

Känguru der Mathematik 2004
Gruppe Student (11. und 12. Schulstufe)
Lösungen



- 3 Punkte Beispiele -

1) Ich kaufe m Stifte um je n Euro und n Stifte um je m Euro. Was ist der Durchschnittspreis aller Stifte?

- A) 1 B) $\frac{m+n}{2}$ C) $\frac{2mn}{m+n}$ D) mn E) $\frac{m^2n^2}{2}$

Antwort: C

Der Gesamtpreis aller $m+n$ Stifte ist $mn + nm = 2mn$. Daher ist der Durchschnittspreis aller Stifte $\frac{2mn}{m+n}$

2) Peter hat 2004 Murmeln. Die Hälfte davon ist blau, ein Viertel ist rot und ein Sechstel ist grün. Wie viele haben eine andere Farbe?

- A) 167 B) 334 C) 501 D) 1002 E) 1837

Antwort: A

Von den 2004 Murmeln sind 1002 blau, 501 rot und 334 grün. Zusammen sind das 1837 Murmeln. Daher haben $2004 - 1837 = 167$ Murmeln eine andere Farbe.

3) Der Grundriss eines Gebäudes ist rechteckig mit den Maßen 40 m x 60 m. Auf den Bauplänen hat der Grundriss den Umfang 100 cm. In welchem Maßstab ist der Grundriss gezeichnet?

- A) 1 : 100 B) 1 : 150 C) 1 : 160 D) 1 : 170 E) 1 : 200

Antwort: E

Der Umfang des Gebäudes beträgt in Wirklichkeit $2 \cdot (40m + 60m) = 200m$, ist also 200-mal so groß wie auf dem Plan, wo der Grundriss des Gebäudes den Umfang $100cm = 1m$ hat.

4) Eine Pyramide hat 17 Begrenzungsflächen. Wie viele Kanten hat sie?

- A) 16 B) 17 C) 18 D) 32 E) 34

Antwort: D

Von den 17 Begrenzungsflächen ist eine die Grundfläche, die restlichen 16 sind dreieckige Seitenflächen. Daher handelt es sich um eine 16-seitige Pyramide. Sie hat als Grundfläche ein 16-eck mit 16 Kanten; jede weitere Kante verbindet einen der 16 Eckpunkte der Grundfläche mit der Spitze, also gibt es 16 Kanten zur Spitze. Insgesamt hat die Pyramide damit 32 Kanten.

5) Die kleinste reelle Zahl x , für die die Ungleichung $x^2 - 2004 \leq 0$ gilt, ist

- A) -2004 B) 2004 C) 0 D) $\sqrt{2004}$ E) $-\sqrt{2004}$

Antwort: E

Die gegebene Ungleichung ist gleichwertig mit $x^2 \leq 2004$, gilt also einerseits für alle nicht-negativen reellen Zahlen von 0 bis $\sqrt{2004}$, andererseits aber auch für alle negativen reellen Zahlen größer oder gleich $-\sqrt{2004}$.

6) Jeder Marsbewohner hat ein, zwei oder drei Tentakeln am Kopf. Genau 1% der Marsbevölkerung sind "Dreier", 97% sind "Zweier" und 2% sind "Einser". Bei wie viel Prozent der Marsbevölkerung ist die Zahl der Tentakeln am Kopf höher als die Durchschnittszahl der Tentakeln bei der gesamten Marsbevölkerung?

- A) 1% B) 3% C) 97% D) 98% E) 99%

Antwort: D

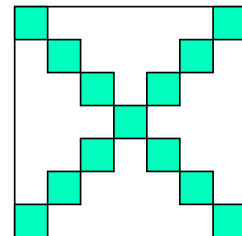
Lösung 1: Die Durchschnittszahl der Tentakeln bei der gesamten Marsbevölkerung ist

$$0,01 \cdot 3 + 0,97 \cdot 2 + 0,02 \cdot 1 = 1,99.$$

Daher haben sowohl die 97% "Zweier" als auch die 1% "Dreier" überdurchschnittlich viele Tentakel am Kopf.

