Känguru der Mathematik 2005
Gruppe Student (11. und 12. Schulstufe)
Österreich - 17.3.2005
Lösungen

- 3 Punkte Beispiele -

1) Für welchen der folgenden Werte von x ist der Wert des Ausdrucks $\frac{x^2}{x^3}$ am kleinsten?

A) 2 B) 1 C) -1 D) -2 E) -3

Antwort C

Lösung 1: Setzen wir $T(x) = \frac{x^2}{x^3}$, so erhalten wir

$$T(2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad T(1) = \frac{1}{1} = 1, \quad T(-1) = \frac{1}{-1} = -1, \quad T(-2) = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}, \quad T(-3) = \frac{9}{-27} = -\frac{1}{3}$$

Den kleinsten Wert – nämlich -1 – nimmt der Ausdruck also an, wenn x = -1.

Lösung 2: Der gegebene Ausdruck ist durch x^2 zu $\frac{1}{x}$ kürzbar. Der Wert von $\frac{1}{x}$ ist für $x < 0$ negativ, für $x > 0$ positiv. Daher scheiden die positiven Werte von x als Lösungen aus. Den kleinsten negativen Wert nimmt $\frac{1}{x}$ an, wenn der Betrag von $\frac{1}{x}$ möglichst groß ist, wenn also der Betrag von x möglichst klein ist. Daher ist die richtige Lösung x = -1.

2) Wie viele ganze Zahlen zwischen 2 und 100 sind dritte Potenzen von ganzen Zahlen?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Antwort C

Wegen $1^3 = 1 < 2$, $5^3 = 125 > 100$ haben genau die drei Zahlen $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ und $4^3 = 64$ die geforderte Eigenschaft.

3) Fünf Karten sind mit den Zahlen 1 bis 5 beschriftet und wie im Bild aufgelegt. In einem Zug können zwei Karten miteinander vertauscht werden. Wie viele Züge sind mindestens notwendig um die Zahlen auf den Karten in steigende Reihenfolge zu bringen?

1	3	5	4	2

$\Downarrow$

1	2	3	4	5

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Antwort B

1 3 5 4 2 1 3 2 4 5 1 2 3 4 5

Die Abbildung zeigt ein Beispiel für eine Lösung in 2 Zügen. Eine Lösung in nur einem Zug ist nicht möglich, weil anfangs drei Karten nicht „am vorgesehenen Platz“ sind, in einem Zug aber nur zwei Karten bewegt werden.

4) Wenn $888 \cdot 111 = 2 \cdot (2 \cdot n)^2$ gilt und n eine positive ganze Zahl ist, dann ist n gleich

A) 8 B) 11 C) 22 D) 111 E) 444

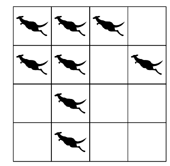
Antwort D

Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit

$$8n^2 = 888 \cdot 111 \Leftrightarrow n^2 = 111^2 .$$

Einzige positive Lösung ist also $n = 111$.

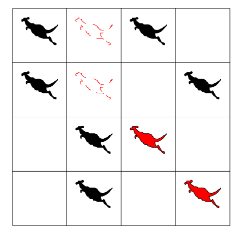
5) In den Feldern einer Tabelle befinden sich wie abgebildet 8 Kängurus. Ein Känguru kann von seinem Quadrat in jedes leer stehende Quadrat verlegt werden. Bestimme die kleinste Anzahl von Kängurus die bewegt werden müssen, sodass sich in jeder Zeile und jeder Spalte der Tabelle genau zwei Kängurus befinden.



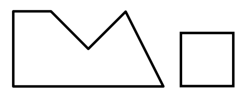
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Antwort B

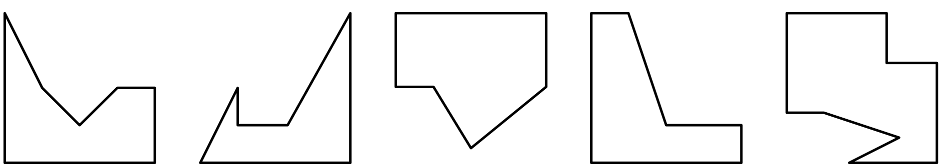
In der zweiten Spalte von links sind vier Kängurus, also zwei Kängurus zu viel. In der ersten und der zweiten Spalte von oben sind jeweils drei Kängurus, also jeweils eines zu viel. Hingegen fehlt in der dritten und vierten Spalte und in der dritten und vierten Zeile jeweils 1 Känguru. Folglich müssen die beiden obersten Kängurus aus der zweiten Spalte auf diagonal liegende Felder im rechten unteren 2×2-Quadrats bewegt werden (sh. Abbildung).



