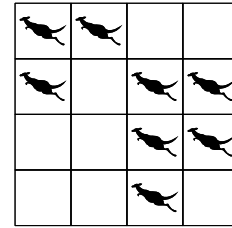


**Känguru der Mathematik 2005**  
**Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)**  
**Österreich - 17.3.2005**



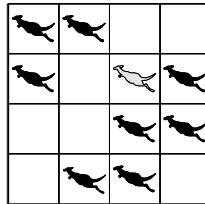
**- 3 Punkte Beispiele -**

1) In den Feldern einer Tabelle befinden sich wie abgebildet 8 Kängurus. Jedes dieser Kängurus kann von seinem Quadrat in ein leer stehendes Quadrat springen. Bestimme die kleinste Anzahl der Kängurus, die springen müssen, sodass sich in jeder Zeile und jeder Spalte der Tabelle genau zwei Kängurus befinden.



- A) 0   B) 1   C) 2   D) 3   E) 4

**Antwort: B**



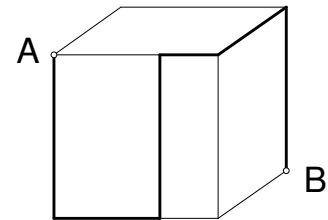
2) Wie viele Stunden gibt es in der Hälfte von einem Drittel eines Vierteltages?

- A)  $\frac{1}{3}$    B)  $\frac{1}{2}$    C) 1   D) 2   E) 3

**Antwort: C**

Die Hälfte von einem Drittel ist ein Sechstel. Ein Sechstel von einem Viertel ist ein Vierundzwanzigstel von einem Tag  $\Rightarrow$  1 Stunde

3) Eine Ameise krabbelt längs der eingezeichneten Route auf der Oberfläche eines Würfels vom Punkt A zum Punkt B. Die Kantenlänge des Würfels beträgt 12 cm. Wie viele cm krabbelt die Ameise?



- A) 40 cm   B) 48 cm   C) 50 cm   D) 60 cm  
 E) Es kann aus diesen Angaben nicht eindeutig berechnet werden.

**Antwort: D**

Weg: Insgesamt 3 senkrechte, 1 waagrechte und eine nach hinten gehende Kante:  $5 \cdot 12 = 60$  cm.

4) Zwei Mädchen und drei Burschen essen zusammen 16 Kugeln Eis. Jeder Bursche isst doppelt so viele Kugeln wie jedes Mädchen. Wie viele Kugeln Eis essen drei Mädchen und zwei Burschen, wenn wir annehmen, dass Mädchen immer gleich viele Kugeln essen, und Burschen auch immer gleich viele Kugeln essen?

- A) 12   B) 13   C) 14   D) 16   E) 17

**Antwort: C**

Ein Mädchen isst  $x$  Kugeln Eis, ein Bursche  $2x$  Kugeln. Damit gilt für zwei Mädchen und drei Burschen:  $2 \cdot x + 3 \cdot 2x = 16 \Rightarrow 8 \cdot x = 16 \Rightarrow x = 2$ . Damit essen drei Mädchen und zwei Burschen:  $3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 14$  Kugeln.

5) An der Gödelschule haben 50% der Schüler Fahrräder. Von den Schülern, die Fahrräder haben, besitzen auch 30% Rollerblades. Welcher Prozentsatz der Gödelschüler hat Fahrräder und Rollerblades?

- A) 15   B) 20   C) 25   D) 40   E) 80

**Antwort: A**

F ist die Anzahl Fahrradfahrer der Schule. 30% von F, das sind  $\frac{30}{100} \cdot F = R$  besitzen Rollerblades. S ist die Anzahl aller Schüler, 50% sind Radfahrer, also  $F = \frac{50}{100} \cdot S$ . Damit ergibt sich für die Schüler, die Fahrräder und Rollerblades besitzen:  $R = \frac{50}{100} \cdot \frac{30}{100} \cdot S = \frac{15}{100} \cdot S$ , d.h. 15 % aller Schüler besitzen beides.

6) Im Dreieck ABC ist der Winkel in A dreimal so groß wie der Winkel in B und halb so groß wie der Winkel in C. Wie groß ist der Winkel in A?