Lösung 2: Weil es mehr "Einser" als "Dreier" auf dem Mars gibt, zieren des "Durchschnittsmarsianers" Scheitel weniger als zwei Tentakel. Daher haben 98% (nämlich die 97% "Zweier" und das eine Prozent "Dreier") der Marsianer überdurchschnittlich viele Tentakel am Kopf.

7) s ist eine ungerade Zahl. In einem Quadrat mit der Seitenlänge s befinden sich in den Diagonalen lauter gefärbte kleine Einheitsquadrate, wie in der Figur für ein Quadrat mit der Seitenlänge 7 angedeutet. Wie groß ist die weiße Fläche?



- A) s^2+1-2s B) s^2+4-4s C) $2s^2+1-4s$ D) s^2-1-2s E) s^2-2s

Antwort: A

Entlang der einen Diagonale gibt es s Einheitsquadrate, längs der anderen $s-1$ weitere Einheitsquadrate. Insgesamt sind also $2s-1$ Einheitsquadrate mit Gesamtflächeninhalt $2s-1$ gefärbt. Der Inhalt der weißen Fläche ist daher

$$s^2 - (2s - 1) = s^2 + 1 - 2s.$$

8) Wie viele zweiziffrige Zahlen gibt es, deren Quadrat und deren dritte Potenz dieselbe Einerziffer haben?

- A) 1 B) 9 C) 10 D) 21 E) mehr als 30

Antwort: E

Die natürlichen Zahlen, deren Quadrat und deren dritte Potenz dieselbe Einerziffer haben, sind die Zahlen, die auf 0, 1, 5 oder 6 enden. Daher gibt es unter den zweistelligen Zahlen je 4 mit der geforderten Eigenschaft, die die Zehnerziffern 1, 2, 3, ... , 9 haben. Zusammen sind das also 36 derartige Zahlen.

9) Ein großes Quadrat ist aus 18 kleineren Quadraten zusammengesetzt, von denen 17 die Seitenlänge 1 haben. Die Fläche des großen Quadrats ist

- A) 25 B) 49 C) 81 D) 100 E) 225

Antwort: C

Ist x die Seitenlänge des großen Quadrats, y die Seitenlänge des mittleren Quadrats, so gilt für den Flächeninhalt A des großen Quadrats

$$A = x^2 = y^2 + 17.$$

Daraus folgt $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 17$. x und y müssen natürliche Zahlen sein, daher sind auch $x+y$ und $x-y$ natürliche Zahlen. 17 ist eine Primzahl und lässt sich nur in der Form $17 = 1 \cdot 17$ als Produkt natürlicher Zahlen darstellen. Daraus folgt

$$x + y = 17, x - y = 1$$

und in weiterer Folge $x = 9, y = 8$. Der Flächeninhalt des großen Quadrats ist also $A = x^2 = 81$.

10) Wie viele rechtwinkelige Dreiecke können dadurch gebildet werden, dass man drei Eckpunkte eines regelmäßigen 14-ecks verbindet?

- A) 72 B) 82 C) 84 D) 88 E) eine andere Anzahl

Antwort: C

Nach Satz von Thales ist ein von drei Eckpunkten eines regelmäßigen 14-ecks gebildetes Dreieck genau dann rechtwinkelig, wenn zwei der drei Punkte Endpunkte eines Durchmessers des Umkreises des 14-ecks, also gegenüberliegende Eckpunkte des 14-ecks sind. Es gibt 7 Möglichkeiten, zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines regelmäßigen 14-ecks auszuwählen. Für jede dieser 7 Auswahlmöglichkeiten für die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks gibt es 12 Möglichkeiten für den dritten Eckpunkt des Dreiecks. Daher kann man $7 \cdot 12 = 84$ rechtwinkelige Dreiecke bilden.

- 4 Punkte Beispiele -

11) Auf einer Weide befinden sich 15 Schafe und eine bestimmte Anzahl von Hirten. Es entfernen sich die Hälfte der Hirten und ein Drittel der Schafe. Dann sind noch 50 Beine auf der Weide. Wie viele Beine waren zu Beginn auf der Weide?