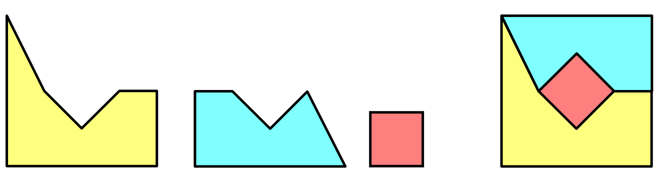
6) Ein quadratisches Stück Papier wird in drei Teile zerschnitten. Zwei der entstandenen Teile sind wie abgebildet. Welche Form hat das dritte Teilstück?



(A) (B) (C) (D) (E)



Antwort A



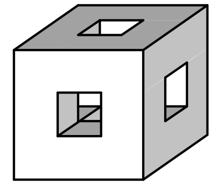
7) Welche der folgenden Zahlen kann nicht die Summe von vier auf einander folgenden positiven ganzen Zahlen sein?

A) 2002 B) 22 C) 202 D) 222 E) 220

Antwort E

Bezeichnen wir die kleinste der vier Zahlen mit x, so sind die anderen drei Zahlen x+1, x+2 und x+3. Ihre Summe ist x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = 4x + 10 = 4(x+1) + 2, also eine Zahl, die durch 2, aber nicht durch 4 teilbar ist. Von den fünf als Lösung angebotenen geraden Zahlen ist 220 die einzige, die durch 4 teilbar ist.

8) Ein 3×3×3-Würfel hat eine Masse von 810 g. Wir bohren drei Löcher wie abgebildet durch den Würfel, wobei jedes Loch ein 1×1×3 Quader ist. Die Masse des Restkörpers beträgt dann



A) 540 g B) 570 g C) 600 g D) 630 g E) 660 g

Antwort C

Der 3×3×3-Würfel mit einer Masse von 810g ist aus 27 1×1×1-Würfeln mit einer Masse von je 30g zusammengesetzt. Wird der 3×3×3-Würfel wie beschrieben durchbohrt, so werden 7 der 27 Teilwürfel mit den Maßen 1×1×1 entfernt: der zentrale (innere) Würfel und die 6 Würfel in der Mitte jeder der 6 Seitenflächen des 3×3×3-Würfels. Daher besteht der Restkörper aus 20 1×1×1-Würfeln und wiegt 20·30g = 600g.

9) Es sei f eine Funktion, sodass $f(x+1) = 2f(x)-2002$ für alle ganzzahligen Werte von x gilt und $f(2005) = 2008$ gilt. Dann ist $f(2004)$ gleich

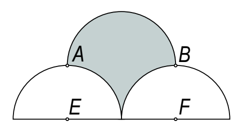
A) 2004 B) 2005 C) 2008 D) 2010 E) 2016

Antwort B

Setzt man $x = 2004$ in der Gleichung $f(x+1) = 2f(x)-2002$, so erhält man

$$f(2005) = 2f(2004) - 2002 \Leftrightarrow f(2004) = \frac{f(2005)+2002}{2} = \frac{2008+2002}{2} = 2005$$

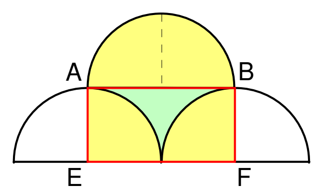
10) Gegeben sind drei Halbkreise wie abgebildet. $ABEF$ ist ein Rechteck und der Radius jedes der drei Halbkreise ist 2 cm. E und F sind die Mittelpunkte der unteren Halbkreise. Der Flächeninhalt des grauen Bereichs beträgt dann in cm²



A) 8 B) 7 C) 2π D) $2\pi+1$ E) $2\pi+2$

Antwort A

Sowohl der in der Angabe graue Bereich als auch das Rechteck ABFE setzen sich aus dem in der Abbildung links grün gefärbten Flächenstück und zwei Viertelkreisen mit Radius 2cm zusammen. Daher ist der gesuchte Flächeninhalt gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks ABFE, also wegen AB = 4cm, AE = 2cm gleich 8cm².



- 4 Punkte Beispiele -

11) Mama Känguru und ihr Kind Hupfi springen auf einer 330 m langen Laufbahn im Kreis. Beide springen genau einmal in der Sekunde, wobei Mama mit jedem Sprung 5 m zurücklegt und Hupfi 2 m. Sie beginnen zur gleichen Zeit und springen in derselben Richtung. Nach 25 Sekunden ist Hupfi erschöpft und bleibt stehen, während Mama weiter springt. Nach wie viel Sekunden holt sie ihn wieder ein?