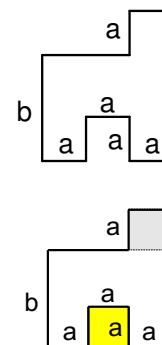
- A)  $30^\circ$       B)  $36^\circ$       C)  $54^\circ$       D)  $60^\circ$       E)  $72^\circ$

**Antwort: C**

$\alpha, \beta, \gamma$  sind die Winkeln in A, B, C. Es gilt  $\alpha = 3 \cdot \beta$ , d.h.  $\beta = \frac{1}{3} \alpha$  und  $\gamma = 2\alpha$ . Die Winkelsumme im Dreieck ist  $180^\circ$ , also  $\alpha + \beta + \gamma = 180$ . Durch Einsetzen der zuvor ermittelten Bedingungen ergibt sich:  $\alpha + \frac{1}{3} \alpha + 2\alpha = 180 \Rightarrow \frac{10}{3} \alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 54^\circ$ .

7) In der nebenstehenden Figur sehen wir den Grundriss eines Zimmers mit den Maßen a und b. Angrenzende Wände stehen immer rechtwinkelig zueinander. Wie groß ist die Grundfläche des Zimmers?

- A)  $2ab + a(b-a)$       B)  $3a(a+b) - a^2$       C)  $3a^2b$   
 D)  $3a(b-a) + a^2$       E)  $3ab$

**Antwort: E**

Trennt man das grau gefärbte Quadrat von der Figur ab und setzt es an der gelb markierten Stelle ein, so ergibt sich ein Rechteck mit der Länge  $3a$  und der Breite  $b$ .

8) Karin nimmt ein Stück Papier und schneidet es in 10 Stücke. Dann nimmt sie eines dieser Stücke und schneidet es wiederum in 10 Stücke. Sie wiederholt diesen Prozess noch dreimal. Wie viele Stücke hat sie schließlich vor sich liegen?

- A) 36      B) 40      C) 46      D) 50      E) 56

**Antwort: C**

Durch zerschneiden eines Stückes entstehen aus einem Stück 10 Stücke, d.h. es kommen 9 weitere Stücke dazu. Damit ergibt sich bei viermaliger Anwendung dieses Prozesses:  $10 + 4 \cdot 9 = 46$ .

9) Einige Krähen sitzen auf einigen Bäumen im Garten. Auf jedem Baum sitzt genau eine Krähe, aber für eine Krähe gibt es keinen Baum. Etwas später sitzen dieselben Krähen wieder auf denselben Bäumen. Diesmal sitzen jeweils zwei Krähen auf jedem Baum, wobei allerdings ein Baum frei bleibt. Wie viele Bäume befinden sich im Garten?

- A) 2      B) 3      C) 4      D) 5      E) 6

**Antwort: B**

Sei  $n$  die Anzahl der Bäume im Garten. Die Anzahl der Krähen beträgt dann einerseits  $n + 1$  (1 Krähe mehr als die Anzahl der Bäume) und andererseits  $2 \cdot (n - 1)$  (1 Baum bleibt bei doppelter Besetzung durch die Krähen unbesetzt). Damit ergibt sich die Gleichung:

$$n + 1 = 2 \cdot (n - 1) \Rightarrow n = 3.$$

10) Die Buchstaben AGKNORU stehen für jeweils verschiedene Ziffern. Wie lautet die größte Zahl, die man in der Gestalt KANGOUROU schreiben kann?

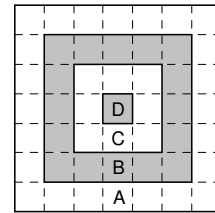
- A) 987654321    B) 987654354    C) 436479879    D) 536479879    E) 597354354

**Antwort: B**

Der 5. bzw. 6. Buchstabe ist gleich dem 8. und 9. Buchstaben. Antwort A fällt damit weg aber B erfüllt diese Bedingung. Alle anderen Antworten sind zu klein.

**- 4 Punkte Beispiele -**

11) Wir spielen auf einem Dartbrett wie in der Figur abgebildet. Die Punktezahl, die man für einen Treffer in jedem Feld bekommt, ist indirekt proportional zur Fläche des Feldes. Wenn ein Treffer in B 10 Punkte zählt, dann zählt ein Treffer in C



- A) 5 Punkte      B) 8 Punkte      C) 16 Punkte  
D) 20 Punkte    E) 24 Punkte

**Antwort: D**

Die Fläche von C ist halb so groß (8 Quadrate) wie die Fläche von B (16 Quadrate). Damit muss die Punktezahl doppelt so groß wie die von B sein  $\Rightarrow$  20 Punkte.