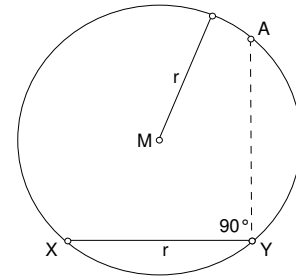
- A) 60 B) 72 C) 80 D) 90 E) 100

Antwort: C

Wenn ein Drittel der 15 Schafe die Weide verlässt, sind noch 10 Schafe auf der Weide, und diese 10 Schafe haben (unter Vernachlässigung anatomischer Abnormitäten) 40 Beine. Der Rest der 50 Beine gehört zu Hirten. Daher sind noch 5 Hirten auf der Weide; ursprünglich waren es aber 10 Hirten. Daher waren zu Beginn 15 Schafe und 10 Hirten mit zusammen $4 \cdot 15 + 2 \cdot 10 = 80$ Beinen auf der Weide.

12) Welchen Winkel schließen die Strecken AX und AY ein?

- A) $22\frac{1}{2}^\circ$ B) 30° C) 45° D) 60° E) 90°

**Antwort: B**

Wegen $XY \perp AY$ ist AX ein Durchmesser des Kreises (Satz von Thales!) und enthält den Kreismittelpunkt M. Daher zerlegt die Strecke MY das Dreieck $\triangle AXY$ in zwei Teildreiecke $\triangle XYM$ und $\triangle MYA$.

Das Dreieck $\triangle XYM$ ist wegen $MX = MY = XY = r$ gleichseitig, also gilt $\angle MYX = 60^\circ$ und daher $\angle AYM = 90^\circ - \angle MYX = 30^\circ$.

Weil das Dreieck $\triangle MYA$ wegen $MY = MA = r$ gleichschenkelig ist (Basis YA), gilt schließlich $\angle XAY = \angle MAY = \angle AYM = 30^\circ$.

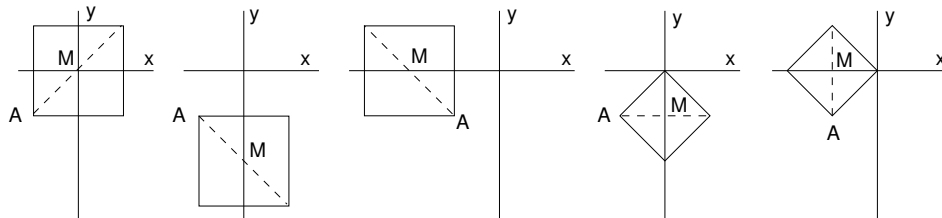
13) Wie viele Quadrate gibt es, die einen Eckpunkt im Punkt A(-1/-1) haben, und eine Koordinatenachse als Symmetrieachse?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Antwort: D

Jedes Quadrat hat 4 Symmetrieachsen, die alle durch den Quadratmittelpunkt gehen: die beiden gemeinsamen Seitensymmetralen gegenüberliegender Seiten ("seitenparallele Symmetrieachsen") und die beiden Diagonalen.

Weil jedes Quadrat mit gegebenem Eckpunkt A durch seinen Mittelpunkt M umkehrbar eindeutig bestimmt ist, ist die Anzahl der möglichen Quadrate gleich der Anzahl der möglichen Lagen des Mittelpunkts.



Setzen wir voraus, dass eine der Koordinatenachsen eine seitenparallele Symmetrieachse des Quadrats mit Eckpunkt A ist, dann muss die durch A gehende Diagonale des Quadrats mit dieser Koordinatenachse einen Winkel von 45° einschließen; mögliche Mittelpunkte für ein derartiges Quadrat sind also die Schnittpunkte einer der beiden Koordinatenachsen mit einer der beiden Geraden durch A mit Steigung $+1$ oder -1 . Im ersten Fall ergibt sich nur $M(0/0)$ als möglicher Mittelpunkt, im zweiten Fall sind die möglichen Mittelpunkte $M(0/-2)$ und $M(-2/0)$.