A) 15 s B) 24 s C) 40 s D) 51 s E) 66 s

Antwort D

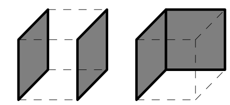
Nach 25 Sekunden hat die Kängurumama 125m zurückgelegt, Hupfi 50m. Weil eine Runde 330m lang ist und Mama Känguru 75m Vorsprung auf Hupfi hat, muss sie noch 330m – 75m = 255m springen, um Hupfi zu überrunden. Dafür benötigt sie mit einer Geschwindigkeit von 5 Meter pro Sekunde 255:5 = 51 Sekunden.

12) Andreas malt die Seitenflächen von Holzwürfeln entweder weiß oder schwarz an, wobei er bei jedem Würfel beide Farben verwendet. Wie viele verschiedene Färbungen sind möglich?

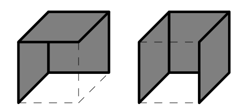
A) 8 B) 16 C) 32 D) 52 E) 64

Antwort A

Andreas kann 1, 2, 3, 4 oder 5 Seitenflächen eines Würfels schwarz färben. Was die Anordnungen der schwarz gefärbten Seitenflächen anbelangt, gibt es eine Möglichkeit bei einer schwarzen Seitenfläche. Färbt er zwei Seitenflächen schwarz, so gibt es zwei Möglichkeiten: Die schwarzen Seitenflächen können benachbarte oder gegenüberliegende Seitenflächen sein. Analog gibt es 1 Möglichkeit bei einer weißen und damit 5 schwarzen Seitenflächen und 2 Möglichkeiten (benachbart oder gegenüberliegend) bei zwei weißen und daher 4 schwarzen Seitenflächen.

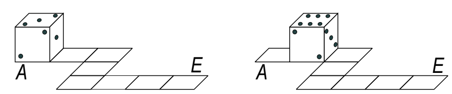


Für die Anordnung von 3 schwarzen und 3 weißen Seitenflächen gibt es wiederum 2 Möglichkeiten: Die drei schwarzen Seitenflächen können so angeordnet sein, dass zu jeder schwarzen Seitenfläche die gegenüberliegende Seitenfläche weiß ist; dann haben die drei schwarzen Seitenflächen eine Würfelecke gemeinsam, die drei weißen Seitenflächen die gegenüberliegende Würfelecke. Sie können aber auch so angeordnet sein, dass es ein Paar gegenüber liegender schwarzer Seitenflächen gibt; dann bilden diese beiden Flächen zusammen mit der dritten schwarzen Seitenfläche ein „U“; ein entsprechendes U bilden auch die drei weißen Seitenflächen.



Insgesamt gibt es also 1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8 verschiedene Färbungen.

13) Die Summe der Punkteanzahlen auf gegenüberliegenden Seitenflächen eines Spielwürfels beträgt immer 7. Ein solcher Würfel rollt wie abgebildet von **A** nach **E** ab. Zu Beginn **A** sieht man 3 Punkte auf der oberen Fläche des Würfels. Wie viele Punkte sieht man dort am Ende **E**?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Antwort E

Jene Seitenfläche, die man am Ende E oben sieht, ist jene, die man rechts sieht, während der Würfel nach vorne gerollt wird, also die Seitenfläche mit 6 Punkten.

14) In einer Schachtel befinden sich 60 Karten. Sie sind jeweils entweder rot, blau oder weiß. Wenn wir alle roten Karten durch blaue ersetzen, gibt es doppelt so viel blaue wie weiße, aber wenn wir alle weißen durch blaue ersetzen, gibt es drei Mal so viele blaue wie rote. Wie viele blaue Karten befinden sich in der Schachtel?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

Antwort D

Bezeichnen wir die Anzahl der roten, blauen und weißen Karten mit r, b beziehungsweise w, so ergeben die Angaben die folgenden Gleichungen:

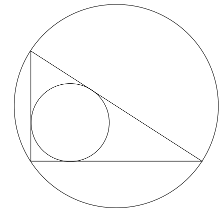
$$(i)\ r+b+w=60,\quad (ii)\ r+b=2w,\quad (iii)\ w+b=3r$$

Ersetzt man in (i) $r+b$ beziehungsweise $w+b$ gemäß (ii) und (iii) durch $2w$ beziehungsweise $3r$, so erhält man

$$2w+w=60,\ w=20;\quad r+3r=60,\ r=15$$

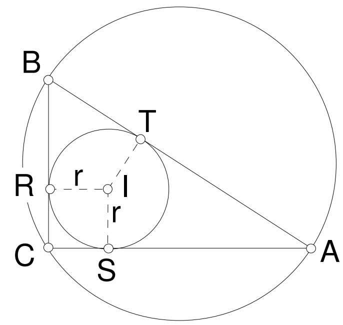
und nach Rückeinsetzen in (i) $b = 60 - 15 - 20 = 25$.

