Känguru der Mathematik 2005
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich - 17.3.2005
Lösungen

- 3 Punkte Beispiele -

1) Helga lebt mit ihrem Vater, ihrer Mutter, ihrem Bruder, einem Hund, zwei Katzen, zwei Wellensittichen und vier Goldfischen. Wie viele Beine haben alle im Haushalt zusammen?

A) 24 B) 28 C) 22 D) 32 E) 13

Antwort A

Alle vier menschlichen Haushaltsmitglieder und die zwei Wellensittiche haben je zwei Beine, während der Hund und die zwei Katzen je vier und die vier Goldfische keine Beine haben. Ohne kleinere häusliche Mitbewohner, deren Beinanzahl weniger klar ist (und über die man nicht so gerne spricht) ist die Gesamtzahl der Beine aller Haushaltsmitglieder gleich

$$6\cdot 2 + 3\cdot 4 = 24.$$

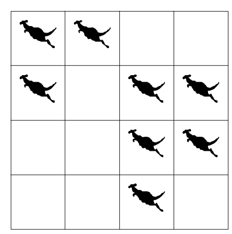
2) Claire belegt beim Känguruwettbewerb an ihrer Schule den 50. Platz von vorne und gleichzeitig den 50. Platz von hinten. Wie viele Schüler ihrer Schule haben am Wettbewerb teilgenommen?

A) 50 B) 75 C) 99 D) 100 E) 101

Antwort C

Wenn Claire gleichzeitig den 50. Platz von vorne und von hinten belegt, dann waren je 49 Mitschüler[1] besser und schlechter als sie. Zusammen mit Claire haben also $2\cdot 49 + 1 = 99$ Schüler am Wettbewerb teilgenommen.

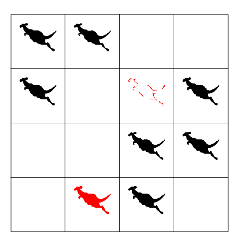
3) In den Feldern einer Tabelle befinden sich wie abgebildet 8 Kängurus. Jedes dieser Kängurus kann von seinem Quadrat in einbeliebiges leer stehendes Quadrat springen. Bestimme die kleinste Anzahl der Kängurus, die springen müssen, sodass sich in jeder Zeile und jeder Spalte der Tabelle genau zwei Kängurus befinden.



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Antwort B

In der dritten Spalte von links sind drei Kängurus, also ein Kängurus zu viel. In der zweiten Spalte von oben sind drei Kängurus, also ebenfalls eines zu viel. Hingegen fehlt in der zweiten Spalte und in der vierten Zeile ein Känguru. Folglich muss nur das Känguru aus dem Kreuzungsfeld der dritten Spalte und der zweiten Zeile ins zweite Feld von links in der untersten Zeile springen, damit sich in jeder Zeile und jeder Spalte der Tabelle genau zwei Kängurus befinden (sh. Abb.).



[1] Aus Bequemlichkeit wird jeweils nur die männliche Form verwendet, auch wenn entsprechende Begriffe sowohl in ihrer männlichen als auch in ihrer weiblichen Form verstanden sein wollen. So steht „Schüler“ für Schüler und Schülerinnen, „Teilnehmer“ für Teilnehmer und Teilnehmerinnen, „Mander“ für Mander und Manderinen …

4) 18 Volksschüler überqueren in Paaren die Straße. Die Paare sind mit 1 bis 9 nummeriert. Ein Paar mit einer geraden Nummer besteht aus einem Burschen und einem Mädchen und ein Paar mit einer ungeraden Nummer besteht aus zwei Burschen. Wie viele Burschen überqueren die Straße?

A) 14 B) 12 C) 10 D) 11 E) 18

Antwort A

Mädchen finden sich nur in den vier Paaren mit gerader Nummer, und zwar jeweils eines. Daher sind in der Klasse nur 4 Mädchen und folglich 14 Burschen.

5) Stefan bläst 8 Luftballons in 3 Minuten auf. Wie viele Ballons sind nach zwei Stunden aufgeblasen, wenn jeder zehnte gleich nach dem Aufblasen platzt?