12) Eine Gruppe von Schülerinnen plant einen Ausflug. Wenn jede von ihnen 14 Euro für die Unkosten zahlt, hat die Gruppe um 4 Euro zu wenig zur Verfügung. Wenn jede Schülerin 16 Euro zahlt, so hat die Gruppe um 6 Euro mehr als sie braucht. Wie viel Geld sollte jede Schülerin bezahlen, damit die Unkosten genau gedeckt sind?

- A) € 14,40    B) € 14,60    C) € 14,80    D) € 15,00    E) € 15,20

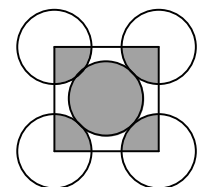
**Antwort: C**

Lösungsweg 1: Sei x die Anzahl der Schülerinnen. Dann gilt:  $14 \cdot x + 4 = 16 \cdot x - 6$ .

Daraus errechnet sich die Anzahl  $x = 5$ . Insgesamt haben die 5 Schülerinnen um 4 Euro zu wenig gezahlt. Damit muss eine jede um  $4 : 5 = € 0,80$  mehr zahlen.

Lösungsweg 2: Das Verhältnis zwischen dem zu wenig eingezahlten zu dem zu viel eingezahlten Betrag verhält sich wie  $4 : 6 = 2 : 3$ . Teilt man nun den Differenzbetrag von 2 Euro zwischen den €14 und den €16 im gleichen Verhältnis auf, ergibt sich  $0,80 : 1,20$ . Die Schülerinnen müssen also € 14,80 bezahlen.

13) In nebenstehender Figur haben alle fünf berührenden Kreise denselben Radius. Das Quadrat, dessen Eckpunkte in den Kreismittelpunkten liegen, zerlegt die Kreise in Bereiche die innerhalb (grau) oder außerhalb (weiß) des Quadrates liegen. In welchem Verhältnis stehen diese Flächen zueinander?



- A) 1:3      B) 1:4      C) 2:5      D) 2:3      E) 5:4

**Antwort: D**

Die weißen Flächen ergeben insgesamt 3 ganze Kreise (4 Dreiviertelkreise). Es gibt insgesamt 2 ganze graue Kreise (1 ganzer Kreis + 4 Viertelkreise). Daher gilt: Grau : Weiß = 2 : 3.

14) Ein Wachmann arbeitet jeweils 4 Tage hintereinander und hat am fünften Tag frei. Er hatte am Sonntag frei und arbeitete wieder am Montag. Nach wie vielen Tagen hat er wieder einen freien Sonntag?

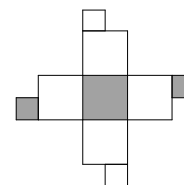
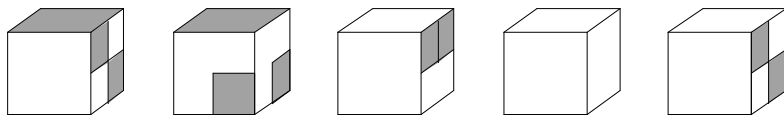
- A) 30      B) 36      C) 12      D) 34      E) 7

**Antwort: D**

Die „Woche“ dauert für den Wachmann 5 Tage (4-mal arbeiten, 1-mal frei). Nach sieben solchen „Wochen“ gibt es wieder ein Zusammentreffen des freien Tages mit dem Sonntag. 34 Tage gibt es also kein Zusammentreffen der Sonntage mit dem freien Tag. Erst am 35. Tag ist es so weit.

15) Welchen der folgenden Würfel kann man aus dem abgebildeten Netz falten?

A) B) C) D) E)



**Antwort: E**

Die gefärbten Würfelseiten liegen einander gegenüber und damit kommen Antwort A, B, D nicht in Frage. C kann es nicht sein, da dann im Netz die Würfelseiten mit den angehängten kleinen gefärbten Quadraten benachbart liegen müssten.