15) Es seien a und b die Kathetenlängen im abgebildeten rechtwinkeligen Dreieck. Ferner sei d der Durchmesser des Inkreises und D der Durchmesser des Umkreises. Dann ist $d+D$ gleich



A) $a+b$ B) $2(a+b)$ C) $\frac{1}{2}(a+b)$ D) $\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

Antwort A



Wir bezeichnen den Berührpunkt des Inkreises (Mittelpunkt I) mit der Hypotenuse AB des Dreiecks mit T; R und S seien die Berührpunkte mit den Katheten BC beziehungsweise AC.
Nach Satz von Thales ist AB Durchmesser des Umkreises des Dreiecks, also gilt $D = AB = AT + BT$..
Weil jede Kreistangente normal zum zugehörigen Berührradius ist, und weil die beiden Tangentenstrecken aus einem Punkt an einen Kreis gleich lang sind, ist das Viereck $CSIR$ ein Quadrat, für den Inkreisradius r gilt also $r = CR = CS$. Daraus folgt

$$d + D = 2r + D = CR + CS + AT + BT = CR + CS + AS + BR = AS + CS + BR + CR = AC + BC =$$
$$= a + b$$

16) Es sei M die Menge aller reellen Zahlen x für die die Ungleichung $2^{4^x} < 4^{2^x}$ gilt. Dann ist M =

A)]-∞;1[B)]0;1[C)]-∞;1[∪]1;∞[D)]0;∞[E) **R**

Antwort A

Es gilt

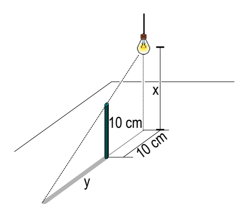
$$2^{4^x} = 2^{(2^2)^x} = 2^{2^{2x}}, \quad 4^{2^x} = (2^2)^{2^x} = 2^{2\cdot 2^x} = 2^{2^{x+1}}.$$

Weil Exponentialfunktionen mit Basis größer als 1 streng monoton wachsend sind, gilt

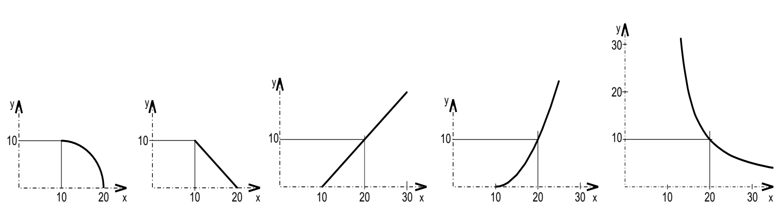
$$2^{4^x} < 4^{2^x} \Leftrightarrow 2^{2^{2x}} < 2^{2^{x+1}} \Leftrightarrow 2^{2x} < 2^{x+1} \Leftrightarrow 2x < x+1 \Leftrightarrow x < 1.$$

Das bedeutet, dass M =]-∞;1[.

17) Eine Glühbirne bewegt sich senkrecht über einem Tisch, wobei sie 10 cm über dem Tisch beginnt (siehe Graphik). Ein 10 cm langer Bleistift steht wie abgebildet senkrecht auf dem Tisch, und wirft einen Schatten auf dem Tisch. Welche der folgenden Kurven beschreibt die Länge des Schattens y in cm als Funktion der Höhe x in cm, der Glühbirne über dem Tisch?