A) 160 B) 216 C) 240 D) 288 E) 320

Antwort D

Wenn Stefan in 3 Minuten 8 Luftballons aufbläst, dann schafft er (vorausgesetzt, die Luft geht ihm nicht aus!) in 2 Stunden, also 120 Minuten, 40-mal so viele, also 320 Luftballons. Jeder zehnte davon – also insgesamt 32 Luftballons – platzen sofort, also sind nach 2 Stunden 288 Ballons aufgeblasen.

6) Im Dreieck *ABC* ist der Winkel in *A* dreimal so groß wie der Winkel in *B* und halb so groß wie der Winkel in *C*. Wie groß ist der Winkel in *A*?

A) 30° B) 36° C) 54° D) 60° E) 72°

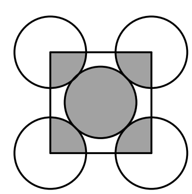
Antwort C

Bezeichnen wir die Größe des Winkels in B mit β, dann ist die (nach Angabe dreimal so große) Größe α des Winkels in A gleich 3β. Der Winkel in A ist halb so groß wie der in C, also der in C doppelt so groß wie der in A, also gleich 2α bzw. 6β. Aufgrund der Winkelsumme von 180° im Dreieck folgt daraus

$$\beta + 3\beta + 6\beta = 180°,\ 10\beta = 180°,\ \beta = 18°$$

und damit $\alpha = 3\beta = 54°$.

7) In nebenstehender Figur haben alle fünf berührenden Kreise denselben Radius. Die Eckpunkte des Quadrats sind die Mittelpunkte der äußeren Kreise. Wie groß ist das Verhältnis vom Flächeninhalt der grauen Bereiche der Kreise im Inneren des Quadrats zum Flächeninhalt der Kreisteile außerhalb des Quadrats?



A) 1:3 B) 2:3 C) 2:5 D) 1:4 E) 5:4

Antwort B

Im Inneren des Quadrats sind ein ganzer Kreis und 4 Viertelkreise grau gefärbt, zusammen also 2 ganze Kreise. Außerhalb des Quadrats liegen 4 Dreiviertelkreise, zusammen also 3 ganze Kreise. Daher ist das gesuchte Verhältnis 2:3.

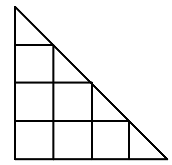
8) Eine Firma produziert statt quaderförmiger Ziegel mit den Maßen 10 cm × 12 cm × 14 cm irrtümlich Ziegel mit den Maßen 12 cm × 14 cm × 16 cm. Um wie viel Prozent ist das Volumen der hergestellten Ziegel zu groß?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

Antwort E

Zwei der drei Maße stimmen für die „richtigen“ und die „falschen“ Ziegel überein (12cm, 14cm). Daher ist das Volumen der hergestellten Ziegel um so viel zu groß wie die dritte Kantenlänge dieser Ziegel zu groß ist: Sie beträgt statt 10cm fälschlicherweise 16cm, ist also – wie das Volumen der produzierten Ziegel um 60% zu groß.

9) In nebenstehender Figur gibt es sieben Quadrate. Um wie viele Dreiecke mehr als Quadrate gibt es in der Figur?

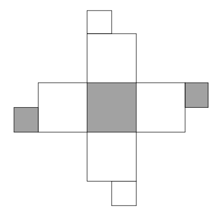


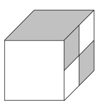
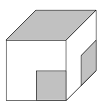
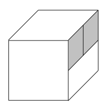
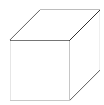
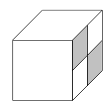
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Es sind gleich viele.

Antwort C

In der Figur gibt es 10 Dreiecke, die alle gleichschenkelig-rechtwinkelig sind: Vier davon haben Kathetenlänge 1 (vorausgesetzt, die kleinsten Quadrate haben Seitenlänge 1), drei Kathetenlänge 2, zwei Kathetenlänge 3 und eines Kathetenlänge 4. Daher gibt es um 3 Dreiecke mahr in der Figur als Quadrate.