16) Von Mittag bis Mitternacht schläft Schnarchikatz im Schatten des Traumbaums und von Mitternacht bis Mittag erzählt er Geschichten. Auf dem Baum hängt eine Tafel, auf der folgender Text steht: „Vor zwei Stunden hat Schnarchikatz genau das gemacht, was er auch in einer Stunde machen wird.“ Wie viele Stunden am Tag stimmt die Aussage auf der Tafel?

A) 6 B) 12 C) 18 D) 3 E) 21

**Antwort: C**

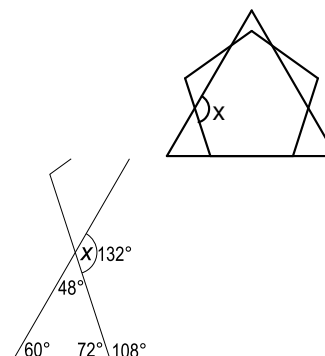
Die Aussage umfasst eine Zeitspanne von 3 Stunden. Damit gilt sie bei einer Zeitspanne von 12 Stunden (Mittag – Mitternacht, Mitternacht – Mittag) für 9 Stunden  $\Rightarrow 2 \cdot 9 = 18$  Stunden

17) In nebenstehender Figur sehen wir ein gleichseitiges Dreieck und ein regelmäßiges Fünfeck. Wie groß ist der Winkel  $x$ ?

A)  $124^\circ$  B)  $128^\circ$  C)  $132^\circ$  D)  $136^\circ$  E)  $140^\circ$

**Antwort: C**

Alle Innenwinkel des gleichseitigen Dreiecks haben  $60^\circ$ , alle Innenwinkel des regelmäßigen Fünfecks  $108^\circ$ . Aus der nebenstehenden Skizze folgt die Lösung.



18) Michi wählt eine dreistellige Zahl und ein zweistellige Zahl mit der Differenz 989. Wie groß ist die Summe der beiden Zahlen?

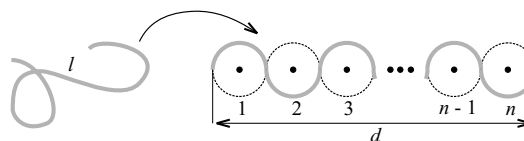
A) 1000 B) 1001 C) 1009 D) 1010 E) 2005

**Antwort: C**

Die kleinste dreistellige Zahl ist 10. Addiert man diese zu 989 erhält man 999, die größte dreistellige Zahl. Damit sind dies die beiden gesuchten Zahlen. Ihre Summe ist 1009.

19) Wie groß ist die Länge  $l$  der Schnur, die wie abgebildet um die Kreise gelegt werden kann?

A)  $dn$  B)  $\pi dn$  C)  $2\pi dn$   
D)  $\frac{\pi}{2}d$  E)  $\pi d$



**Antwort: D**

Die Schnur beschreibt lauter Halbkreisbögen. Die Länge eines Halbkreisbogens beträgt  $r \cdot \pi$ . Die Summe aller dieser Halbkreisbögen beträgt daher  $n \cdot r \cdot \pi$ .  $d$  ist die Summe aller Kreisdurchmesser also  $n \cdot 2r = d \Rightarrow n \cdot r = \frac{d}{2}$ . Damit beträgt die Summe aller Halbkreisbögen  $\frac{d}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{2} \cdot d$

20) Jede positive ganze Zahl  $n$  ist als Produkt von Primfaktoren darstellbar. Die Anzahl der Faktoren in dieser Zerlegung bezeichnen wir als die Länge von  $n$ . So ist etwa die Länge von  $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$  gleich 4. Wie viele ungerade Zahlen kleiner als 100 haben die Länge 3?

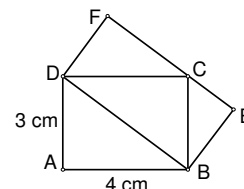
- A) 2   B) 3   C) 5   D) 7   E) Eine andere Anzahl.

**Antwort: C**

Es sind dies 27 ( $3 \cdot 3 \cdot 3$ ), 45 ( $3 \cdot 3 \cdot 5$ ), 63 ( $3 \cdot 3 \cdot 7$ ), 81 ( $3 \cdot 3 \cdot 9$ ), 75 ( $3 \cdot 5 \cdot 5$ ).