A) B) C) D) E)



Antwort E

Nach Strahlensatz gilt $x : (y+10) = 10 : y$. Daraus folgt $xy = 10\,y + 100$ und somit $y\,(x - 10) = 100$, letztlich also

$$y = \frac{100}{x-10}$$

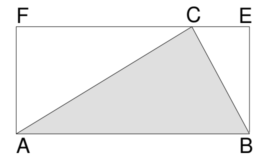
18) Zwei gleich große Flaschen sind mit einem Gemisch aus Wasser und Saft gefüllt. Die Verhältnisse von Wasser zu Saft in den beiden Flaschen betragen 2:1 bzw. 4:1. Wir schütten den Inhalt beider Flaschen in eine gemeinsame Flasche. Das Verhältnis von Wasser zu Saft im resultierenden Gemisch beträgt dann

A) 3:1 B) 6:1 C) 11:4 D) 5:1 E) 8:1

Antwort C

Bei gleicher Größe enthält die erste Flasche 10 Teile Wasser, 5 Teile Saft, die zweite Flasche 12 Teile Wasser und 3 Teile Saft. Das Gemisch enthält daher 22 Teile Wasser und 8 Teile Saft, das Verhältnis Wasser zu Saft beträgt also 22:8 = 11:4.

19) In nebenstehender Figur sehen wir ein Rechteck $ABEF$ und ein Dreieck ABC. Wir wissen, dass der Winkel $\angle ACF$ gleich groß ist wie der Winkel $\angle CBE$. Wenn $FC = 6$ und $CE = 2$ gelten, beträgt die Fläche von ABC



A) 12 B) 16 C) $8\sqrt{2}$ D) $8\sqrt{3}$ E) ein anderer Wert

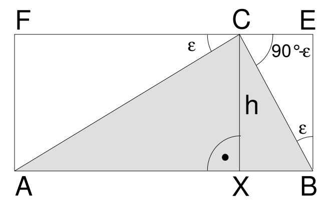
Antwort D

Wegen $\angle ACF + \angle ACB + \angle BCE = 180°$ und CE $\perp$ BE gilt

$\angle ACB = 180° - \angle ACF - \angle BCE = 180° - \angle ACF - (90° - \angle CBE) = 90°$.

Folglich ist das Dreieck ABC rechtwinkelig. Bezeichnen wir den Höhenfußpunkt auf AB mit X, so gilt nach Höhensatz

$$h^2 = XC^2 = AX \cdot XB = FC \cdot CE = 12, \quad h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$



Für die Fläche A_{ABC} des Dreiecks ABC bedeutet das

$$A_{ABC} = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{(6+2) \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$$

20) Stefan sagt jeden zweiten Tag nur die Wahrheit. An den anderen Tagen lügt er immer. Er spricht heute genau vier der folgenden Sätze aus. Welchen Satz hat er heute sicher nicht ausgesprochen?

A) Die Anzahl meiner Freunde ist eine Primzahl.
B) Ich habe gleich viele männliche und weibliche Freunde.
C) Ich heiße Stefan.
D) Ich sage immer die Wahrheit.
E) Drei meiner Freunde sind älter als ich es bin.

Antwort C

Angenommen, Stefan sagt: „Ich heiße Stefan." Dann sagt er nicht nur mit diesem Satz, sondern auch mit jedem anderen Satz die Wahrheit. Die Aussage „Ich sage immer die Wahrheit" ist im Widerspruch dazu aber die Unwahrheit, weil Stefan jeden zweiten Tag lügt.

- 5 Punkte Beispiele -

21) Welche der folgenden Zahlen kann als Produkt von vier verschiedenen ganzen Zahlen größer als 1 dargestellt werden?

A) 625 B) 124 C) 108 D) 2187 E) 2025

Antwort E

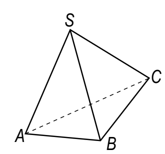
Die Primfaktorenzerlegungen der gegebenen Zahlen liefern

$$625 = 5^4, \quad 124 = 2^2 \cdot 31, \quad 108 = 2^2 \cdot 3^3, \quad 2187 = 3^7, \quad 2025 = 3^4 \cdot 5^2.$$

Für 625 und 124 ist schon die Anzahl der Primfaktoren (die nicht alle verschieden sind) nicht größer als 4; diese beiden Zahlen können also sicher nicht als Produkt von vier verschiedenen ganzen Zahlen größer als 1 dargestellt werden.
Alle zulässigen Faktoren von 2187 sind Potenzen von 3 mit positiven ganzzahligen Exponenten. Die kleinsten vier solchen Potenzen (3, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$ und $3^4 = 81$) ergeben als Produkt $3^{10} > 2187$. Daher scheidet auch 2187 als Antwort aus.
Auch 108 kann nicht als Produkt von vier verschiedenen ganzzahligen Faktoren größer also 1 dargestellt werden: Angenommen, nur einer der Faktoren ist gerade (und damit ein Vielfaches von $2^2 = 4$). Dann müsste man 3^3 (oder einen Teiler davon) in drei verschiedene Faktoren größer als 1 zerlegen, und das ist nicht möglich. Angenommen, zwei der Faktoren sind gerade. Weil die beiden geraden Faktoren verschieden sein müssen, ist (mindestens) einer auch ein Vielfaches von 3. Dann bleibt aber höchstens noch 3^2 als „Rest“, aus dem zwei verschieden Faktoren größer als 1 gebildet werden müssten, und auch das ist nicht möglich.
Somit ist die gesuchte Zahl 2025, die verlangte Darstellung als Produkt von vier verschiedenen ganzzahligen Faktoren größer als 1 ist

$$2025 = 3 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot (3 \cdot 5) = 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 15.$$

