7348$.