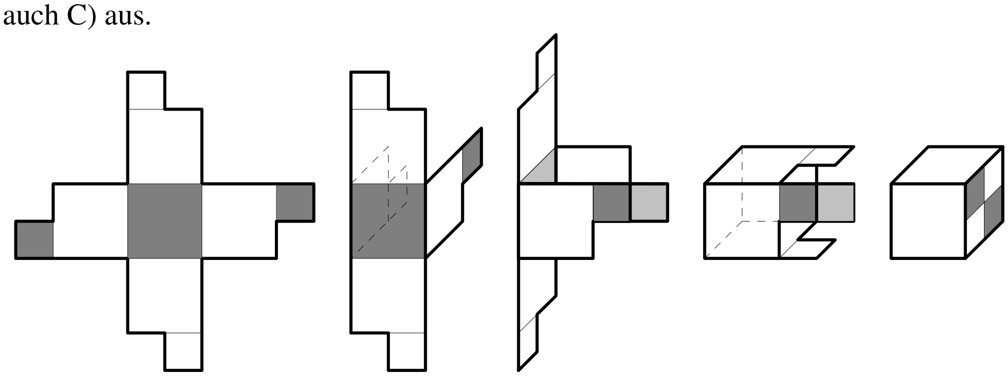
10) Welchen der folgenden Würfel kann man aus dem abgebildeten Netz falten?



A)  B)  C)  D)  E) 

Antwort E

Der Würfel, der aus dem Netz gefaltet werden kann, hat eine vollständig gefärbte Seitenfläche, die von vier gänzlich ungefärbten Seitenflächen umgeben ist. Damkit scheiden A) und B) als richtige Lösungen aus: In diesen beiden Würfeln grenzen an die vollständig gefärbte Fläche eine oder mehrere teilweise gefärbte Flächen. Andererseits bilden die vier nicht gefärbten Flächen des Netzes beim zusammenfalten des Würfels einen „Ring“; es gibt also keine drei ungefärbten Flächen, die in einer Ecke an einander grenzen. Damit scheidet auch D) aus. Weil von den beiden kleinen gefärbten Quadraten eines an die Grundfläche, eines an die Deckfläche grenzt, scheidet zuletzt auch C) aus.



- 4 Punkte Beispiele -

11) Mama Känguru und ihr Kind Hupfi springen auf einer 330 m langen Laufbahn im Kreis. Beide springen genau einmal in der Sekunde, wobei Mama mit jedem Sprung 5 m zurücklegt und Hupfi 2 m. Sie beginnen zur gleichen Zeit und springen in derselben Richtung. Nach 25 Sekunden ist Hupfi erschöpft und bleibt stehen, während Mama weiter springt. Nach wie viel Sekunden holt sie ihn wieder ein?

A) 15 s B) 24 s C) 40 s D) 51 s E) 66 s

Antwort D

Nach 25 Sekunden hat die Kängurumama 125m zurückgelegt, Hupfi 50m. Weil eine Runde 330m lang ist und Mama Känguru 75m Vorsprung auf Hupfi hat, muss sie noch 330m – 75m = 255m springen, um Hupfi zu überrunden. Dafür benötigt sie mit einer Geschwindigkeit von 5 Meter pro Sekunde 255:5 = 51 Sekunden.

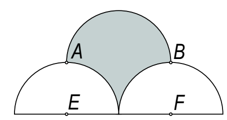
12) Lisa wartet 19 Minuten auf Susi. Bus A fährt alle 3 Minuten vorbei und Bus B alle 5 Minuten. Lisa zählt, wie viele Busse während der Wartezeit an ihr vorbeifahren. Wie viele verschiedene Zahlen kann sie erhalten?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Antwort D

In 19 Minuten kann Bus A 6-mal (z.B. nach ½ Minute, 3½ Minuten, … , 18½ Minuten) oder 5-mal (z.B. nach 2, 5, … 17 Minuten) vorbei fahren, Bus B 4-mal (z.B. nach 2, 7, 12, 17 Minuten) oder 3-mal (z.B. nach 4½, 9½ und 14½ Minuten). Daher fahren mindestens 8, höchstens 10 Busse während der 19 Minuten vorbei, das sind 3 verschiedene Zahlen.