Setzen wir voraus, dass eine der beiden Koordinatenachsen Diagonale des Quadrats ist, dann ist die durch A gehende zweite Diagonale des Quadrats normal zu dieser Koordinatenachse. Die möglichen Lagen des Mittelpunkts des Quadrats sind nun $M(0/-1)$ (BD auf der y-Achse) beziehungsweise $M(-1/0)$ (BD auf der x-Achse).

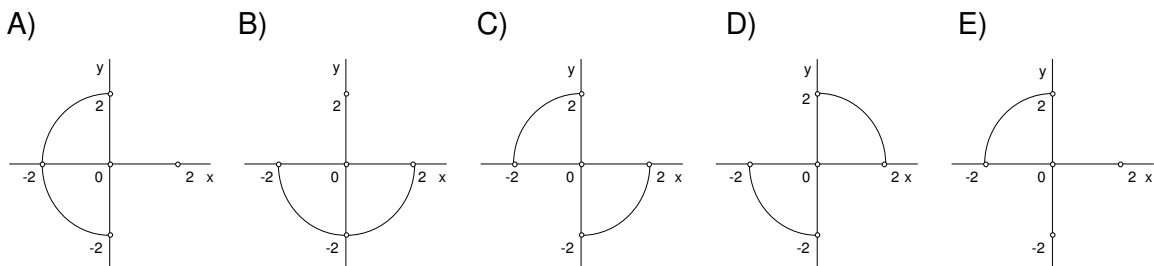
14) In einer undurchsichtigen Lostrommel befinden sich 100 Kugeln, die mit den Nummern von 1 bis 100 fortlaufend durchnummeriert sind. Wie viele Kugeln muss ich mindestens blind aus der Trommel ziehen, damit das Produkt der Zahlen auf den gezogenen Kugeln sicher durch 4 teilbar ist?

- A) 51 B) 52 C) 53 D) 54 E) 55

Antwort: B

Zieht man zuerst alle 50 Kugeln mit ungeraden Nummern und eine Kugel mit einer geraden, aber nicht durch 4 teilbaren Nummer, so ist das Produkt der 51 gezogenen Zahlen nicht durch 4 teilbar. Daher reichen 51 Kugeln nicht immer, wenn ein durch 4 teilbares Produkt erreicht werden soll. Zieht man aber 52 Kugeln, so sind darunter in jedem Fall mindestens zwei mit geraden Nummern, und das Produkt der 52 Zahlen ist sicher durch 4 teilbar.

15) Welches der folgenden Bilder stellt die Menge aller Punkte dar, deren Koordinaten $(x|y)$ die Bedingungen $xy < 0$ und $|x|^2 + |y|^2 = 4$ erfüllen?

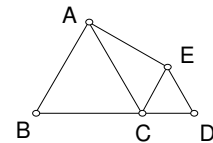


Antwort: C

Die Punkte, deren Koordinaten $(x|y)$ die Bedingung $|x|^2 + |y|^2 = 4$ erfüllen, sind genau die Punkte der Kreislinie mit Mittelpunkt O und Radius 2. Die Zusatzbedingung $xy < 0$ legt alle Punkte fest, deren x- und y-Koordinaten verschiedene Vorzeichen haben, also die Punkte des zweiten und vierten Quadranten.

16) In der Abbildung haben die gleichseitigen Dreiecke ABC und ECD die Seitenlängen 2 bzw. 1. Was ist die Fläche des Vierecks ABCE?

- A) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{4+5\sqrt{3}}{4}$ C) 3 D) $\frac{6+\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$



Antwort: E

Wegen $\angle ACB = \angle DCE = 60^\circ$ gilt auch $\angle ECA = 60^\circ$. Zusammen mit $AC = 2$, $CE = 1$ folgt daraus, dass $\triangle ACE$ die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 2 ist. Daraus folgt

$$A_{ABCE} = A_{ABC} + A_{ACE} = \frac{3}{2} \cdot A_{ABC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

17) Wie viele positive ganze Zahlen kann man in der Form $a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 + a_4 \cdot 3^4$ schreiben, wenn a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 in der Menge $\{-1, 0, 1\}$ liegen müssen?