22) In der Pyramide *SABC* haben alle Begrenzungsdreiecke mit dem Eckpunkt *S* in *S* einen rechten Winkel. Die Flächeninhalte von *SAB*, *SAC* und *SBC* betragen 3, 4 bzw. 6. Was ist das Volumen von *SABC*?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 12

Antwort A

Bezeichnen wir die Längen der Kanten *SA*, *SB* und *SC* mit *a*, *b* beziehungsweise *c*, so erhalten wir aufgrund der rechten Winkel in *S*

$$A_{SAB} = \tfrac{1}{2} \cdot ab = 3, \quad A_{SAC} = \tfrac{1}{2} \cdot ac = 4, \quad A_{SBC} = \tfrac{1}{2} \cdot bc = 6 \qquad (*)$$

Daraus folgt wegen $a, b, c > 0$

$$\tfrac{1}{8} \cdot (abc)^2 = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72 \Leftrightarrow (abc)^2 = 576 \Leftrightarrow abc = 24.$$

Das ergibt schließlich für das Volumen *V* der Pyramide

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot A_{SAB} \cdot c = \tfrac{1}{6} \cdot abc = 4.$$

23) Wenn die Ziffernsumme von *m* 30 ist, so kann die Ziffernsumme von *m+3* welchen der folgenden Werte nicht annehmen?

A) 6 B) 15 C) 21 D) 24 E) 33

Antwort C

Eine Zahl *m* und ihre Ziffernsumme lassen bei Division durch 9 denselben Rest. Daher lässt nicht nur die Ziffernsumme 30 von *m*, sondern auch *m* selbst bei Division durch 9 den Rest 3. Daraus folgt, dass *m*+3 und die Ziffernsumme von *m*+3 bei Division durch 9 den Rest 6 lassen müssen, und das ist bei 21 nicht der Fall. (3999, 9399, 9939 und 9993 haben jeweils die Ziffernsumme 30, die um 3 vergrößerten Zahlen 4002, 9402, 9942 und 9996 haben der Reihe nach die Ziffernsummen 6, 15, 24 und 33.)

24) In einem Beutel befinden sich 17 nummerierte Kugeln. Ihre Nummern sind von der Gestalt $5+k \cdot 125$ mit $k = 0,1,\ldots,16$, d.h. sie sind 5, 130, 255, 380, 505,…,1755, 1880, 2005. Wie viele Kugeln muss man mindestens aus dem Beutel zufällig ziehen, wenn man unter den gezogenen Kugeln sicher zwei haben möchte, deren Nummern die Summe 2010 haben?

A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 17

Antwort C

Verteilt man die 17 Zahlen 5, 130, … , 1880, 2005 auf die 9 Mengen

$M_1 = \{5, 2005\}$, $M_2 = \{130, 1880\}$, $M_3 = \{255, 1755\}$… , $M_8 = \{880, 1130\}$, $M_9 = \{1005\}$,

so ergibt sich, dass das Ziehen von nur 9 Kugeln nicht sicherstellt, dass unter den gezogenen Kugeln zwei sind, deren Summe 2010 ist: Weil jede Zahl z mit ihrer „komplementäre Zahl" 2010 – z in derselben Menge ist, erhält man, wenn man Kugeln mit 9 Zahlen aus jeder der 9 Mengen zieht, keine zwei Kugeln, deren Nummern die Summe 2010 haben.

Zieht man hingegen 10 Kugeln, so befinden sich darunter sicher zwei mit Zahlen, die aus derselben der neun Mengen stammen (Schubfachprinzip!); ihre Summe ist aufgrund der Konstruktion der Mengen 2010.

25) Es ist bekannt, dass $\log_{10}\left(\sqrt{2005}+\sqrt{1995}\right)=n$ gilt. Welchen Wert nimmt dann der Ausdruck $\log_{10}\left(\sqrt{2005}-\sqrt{1995}\right)$ an?