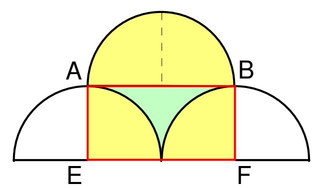
13) Gegeben sind drei Halbkreise wie abgebildet. *ABEF* ist ein Rechteck und der Radius jedes der drei Halbkreise ist 2 cm. *E* und *F* sind die Mittelpunkte der unteren Halbkreise. Der Flächeninhalt des grauen Bereichs beträgt dann in cm²



A) 8 B) 7 C) 2π D) $2\pi+1$ E) $2\pi+2$

Antwort A

Sowohl der in der Angabe graue Bereich als auch das Rechteck ABFE setzen sich aus dem in der Abbildung links grün gefärbten Flächenstück und zwei Viertelkreisen mit Radius 2cm zusammen. Daher ist der gesuchte Flächeninhalt gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks ABFE, also wegen AB = 4cm, AE = 2cm gleich 8cm².



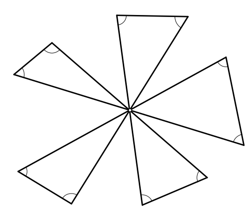
14) Zwei gleich große Flaschen sind mit einem Gemisch aus Wasser und Saft gefüllt. Die Verhältnisse von Wasser zu Saft in den beiden Flaschen betragen 2:1 bzw. 4:1. Wir schütten den Inhalt beider Flaschen in eine gemeinsame Flasche. Das Verhältnis von Wasser zu Saft im resultierenden Gemisch beträgt dann

A) 3:1 B) 6:1 C) 11:4 D) 5:1 E) 8:1

Antwort C

Bei gleicher Größe enthält die erste Flasche 10 Teile Wasser, 5 Teile Saft, die zweite Flasche 12 Teile Wasser und 3 Teile Saft. Das Gemisch enthält daher 22 Teile Wasser und 8 Teile Saft, das Verhältnis Wasser zu Saft beträgt also 22:8 = 11:4.

15) Was ist die Summe der 10 markierten Winkel?



A) 300° B) 450° C) 360° D) 600° E) 720°

Antwort E

In jedem der fünf Dreiecke, die die Figur bilden, sind zwei der drei Winkel markiert. Daher ist die Summe der 10 markierten Winkel zunächst einmal die Winkelsumme in fünf Dreiecken minus die Summe der nicht markierten Dreieckswinkel.

Jedem nicht markierten Dreieckswinkel liegt in der Figur ein Winkel in einer Lücke zwischen zwei Dreiecken gegenüber, daher ist die Summe der fünf nicht markierten Winkel in den fünf Dreiecken gleich der Hälfte des vollen Winkels um den „zentralen Punkt“ der Figur, also 180°.

Daher ist die Summe der 10 markierten Winkel gleich

$$5\cdot 180° - 180° = 4\cdot 180° = 720°.$$

16) Der Mittelwert von 16 verschiedenen positiven ganzen Zahlen ist 16. Was ist der größtmögliche Wert einer der Zahlen?

A) 16 B) 24 C) 32 D) 136 E) 256

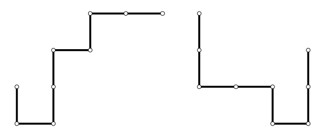
Antwort D

Die größte der 16 Zahlen ist dann möglichst groß, wenn die restlichen 15 Zahlen möglichst klein sind. Weil die 16 Zahlen verschieden sein sollen, bedeutet das, dass die 15 kleinsten Zahlen mindestens die Zahlen 1, 2, 3, … , 15 sein müssen. Die Summe dieser Zahlen ist

$$1+2+3+\ldots+15=\frac{15\cdot 16}{2}=120.$$

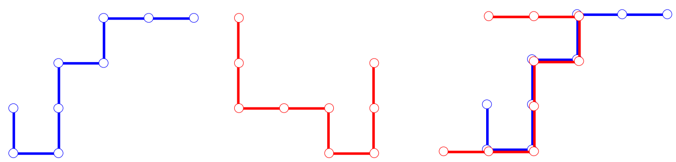
Wenn der Mittelwert aller 16 Zahlen 16, ihre Summe also $16\cdot 16 = 256$ ist, dann bedeutet das, dass die größte der 16 Zahlen nicht größer also $256 - 120 = 136$ ist.