- A) 5 B) 80 C) 81 D) 121 E) 243

Antwort: D

Weil je zwei Zahlen der Form $a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 + a_4 \cdot 3^4$ mit a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 aus der Menge $\{-1, 0, 1\}$ verschieden sind, lassen sich $35 = 243$ ganze Zahlen bilden. Eine davon ist 0 (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 sind jeweils gleich 0), von den übrigen 242 sind jeweils 121 positiv und negativ, weil mit jeder Zahl z der Form $a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 + a_4 \cdot 3^4$ mit $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{-1, 0, 1\}$ auch $-z$ in dieser Form darstellbar ist, indem man a_i durch $-a_i$ ersetzt.

18) Die Zahl $(\sqrt{22+12\sqrt{2}} - \sqrt{22-12\sqrt{2}})^2$ ist

- A) negativ B) gleich 0 C) die 4. Potenz einer positiven ganzen Zahl
D) gleich $11\sqrt{2}$ E) eine positive, durch 5 teilbare ganze Zahl

Antwort: C

Es gilt

$$\begin{aligned} (\sqrt{22+12\sqrt{2}} - \sqrt{22-12\sqrt{2}})^2 &= (22+12\sqrt{2}) - 2\sqrt{22+12\sqrt{2}}\sqrt{22-12\sqrt{2}} + (22-12\sqrt{2}) \\ &= 44 - 2\sqrt{22^2 - 12^2 \cdot 2} = 44 - 2\sqrt{484 - 288} = \\ &= 44 - 2\sqrt{196} = 44 - 2 \cdot 14 = 16 = \\ &= 2^4 \end{aligned}$$

19) Wie viele Eckpunkte hat ein regelmäßiges Vieleck, wenn die Summe seiner Innenwinkel ein Siebentel von der Innenwinkelsumme eines regelmäßigen 16-ecks ist?

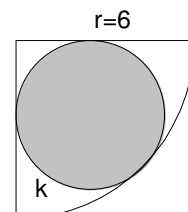
- A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 10

Antwort: B

Die Innenwinkelsumme eines n -Ecks ist $(n-2) \cdot 180^\circ$, die eines regelmäßigen 16-ecks also $14 \cdot 180^\circ$. Daher ist die Summe der Innenwinkel des gesuchten regelmäßigen Vielecks $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$. Das gesuchte Vieleck ist somit ein Quadrat (regelmäßiges 4-eck).

20) Ein Kreis k ist einem Viertelkreis mit Radius 6 wie abgebildet eingeschrieben. Was ist der Radius von k ?

- A) $\frac{6-\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C) 2,5 D) 3 E) $6(\sqrt{2}-1)$



Antwort: E

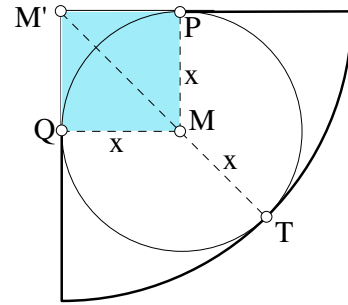
Der Mittelpunkt M' des Viertelkreises, der Mittelpunkt M des Kreises k und der Berührungspunkt T der beiden Kreise liegen auf einer Geraden, daher gilt

$$M'M + MT = 6.$$

M' und M sind diagonal gegenüber liegende Eckpunkte des Quadrats $MPM'Q$. Bezeichnen wir den Radius von k mit x , so gilt also $MM' = x\sqrt{2}$ und damit

$$x\sqrt{2} + x = 6$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{2} + 1} = \frac{6(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{6(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} = 6(\sqrt{2} - 1)$$

**- 5 Punkte Beispiele -**

21) In einer geometrischen Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ (also einer Folge für die eine Zahl q existiert, sodass $a_{n+1} = q a_n$ für alle Werte von n gilt), gilt $a_3 < a_2 < a_4$. Dann gilt auch

- A) $a_3 \cdot a_4 > 0$ B) $a_2 \cdot a_3 < 0$ C) $a_2 \cdot a_4 < 0$ D) $a_2 < 0$ E) $a_2 \cdot a_3 > 0$