A) $n-1$ B) $1-n$ C) $\frac{1}{n}$ D) $n+1$

E) Es kann aus der gegebenen Information nicht eindeutig bestimmt werden.

Antwort B

Wegen $\left(\sqrt{2005}-\sqrt{1995}\right)\left(\sqrt{2005}+\sqrt{1995}\right)=2005-1995=10$ gilt

$$\sqrt{2005}-\sqrt{1995}=\frac{10}{\sqrt{2005}+\sqrt{1995}}$$

und daher

$$\log_{10}\left(\sqrt{2005}-\sqrt{1995}\right)=\log_{10}\frac{10}{\sqrt{2005}+\sqrt{1995}}=\log_{10}10-\log_{10}\left(\sqrt{2005}+\sqrt{1995}\right)=1-n.$$

26) Die positive ganze Zahl A hat genau zwei positive Teiler. Die positive ganze Zahl B hat genau fünf positive Teiler. Wie viele positive Teiler hat die Zahl $A\cdot B$?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 10

E) Es kann aus der gegebenen Information nicht eindeutig bestimmt werden.

Antwort E

Eine positive ganze Zahl hat genau dann zwei positive Teiler, wenn sie eine Primzahl ist, und genau dann fünf positive Teiler, wenn sie die vierte Potenz einer Primzahl ist. Daraus folgt

$A = p$, $B = q^4$ mit Primzahlen p und q.

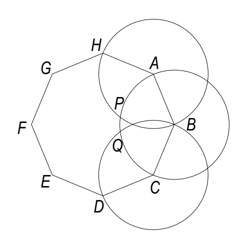
Gilt nun $p = q$, dann ist $A\cdot B = p^5$ und hat damit genau 6 positive Teiler.

Gilt aber $p \neq q$, dann ist $A\cdot B = p\cdot q^4$ und hat genau 10 Teiler.

(Beispiel: A = 2 hat die 2 Teiler 1 und 2, B = 16 die 5 Teiler 1, 2, 4, 8 und 16. Das Produkt A·B = 32 hat 6 Teiler, nämlich 1, 2, 4, 8, 16, 32.

A = 3 hat ebenfalls 2 Teiler, 1 und 3. Mit B = 16 hat das Produkt A·B = 48 nun aber 10 Teiler, nämlich 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.)

27) In nebenstehender Figur ist $ABCDEFGH$ ein regelmäßiges Achteck mit der Seitenlänge 1. Die Punkte P und Q sind Schnittpunkte von Kreisen mit Mittelpunkten in A, B und C und Radius 1. Wie groß ist der Winkel $\angle APQ$?

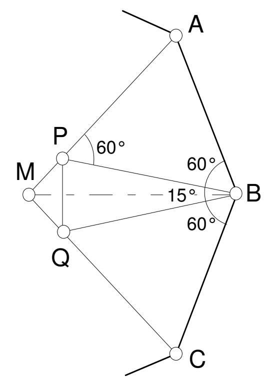


A) $\frac{19}{24}\cdot\pi$ B) $\frac{8}{11}\cdot\pi$ C) $\frac{5}{8}\cdot\pi$ D) $\frac{3}{4}\cdot\pi$ E) $\frac{7}{9}\cdot\pi$

Antwort A

Die Dreiecke ABP und BCQ sind aufgrund ihrer Konstruktion gleichseitig, also gilt

$$\angle ABP = \angle BPQ = \angle QBC = 60°.$$



Wegen $\angle$ABC = 135° (Winkel in einem regelmäßigen Achteck!) folgt daraus

$$\angle PBQ = 135° - 2 \cdot 60° = 15°.$$

Weil das Dreieck BPQ wegen BP = BQ gleichschenkelig ist, erhalten wir damit

$$\angle QPB = \tfrac{1}{2}(180° - \angle PBQ) = \tfrac{1}{2} \cdot (180° - 15°) = 82{,}5°$$

und in weiterer Folge

$$\angle APQ = \angle QPB + \angle BPA = 82{,}5° + 60° = 142{,}5°.$$

Umrechnung ins Bogenmaß ergibt schließlich

$$\angle APQ = \frac{142{,}5 \cdot \pi}{180} = \frac{285 \cdot \pi}{360} = \frac{19 \cdot \pi}{24}$$

28) Ich beginne mit einer Zahl, verdopple sie und subtrahiere 1. Nachdem ich dieses Verfahren weitere 98 Mal mit der jeweils resultierenden Zahl wiederholt habe, erhalte ich die Zahl $2^{100}+1$. Mit welcher Zahl habe ich begonnen?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) eine andere Zahl