17) Jeder der abgebildeten Drähte besteht aus 8 Stücken der Länge 1. Ein Draht wird genau über den anderen gelegt, sodass sie sich teilweise decken. Was ist die größtmögliche Länge der deckenden Teile?



A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

Antwort D



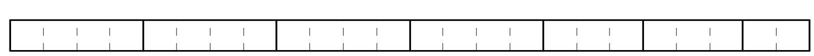
18) In einem Beutel befinden sich 17 von 1 bis 17 nummerierte Kugeln. Wie viele Kugeln muss man mindestens aus dem Beutel zufällig ziehen, wenn man unter den gezogenen Kugeln sicher zwei haben möchte, deren Nummern die Summe 18 haben?

A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 17

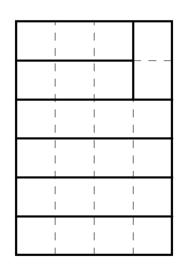
Antwort C

9 Kugeln sind nicht immer genug: Zieht man beispielsweise die Kugeln mit den Nummern 1 bis 9, so kann die Summe von zwei der Zahlen auf den Kugeln nicht größer als 17 sein.
Zieht man aber 10 Kugeln, so befinden sich darunter immer zwei mit „Summe 18“: Gruppiert man die 17 Kugeln in 9 Mengen {1, 17}, {2, 16}, …. , {8, 10}, {9}, so zieht man spätestens mit der zehnten Kugel mit Sicherheit eine aus einer Menge, aus der man auch schon die andere Kugel gezogen hat (Schubfachprinzip); die Summe dieser beiden Zahlen ist 18.

19) Ein 24 m langes und 1 m breites Rechteck wird wie abgebildet in kleine Rechtecke der Breite 1 m zerschnitten. Vier der Stücke haben die Länge 4 m, 2 haben die Länge 3 m und eines hat die Länge 2 m. Die kleinen Rechtecke werden ohne Lücke und ohne Überlappungen zu einem Rechteck mit möglichst kleinem Umfang zusammengelegt. Was ist der Umfang dieses Rechtecks?



A) 14 m B) 20 m C) 22 m D) 25 m E) 28 m



Antwort B

Die Seitenlängen des Rechtecks (in m) müssen ganze Zahlen sein, der Flächeninhalt ist 24 m². Nun gilt

$$24 = 1\cdot 24 = 2\cdot 12 = 3\cdot 8 = 4\cdot 6.$$

Den kleinsten Umfang hat das Rechteck mit den Maßen 4m mal 6m: Sein

Umfang beträgt 20m. Ein solches Rechteck lässt sich aus den angegebenen Stücken zusammensetzen (sh. Abbildung), daher ist der gesuchte Umfang 20m.

20) Ein Auto fährt mit der konstanten Geschwindigkeit 90 km/h. Als die Uhr 21:00 anzeigt, zeigt die Kilometerstandsanzeige 116,0 km an. Später am Abend zeigen beide Anzeigen dieselbe Ziffernfolge. Zu welchem Zeitpunkt ist dies der Fall?

A) 21:30 B) 21:50 C) 22:00 D) 22:10 E) 22:30

Antwort D

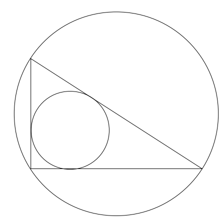
Lösung 1: Bei einer Geschwindigkeit von 90 km/h zeigt die Kilometerstandsanzeige des Autos nach 1 Stunde, also um 22:00 Uhr 206,0 km an; betrachtet man nur die vierstellige Ziffernfolgen auf der Uhr und auf der Kilometerstandsanzeige, so sieht man bei ersterer 2200, bei zweiterer 2060.
In jeder Minute nimmt die erste Zahl um 1 zu, die zweite Zahl um 15. Nach x Minuten zeigt also die Uhr die vierstellige Zahl 2200+x an, die Kilometerstandsanzeige die vierstellige Zahl 2060+15x. Damit ergibt sich die Gleichung