**- 5 Punkte Beispiele -**

21) Zwei Rechtecke ABCD und DBEF sind wie in der Figur gegeben. Was ist der Flächeninhalt von DBEF?



- A)  $10 \text{ cm}^2$    B)  $12 \text{ cm}^2$    C)  $13 \text{ cm}^2$    D)  $14 \text{ cm}^2$    E)  $16 \text{ cm}^2$

**Antwort: B**

Die Fläche von DBC beträgt die Hälfte der Fläche des Rechtecks ABCD. Die Höhe von C auf DB des Dreiecks DBC hat genau die Länge der Seite BE des Rechtecks DBEF. Damit ist die Fläche von DBC auch halb so groß wie die Fläche von DBEF  $\Rightarrow A_{ABCD} = A_{DBEF} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2$ .

22) Daniel hat ein Kombinationsschloss mit drei Stellen. Er kann sich an die Ziffernkombination nicht erinnern, aber er weiß, dass alle drei Ziffern verschieden sind und dass die erste Ziffer gleich dem Quadrat des Quotienten aus der zweiten und der dritten Ziffer ist. Wie viele Einstellungen muss er höchstens ausprobieren, um das Schloss zu öffnen?

- A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 6

**Antwort: D**

Folgende Kombinationen für die zweite und dritte Zahl sind nur möglich: (6|2), (6|3), (2|1), (3|1). (4|2), (9|3), (8|4) sind nicht möglich, da die erste Stelle dann 4 bzw. 9 bzw. 4 sein müsste im Widerspruch zur Annahme, dass alle Zahlen verschieden sind!

23) Wie viele zweistellige Zahlen gibt es, die mehr als verdreifacht werden, wenn man ihre Ziffern vertauscht?

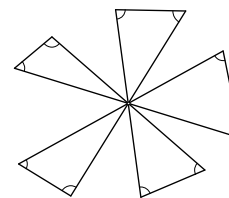
- A) 6   B) 10   C) 15   D) 22   E) 33

**Antwort: A**

Es sind dies 15 (51), 16 (61), 17 (71), 18 (81), 19 (91) und 29 (92).

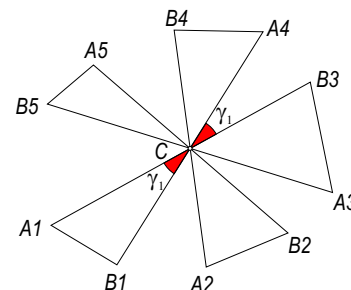
24) Wie groß ist die Summe der 10 markierten Winkel?

- A)  $300^\circ$    B)  $450^\circ$    C)  $360^\circ$    D)  $600^\circ$    E)  $720^\circ$



**Antwort: E**

Jeder Winkel im gemeinsamen Eckpunkt C aller Dreiecke tritt zweifach in der Figur auf. So ist z.B. der Winkel  $\gamma_1 = \angle B_1CA_1 = \angle B_3CA_4$ , da die Seite  $B_3C$  auf der Verlängerung der Seite  $A_1C$  und  $A_4C$  auf der Verlängerung der Seite  $B_1C$  liegt. Analoges gilt natürlich auch für alle anderen Winkel im gemeinsamen Eckpunkt C. Damit gilt  $2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 + 2\gamma_4 + 2\gamma_5 = 360^\circ$  und daher  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 = 180^\circ$ . Die Summe der Winkel aller Dreiecke beträgt  $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$ . Rechnet man nun alle Winkel, die an der gemeinsamen Ecke liegen, davon ab, so ergibt sich  $900 - 180 = 720^\circ$ .

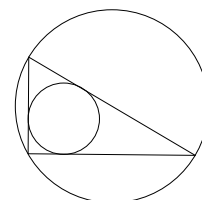


25) In einem Fass befinden sich 64 Liter Wein. Es werden 16 Liter Wein durch Wasser ersetzt und das Gemisch wird gleichmäßig durchmischt. Nun werden 16 Liter des Gemisches entfernt und durch Wasser ersetzt. Das Gemisch wird wieder verrührt und noch einmal werden 16 Liter davon durch 16 Liter Wasser ersetzt. Wie viel Liter des ursprünglichen Weines befinden sich noch im Fass?