Antwort: B

Wäre $a_2 < 0$, so folgte daraus

$$q = \frac{a_3}{a_2} > 1, \quad q^2 = \frac{a_4}{a_2} < 1,$$

ein Widerspruch. Daher gilt $a_2 > 0$ und folglich

$$q = \frac{a_3}{a_2} < 1, \quad q^2 = \frac{a_4}{a_2} > 1.$$

Das ist genau dann der Fall, wenn $q < -1$ ist. Daraus folgt, dass auf einander folgende Folgenglieder immer entgegengesetzte Vorzeichen haben, dass also speziell $a_2 \cdot a_3 < 0$ gilt.

22) Was ist die vorletzte Ziffer von 11^{2004} ?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Antwort: E

Lösung 1: Nach binomischem Lehrsatz gilt

$$11^{2004} = (10 + 1)^{2004} = 10^{2004} + \binom{2004}{1} \cdot 10^{2003} + \dots + \binom{2004}{2002} \cdot 10^2 + \binom{2004}{2003} \cdot 10 + 1$$

Bis auf die letzten zwei Summanden sind alle übrigen Vielfache von 100, haben also wie der letzte Summand 1 keinen Einfluss auf die vorletzte Ziffer (Zehnerziffer) von 11^{2004} . Die Zehnerziffer von 11^{2004} stimmt daher mit der

vorletzten Ziffer von $\binom{2004}{2003} \cdot 10 = 20040$ überein.

Lösung 2: Die letzten zwei Ziffern von $11^0, 11^1, 11^2, \dots, 11^{10}$ sind 01, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, 01. Daher endet auch $11^{2000} = (11^{10})^{200}$ auf 01, und $11^{2004} = 11^{2000} \cdot 11^4 = \dots 01 \dots 41$ endet auf 41.

23) Bei den Wahlen in Gemmstadt ist erstmals die Broccolipartei angetreten. Alle Wähler, die für sie gestimmt haben, haben schon einmal Broccoli gegessen, während 90% der Wähler irgendeiner der anderen vier Parteien niemals Broccoli gegessen haben. Wie viel Prozent der Stimmen hat die Broccolipartei erhalten, wenn 46% der Wählerschaft schon einmal Broccoli gegessen haben?

- A) 40% B) 41% C) 43% D) 45% E) 46%

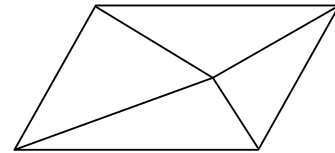
Antwort: A

Angenommen, der Stimmenanteil der Broccolipartei beträgt $x\%$. Diese $x\%$ der Wählerschaft zählen alle zu den Broccoliessern. Der Stimmenanteil der anderen Parteien beträgt $(100-x)\%$. 90% von ihnen sind Broccoliverweigerer, also sind 10% von ihnen - das sind weitere $0,1 \cdot (100-x)\%$ der Wählerschaft - ebenfalls Broccoliesser. Damit gilt

$$x + 0,1 \cdot (100-x) = 46 \Leftrightarrow 0,9x + 10 = 46 \Leftrightarrow 0,9x = 36 \Leftrightarrow x = 40.$$

Die Broccolipartei erhielt also 40% der Stimmen.

24) Ein Parallelogramm wird in 4 Dreiecke zerteilt (siehe Abbildung). Von den folgenden Gruppen von 4 Zahlen kann höchstens eine die Flächen der Dreiecke in irgend einer Reihenfolge angeben. Welche ist möglich?



- A) 14,15,18,19 B) 8,9,10,15 C) 10,11,12,19 D) 11,13,15,16
E) Alle 4 sind unmöglich.