$$2200 + x = 2060 + 15x,\ 14x = 140,\ x = 10.$$

Somit stimmen die Anzeigen um 22:10 überein.
Lösung 2: Eine kurze Überprüfung zeigt, dass um 21:30 und um 21:50 (also nach 30 bzw. 50 Minuten) die Hunderterziffer der Kilometerstandsanzeige noch 1 ist. Um 22:00 zeigt die Kilometer-standsanzeige 206,0 und um 22:30 (also nach 1 ½ Stunden) 116,0+135 = 251,0. Um 22:10 aber hat das Auto sieben Sechstel von 90km, also 105km zurückgelegt, die Kilometerstandsanzeige zeigt also 116,0+105 = 221,0 an.

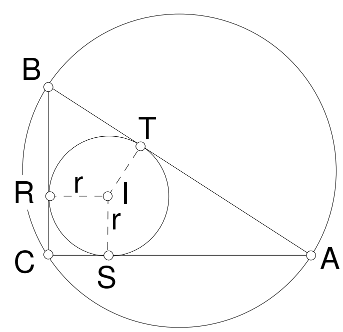
- 5 Punkte Beispiele -

21) Es seien *a* und *b* die Kathetenlängen im abgebildeten rechtwinkeligen Dreieck. Ferner sei *d* der Durchmesser des Inkreises und *D* der Durchmesser des Umkreises. Dann ist *d*+*D* gleich



A) $a+b$ B) $2(a+b)$ C) $\frac{1}{2}(a+b)$ D) $\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

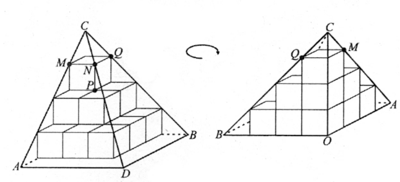
Antwort A



Wir bezeichnen den Berührpunkt des Inkreises (Mittelpunkt *I*) mit der Hypotenuse *AB* des Dreiecks mit *T*; *R* und *S* seien die Berührpunkte mit den Katheten *BC* beziehungsweise *AC*.
Nach Satz von Thales ist *AB* Durchmesser des Umkreises des Dreiecks, also gilt $D = AB = AT + BT$..
Weil jede Kreistangente normal zum zugehörigen Berührradius ist, und weil die beiden Tangentenstrecken aus einem Punkt an einen Kreis gleich lang sind, ist das Viereck *CSIR* ein Quadrat, für den Inkreisradius *r* gilt also $r = CR = CS$. Daraus folgt

$$d + D = 2r + D = CR + CS + AT + BT = CR + CS + AS + BR = AS + CS + BR + CR = AC + BC =$$
$$= a + b$$

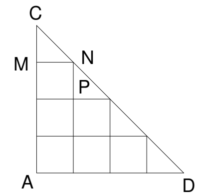
22) Vierzehn Einheitswürfel werden wie abgebildet zu einem Turm aufgebaut. Dieser wird von einer Pyramide umschrieben. Wie groß ist das Volumen der Pyramide?



A) $\frac{64}{3}$ B) 64 C) $\frac{64\sqrt{2}}{3}$ D) $\frac{64\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{32}{3}$

Antwort A

Nach Strahlensatz ist sowohl die Höhe h der Pyramide als auch die Seitenlänge a der (quadratischen) Basis gleich 4, also gilt für das Volumen V der Pyramide



$$V = \frac{a^2 h}{3} = \frac{4^2 \cdot 4}{3} = \frac{64}{3}$$

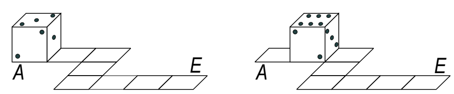
23) Stefan sagt jeden zweiten Tag nur die Wahrheit. An den anderen Tagen lügt er immer. Er spricht heute genau vier der folgenden Sätze aus. Welchen Satz hat er heute sicher nicht ausgesprochen?