- A) 27      B) 24      C) 16      D) 30      E) 48

**Antwort: A**

Bei jedem Vorgang wird ein Viertel der Flüssigkeit entfernt und durch Wasser ersetzt. Nach dem ersten Herausnehmen befinden sich 48 Liter Wein und 16 Liter Wasser im Fass. Beim zweiten Mal Herausnehmen nimmt man deshalb 12 Liter ( $48 : 4 = 12$ ) Wein und 4 Liter Wasser aus dem Fass und ersetzt dies wieder durch Wasser. Jetzt befinden sich noch 36 Liter Wein im Fass. Beim neuerlichen Herausnehmen holt man deswegen 9 Liter ( $36 : 4 = 9$ ) Wein und 7 Liter Wasser heraus. Damit verbleiben 27 Liter Wein im Fass.



26) Es seien  $a$  und  $b$  die Kathetenlängen im abgebildeten rechtwinkligen Dreieck. Ferner sei  $d$  der Durchmesser des Inkreises und  $D$  der Durchmesser des Umkreises. Dann ist  $d+D$  gleich

- A)  $a+b$     B)  $2(a+b)$     C)  $\frac{1}{2}(a+b)$     D)  $\sqrt{ab}$     E)  $\sqrt{a^2+b^2}$

**Antwort: A**

Lösungsweg 1: Bekanntlich gilt für den Inkreisradius  $\rho$ :  $\rho = \frac{ab}{a+b+c}$ . Damit ergibt sich für  $d+D$ :

$$d+D = \frac{2ab}{a+b+c} + c = \frac{2ab+ac+bc+c^2}{a+b+c}$$

erhält man

$$d+D = \frac{2ab+ac+bc+a^2+b^2}{a+b+c} = \frac{(a^2+2ab+b^2)+ac+bc}{a+b+c} = \frac{(a+b)^2+(a+b)\cdot c}{a+b+c}$$

Durch Herausheben und anschließendes Kürzen folgt

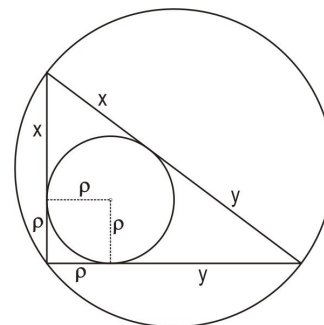
$$d+D = \frac{(a+b)((a+b)+c)}{(a+b+c)} = a+b$$

Lösungsweg 2: Aus der Skizze lässt sich der Umfang berechnen:

$$2\rho + 2y + 2x = a+b+c \Rightarrow$$

$$d = 2\rho = a+b+c - 2(x+y) = a+b+c - 2c = a+b-c$$

$$\text{Da } D = c \Rightarrow d+D = (a+b-c) + c = a+b$$



27) Das arithmetische Mittel von 10 natürlichen Zahlen ist 10. Wie groß kann die größte der 10 Zahlen höchstens sein?

- A) 10    B) 45    C) 50    D) 55    E) 91

**Antwort: E**

Das arithmetische Mittel von 10 Zahlen  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$  lautet:  $\mu = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}}{10}$ .

91 ist die größte Zahl, sodass man noch 9 weitere natürliche Zahlen, nämlich  $a_2 = a_3 = \dots = a_{10} = 1$ , finden kann, sodass die Summe der 10 Zahlen 100 nicht übersteigt.



gibt 4 Paare. Die mittlere Paarung muss (12|13) sein, dann kommt (11|14) usw. Die Menge lautet  $A = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ .

Hat die Menge eine ungerade Anzahl von Elementen, und bildet man wieder Zahlenpaare wie oben beschrieben, dann bleibt in der Mitte ein Element über, das genau den halben Wert einer dieser Teilsummen haben muss, wie z.B.: mittlerer Wert  $\mu = 13 \Rightarrow (12|14), (11|15)$  usw. Wie man sofort einsieht ist der mittlere Wert das arithmetische Mittel aller Zahlen und muss daher ebenfalls ein Teiler von 100 sein. Dafür kommt aber nur  $20 = 100 : 5$  in Frage. Die zweite Menge lautet daher  $B = \{18, 19, 20, 21, 22\}$ .