Antwort: A

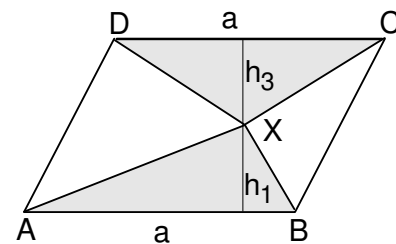
Weil gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms zu einander parallel sind, werden die Höhen h_1 und h_3 der beiden markierten Dreiecke auf derselben Geraden gemessen, ihre Summe ist die Höhe h_a des Parallelogramms. Daraus folgt

$$\begin{aligned} A_{ABX} + A_{CDX} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_3 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot (h_1 + h_3) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \\ &= \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD} \end{aligned}$$

und analog auch

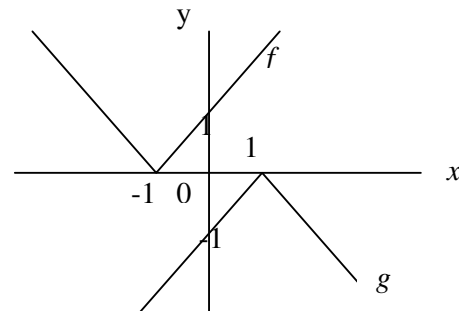
$$A_{BCX} + A_{DAX} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD}.$$

Daher können die vier angegebenen Zahlen nur dann die Flächeninhalte der vier Dreiecke angeben, wenn die Summe von zwei der vier Zahlen die Summe der anderen zwei ist. Das ist nur bei A möglich: $14 + 19 = 15 + 18$.



25) In der Figur sehen wir die Graphen der reellen Funktionen f und g . Welche Beziehung gilt für alle reellen Zahlen x ?

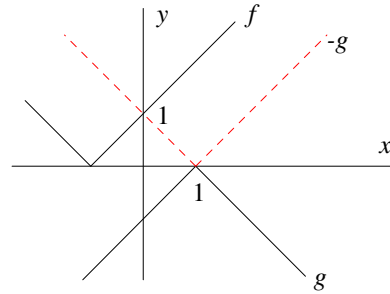
- A) $f(x) = -g(x) + 2$ B) $f(x) = -g(x) - 2$
C) $f(x) = -g(x+2)$ D) $f(x+2) = -g(x)$
E) $f(x+1) = -g(x-1)$



Antwort: C

Spiegelt man den Graph der Funktion g an der x -Achse, so erhält man den Graph der Funktion $-g$.

Es zeigt sich, dass sich derselbe Graph aber auch dadurch ergibt, dass man den von f um 2 Einheiten in x -Richtung verschiebt. Daher stimmt $f(x)$ für jede reelle Zahl x mit $-g(x+2)$ überein.



26) Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 4. Wie groß ist der Radius des Kreisbogens mit Mittelpunkt A , der die Fläche des Dreiecks in zwei gleich große Teile teilt?

- A) $\sqrt{\frac{12\sqrt{3}}{\pi}}$ B) $\sqrt{\frac{24\sqrt{3}}{\pi}}$ C) $\sqrt{\frac{30\sqrt{3}}{\pi}}$ D) $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$ E) $\sqrt{\frac{48\sqrt{3}}{\pi}}$

Antwort: A

Einer der beiden Teile, die man erhält, ist ein Kreissektor mit Zentriwinkel 60° , also ein Sechstelkreis. Der Radius muss nun so gewählt werden, dass der Flächeninhalt dieses Kreissektors/Sechstelkreises halb so groß wie der des gleichseitigen Dreiecks ist. Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt

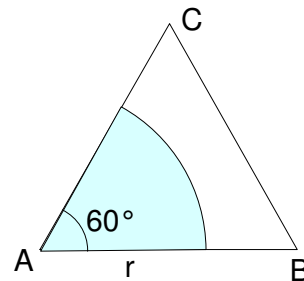
$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{s^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3},$$

für den Flächeninhalt eines Sechstelkreises mit Radius r erhalten wir

$$A_{\text{Sechstelkreis}} = \frac{r^2 \pi}{6}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{r^2 \pi}{6} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow r^2 = \frac{12\sqrt{3}}{\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{12\sqrt{3}}{\pi}}$$



27) Es sind 200 Zahlen gegeben. Zunächst sind sie alle gleich 0. Im ersten Schritt wird zu jeder Zahl 1 addiert. Im zweiten Schritt wird zu jeder zweiten Zahl (von links beginnend) 1 addiert. Im dritten Schritt wird zu jeder dritten Zahl 1 addiert, usw. Welche Zahl ist nach dem 200. Schritt an der 120. Stelle von links?