A) Die Anzahl meiner Freunde ist eine Primzahl.
B) Ich habe gleich viele männliche und weibliche Freunde.
C) Ich heiße Stefan.
D) Ich sage immer die Wahrheit.
E) Drei meiner Freunde sind älter als ich es bin.

Antwort C

Angenommen, Stefan sagt: „Ich heiße Stefan."
Dann sagt er nicht nur mit diesem Satz, sondern auch mit jedem anderen heute ausgesprochenen Satz die Wahrheit. Die Aussage „Ich sage immer die Wahrheit" ist aber die Unwahrheit, weil Stefan ja jeden zweiten Tag lügt, also kann er diesen Satz heute dann nicht ausgeprochen haben.
Das heißt aber, dass er die restliche drei Sätze gesagt haben muss. Wenn er nun gleich viele männliche wie weibliche Freunde hat, ihre Anzahl aber eine Primzahl ist, kann er nur zwei Freunde haben; das widerspricht der Behauptung, dass drei seiner Freunde älter sind als er.
Somit kann er heute keinesfalls gesagt haben „Ich heiße Stefan".

24) Die Summe der Punkteanzahlen auf gegenüberliegenden Seitenflächen eines Spielwürfels beträgt immer 7. Ein solcher Würfel rollt wie abgebildet von *A* nach *E* ab. Zu Beginn *A* sieht man 3 Punkte auf der oberen Fläche des Würfels. Wie viele Punkte sieht man dort am Ende *E*?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Antwort E

Am Ende sieht man auf der oberen Fläche so viele Punkte, wie man vor dem dreimaligen Nachrechtsrollen des Würfels (das den Würfel in die Endposition bringt) auf der rechten Seitenfläche sieht, also 6 Punkte.

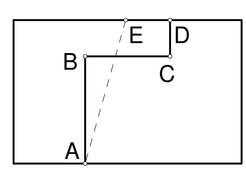
25) Wie viele positive ganze Zahlen *n* gibt es, für die $2000 < \sqrt{n(n+1)} < 2005$ gilt?

A) 1 B)2 C)3 D)4 E)5

Antwort E

Die kleinste positive ganze Zahl, die die gegebene Bedingung erfüllt, ist 2000, die größte 2004, also gilt die Ungleichung für 5 positive ganze Zahlen.

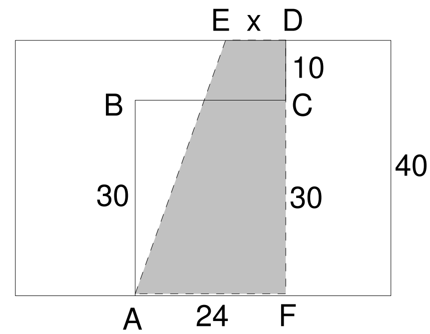
26) Ein rechteckiges Grundstück wird durch einen längs des Streckenzugs ABCD verlaufenden Zaun in zwei Parzellen getrennt. Die Strecken *AB*, *BC* und *CD* sind parallel zu den Rechtecksseiten, und haben die Längen 30 m, 24 m bzw. 10 m. Der Zaun soll durch einen geradlinig von A nach E verlaufenden Zaun so ersetzt werden, dass sich die Flächen der beiden Parzellen nicht ändern. Wie groß muss der Abstand des Punktes *E* von *D* gewählt werden?



A) 8m B) 10 m C) 12 m D) 14 m E) 16 m

Antwort C

An den Flächen der beiden Parzellen ändert sich genau dann nichts, wenn das Rechteck *AFCB* und das Trapez *AFDE* denselben Flächeninhalt haben (sh. Abb.)



Für den Flächeninhalt A_{AFCB} des Rechtecks gilt

$$A_{AFCB} = AB \cdot BC = 30 \cdot 24m^2 = 720m^2.$$

Für den Flächeninhalt A_{AFDE} des Trapezes gilt

$$A_{AFDE} = \tfrac{1}{2}(AF + DE) \cdot FD = \tfrac{1}{2}(24 + x) \cdot 40m^2 =$$
$$= 20 \cdot (24 + x)m^2$$

Daraus folgt

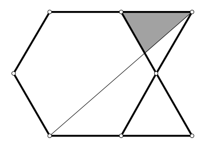
$$20 \cdot (24 + x) = 720$$
$$24 + x = 36$$
$$x = 12$$

Daher muss der Abstand des Punktes *E* von *D* 12m betragen.