Antwort E

Bezeichnen wir die erste Zahl mit a_1, so ergibt sich

$$a_2 = 2a_1 - 1$$

und in weiterer Folge allgemein

$$a_{n+1} = 2a_n - 1\,.$$

Nach insgesamt 99 Schritten (erster Schritt und 98 weitere) erhält man a_1. Betrachten wir nun statt der Folge der a_i die durch

$$b_i = a_i - 1$$

gegebene Folge, so gilt

$$b_1 = a_1 - 1, \quad b_{n+1} = a_{n+1} - 1 = (2a_n - 1) - 1 = 2(a_n - 1) = 2b_n\,,$$

das heißt, die Folge der b_i ist eine geometrische Folge mit $q = 2$. Daraus folgt

$$b_n = b_1 \cdot 2^{n-1}$$

und somit

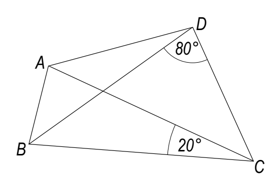
$$a_{100} = b_{100} + 1 = b_1 \cdot 2^{99} + 1 = (a_1 - 1) \cdot 2^{99} + 1 = 2^{100} + 1$$

$$(a_1 - 1) \cdot 2^{99} = 2^{100}$$

$$a_1 - 1 = 2$$

$$a_1 = 3$$

29) Im Viereck *ABCD* halbiert die Diagonale *BD* den Winkel $\angle ABC$ und es gilt *AC* = *BC*. Ferner gilt $\angle BDC$ = *80°* und $\angle$ *ACB* = *20°*. Dann gilt $\angle BAD$ =



A) 90° B) 100° C) 110° D) 120° E) 135°

Antwort D

Wegen *AC* = *BC*.ist das Dreieck *ABC* gleichschenkelig mit Basis AB, und es gilt

$$\angle BAC = \angle CBA = \tfrac{1}{2} \cdot (180° - \angle ACB) = \tfrac{1}{2} \cdot (180° - 20°) = 80°.$$

A und *D* liegen auf derselben Seite von *BC*, und $\angle BAC = \angle BDC$ = 80°. Daher liegen *A* und *D* auf demselben Randwinkelkreisbogen über der Sehne *BC*; *ABCD* ist also ein Sehnenviereck.

Weil *BD* den Winkel $\angle ABC$ halbiert, also die Winkel $\angle CBD$ und $\angle DBA$ gleich sind, sind auch die Sehnen *AD* und *CD* des Umkreises von *ABCD* gleich lang. Daher ist auch das Dreieck *ACD* gleichschenkelig, und es gilt

$$\angle CAD = \angle DCA = \angle DBA = \tfrac{1}{2} \cdot \angle CBA = \tfrac{1}{2} \cdot 80° = 40°$$
$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 80° + 40° = 120°$$

30) Heinz fährt von *A* nach *B*, wobei er plant mit einer bestimmten konstanten Geschwindigkeit zu fahren. Er bemerkt, dass er 5 Stunden früher als geplant ankommen würde, wenn er seine Geschwindigkeit um 5 km/h steigert, und 8 Stunden früher, wenn er seine Geschwindigkeit um 10 km/h steigert. Was ist seine geplante Geschwindigkeit?

A) 10 km/h B) 15 km/h C) 20 km/h D) 25 km/h
E) Es kann aus der gegebenen Information nicht eindeutig bestimmt werden.

Antwort B

Bezeichnen wir die Entfernung von *A* nach *B* (in km) mit s, Heinz' geplante Geschwindigkeit (in km/h) mit *v* und seine geplante Fahrzeit (in h) mit *t*, so gilt $s = v \cdot t$.
Bei der „etwas schnelleren Variante ist seine Geschwindigkeit v + 5, seine Fahrzeit t – 5. Daraus folgt (weil sich die Entfernung von *A* nach *B* nicht ändert)

$$vt = (v+5)(t-5)$$
$$vt = vt + 5t - 5v - 25$$
$$t = v + 5$$

Bei der „viel schnelleren Variante" ist seine Geschwindigkeit v + 10, seine Fahrzeit t – 8. Daraus folgt mit $t = v + 5$

$$vt = (v+10)(t-8)$$
$$vt = vt + 10t - 8v - 80$$
$$10t - 8v = 80$$
$$10(v+5) - 8v = 80$$
$$2v + 50 = 80$$
$$v = 15$$