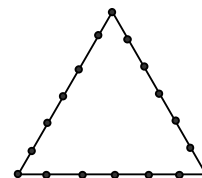
- A) 16 B) 12 C) 32 D) 24 E) 20

Antwort: A

Bezeichnet a_n die n -te Zahl von links, dann wird a_n im k -ten Schritt genau dann um 1 erhöht, wenn n durch k teilbar ist. Somit wird a_n genau so oft um 1 vergrößert, wie n Teiler hat. Am 120. Stelle steht also schon nach 120 Schritten die Anzahl der Teiler von 120, und diese Zahl wird dann nie mehr erhöht.

Wegen $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ hat 120 genau $(3+1)(1+1)(1+1) = 16$ Teiler.

28) Wie viele (nicht entartete) Dreiecke gibt es, deren Eckpunkte in den Punkten dieser Figur liegen?



- A) 816 B) 711 C) 777 D) 717 E) 811

Antwort: B

Die Anzahl der Möglichkeiten, 3 der 18 markierten Punkte auszuwählen, ist

$$\binom{18}{3} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 816.$$

Mitgezählt sind dabei aber auch all jene Auswahlen, bei denen die 3 Punkte auf derselben Dreiecksseite liegen, also kein Dreieck bilden. Für jede der drei Dreiecksseiten gibt es

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

Möglichkeiten, 3 Punkte aus den 7 Punkten auszuwählen. Daher gibt es $816 - 3 \cdot 35 = 711$ nicht entartete Dreiecke, deren Eckpunkte in den Punkten der Figur liegen.

29) Die Summe aller dreistelligen Zahlen (mit drei verschiedenen Ziffern), die aus den Ziffern $0 < a < b < c$ gebildet werden können, ist 1554. Wie groß ist c ?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Antwort: B

Die aus den drei verschiedenen Ziffern a , b und c bildbaren dreistelligen Zahlen sind abc , acb , bac , bca , cab und cba . In diesen sechs Zahlen kommt jede der drei Ziffern je zweimal als Hunderterziffer (mit Stellenwert 100), Zehnerziffer (Stellenwert 10) und Einerziffer (Stellenwert 1) vor. Die Summe der sechs Zahlen ist also $2(a+b+c)(100+10+1) = 222(a+b+c)$.

Aus $222(a+b+c) = 1554$ folgt unmittelbar

$$a+b+c = 7.$$

Wäre $c \geq 5$, so wäre $a+b \leq 2$ im Widerspruch zu $0 < a < b$. Wäre $c \leq 3$, so wäre $a+b \geq 4$. Aus $a = 1$ folgte $b \geq 3$ im Widerspruch zu $b < c \leq 3$; aus $a \geq 2$ folgte (wegen $a < b$) $b \geq 3$, also wieder ein Widerspruch.

Somit gilt $c = 4$ (und daher $a = 1$, $b = 2$).

30) Die Zahl $m = 999\dots 9$ wird mit 999 Neunern geschrieben. Was ist die Ziffersumme von m^2 ?

- A) 8982 B) 8991 C) 9000 D) 9009 E) 9018

Antwort: B

Vergößert man m um 1, so erhält man die Zahl, die mit 1 beginnt, worauf 999 Nullen folgen. Das bedeutet

$$m = 10^{999} - 1, \quad m^2 = (10^{999} - 1)^2 = 10^{1998} - 2 \cdot 10^{999} + 1$$

$10^{1998} - 2 \cdot 10^{999}$ ist eine 1998-stellige Zahl, sie endet auf 999 Nullen, davor steht eine Ziffer 8, die vordersten 998 Ziffern sind Neuner. In m^2 wird die letzte Null als Einerziffer durch eine Eins ersetzt. Daher hat m^2 die Ziffersumme

$$998 \cdot 9 + 8 + 1 = 999 \cdot 9 = 8991.$$