27) Wie viele vierziffrige Teiler hat die Zahl 102^2?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

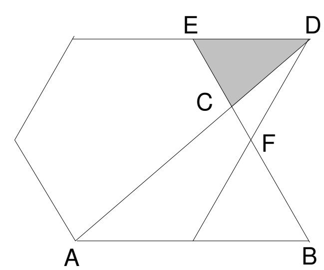
28) Mit zehn gleich langen Zündhölzern wird nebenstehender „Fisch" gelegt und anschließend ein Faden wie angedeutet von Punkt zu Punkt gelegt. Die Fläche des „Fisches" ist 24. Wie groß ist der Flächeninhalt des grauen Bereichs?



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

Antwort C

Der Fisch setzt sich aus zwei gleichseitigen Dreiecken und einem regelmäßigen Sechseck gleicher Seitenlänge zusammen. Weil das regelmäßige Sechseck wiederum in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegt werden kann, besteht der Fisch aus 8 kongruenten gleichseitigen Dreiecken; jedes dieser Dreiecke hat also einen Flächeninhalt von 3.



Weil AB und DE zu einander parallel sind, gilt nach Strahlensatz

$$CE : BC = DE : AB = 1 : 2$$

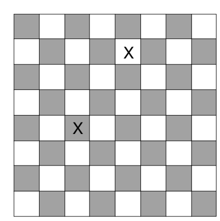
Daraus folgt

$$CE = \tfrac{1}{3} \cdot BE = \tfrac{2}{3} \cdot EF$$

und damit

$$A_{CDE} = \tfrac{2}{3} \cdot A_{DEF} = \tfrac{2}{3} \cdot 3 = 2.$$

29) Auf wie viele Arten kann man ein weißes Feld und ein schwarzes Feld auf einem 8×8 Schachbrett derart auswählen, dass die ausgewählten Felder weder in derselben Zeile noch in derselben Spalte liegen?

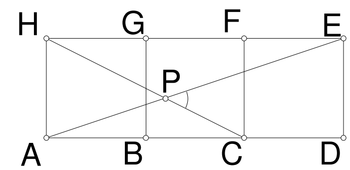


A) 56 B) 5040 C) 720 D) 672 E) 768

Antwort E

Es gibt 32 Auswahlmöglichkeiten für das weiße Feld. Nach Wahl des weißen Feldes dürfen nach Angabe 8 der 32 schwarzen Felder nicht ausgewählt werden: die 4 schwarzen Felder in der Zeile des gewählten weißen Felds, und die vier schwarzen Felder in der Spalte des gewählten weißen Felds. Daher stehen bei jeder der 32 Wahlmöglichkeiten für das weiße Feld noch 24 schwarze Felder zur Auswahl. Weil jede Wahlmöglichkeit für das weiße Feld mit jeder zulässigen Wahl des schwarzen Feldes kombiniert werden darf, gibt es also 32·24 = 768 Auswahlmöglichkeiten.

30) Drei Quadrate werden wie abgebildet nebeneinander gezeichnet. Die Strecken *AE* und *CH* schneiden einander in *P*. Wie groß ist der Winkel $\angle CPE$?



A) 30° B) 45° C) 60° D) 50° E) 40°

Antwort B

Lösung 1: HC ist parallel zu AQ, daher gilt

$$\angle CPE = \angle QAE.$$

Weil das Dreieck ΔAQE gleichschenkelig-rechtwinkelig ist (Hypotenuse AE), ist

$$\angle CPE = \angle QAE = 45°$$

Lösung 2: Mit Freude am Rechnen, gepaart mit den notwendigen Kenntnissen über Vektorprodukte und Winkelfunktionen, lässt sich der gesuchte Winkel auch als Winkel zwischen den Vektoren (2;-1) und (3;1) berechnen.