Känguru der Mathematik 2006
Gruppe Student (11. und 12. Schulstufe)
Österreich - 16.3.2006
Lösungen

- 3 Punkte Beispiele -

1) Welche Zahl ist am größten?

A) 2006·2006 B) 2005·2007 C) 2004·2008 D) 2003·2009 E) 2002·2010

Antwort A

Lösung 1: Es gilt (n-m)(n+m) = n²-m² und daher

$$2005 \cdot 2007 = (2006-1)(2006+1) = 2006^2 - 1^2$$
$$2004 \cdot 2008 = (2006-2)(2006+2) = 2006^2 - 2^2$$
$$2003 \cdot 2009 = (2006-3)(2006+3) = 2006^2 - 3^2$$
$$2002 \cdot 2010 = (2006-4)(2006+4) = 2006^2 - 4^2$$

Das größte der fünf Produkte ist also 2006·2006.

Lösung 2: Das größte der fünf Produkte ist 2006·2006 = 4024036, denn 2005·2007 = 4024035, 2004·2008 = 4024032, 2003·2009 = 4024027, und 2002·20010 = 4024020.

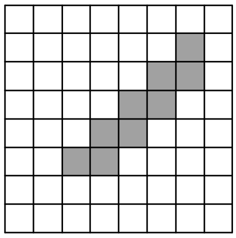
2) Wie viele Ziffern 0 gibt es am Ende des Produkts der ersten 2006 Primzahlen?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 9 E) 26

Antwort B

Es gilt 2·5 = 10. Alle weiteren 2004 Primzahlen des Produkts (außer 2 und 5) sind zu 10 teilerfremd; ihr Produkt endet also auf eine von 5 verschiedene ungerade Ziffer. Damit endet das Produkt der ersten 2006 Primzahlen auf genau eine Ziffer 0.

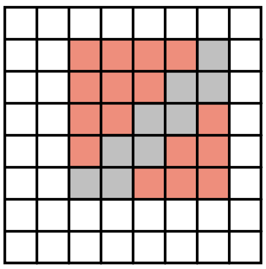
3) Wir betrachten den grau gefärbten Bereich. Was ist die größte Zahl von kleinen Quadraten, die ich noch zusätzlich grau färben kann, um einen Bereich mit gleichem Umfang zu erhalten.



A) 0 B) 7 C) 18 D) 12 E) 16

Antwort E

Der Umfang des grau gefärbten Bereichs hat die Länge 20. Das ist zugleich der Umfang jenes Quadrats mit Seitenlänge 5, dessen linker unterer und rechter oberer Eckpunkt mit den entsprechenden Eckpunkten des grau gefärbten Bereichs übereinstimmt. Daher kann dieses ganze Quadrat grau gefärbt werden. Weil ein Quadrat unter allen Rechtecken mit gleichem Umfang den größten Flächeninhalt hat, können über die noch nicht gefärbten Felder des Quadrats hinaus keine weiteren Felder gefärbt werden, ohne den Umfang des gefärbten Bereichs zu vergrößern. Weil schon 9 der 25 Felder des Quadrats gefärbt sind, können also noch höchstens 16 weitere gefärbt werden.



4) Auf einem Tisch befinden sich jene vier Karten, die in der nebenstehenden Figur abgebildet sind. Jede Karte hat auf einer Seite eine Zahl und auf der anderen einen Buchstaben. Peter sagt: „Für jede Karte auf dem Tisch gilt: Wenn sich auf einer Seite ein Vokal befindet, so befindet sich auf der anderen Seite eine gerade Zahl.“ Was ist die kleinste Zahl von Karten die Hanni umdrehen muss um die Wahrheit von Peters Aussage zu überprüfen?

$\boxed{E}$
$\boxed{K}$
$\boxed{4}$
$\boxed{7}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Antwort C

Klarerweise muss Hanni die Karte mit dem Vokal E umdrehen, um zu überprüfen, ob auf der Rückseite eine gerade Zahl steht. Über Karten mit einem Konsonanten auf einer Seite macht Peter keine Aussage, also muss Hanni die Karte K nicht umdrehen, aber auch nicht die Karte 4: Weder ein Vokal noch ein Konsonant auf der Rückseite widerspräche Peters Behauptung.
Als zweite Karte muss Hanni aber die Karte 7 wenden: Stünde auf ihrer Rückseite ein Vokal, so widerspräche das Peters Behauptung.

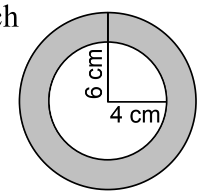
5) Zwei Züge mit derselben Länge fahren in entgegen gesetzten Richtungen. Der erste ist mit 100 km/h unterwegs, und der zweite mit 120 km/h. Ein Passagier auf dem ersten Zug beobachtet, dass der zweite genau 6 Sekunden benötigt, um an ihm vorbei zu fahren. Wie lange benötigt der erste Zug um an einem Passagier des zweiten Zugs vorbei zu fahren?

A) 5 Sek. B) 6 Sek. C) zwischen 6 und 7 Sek. D) 7 Sek. E) mehr als 7 Sek.

Antwort B

Der zweite Zug fährt am Passagier des ersten Zugs mit einer Relativgeschwindigkeit von 220km/h vorbei. Dieselbe Relativgeschwindigkeit hat der erste Zug für einen Passagier des zweiten Zugs. Weil beide Züge gleich lang sind, bedeutet das, dass der erste Zug gleich lang braucht, um am Passagier des zweiten Zugs vorbei zu fahren, wie der zweite Zug braucht, um am Fahrgast des ersten Zugs vorbei zu fahren.

6) Susi hat zwei Anhänger aus demselben Material. Sie sind gleich dick und gleich schwer. Einer hat die Form eines Kreisrings mit Außenradius 6 cm und Innenradius 4 cm, wie abgebildet. Der zweite hat die Form eines Kreises. Was ist der Radius des zweiten Anhängers?



A) 4 cm B) $2\sqrt{6}$ cm C) 5 cm D) $2\sqrt{5}$ cm E) $\sqrt{10}$ cm

Antwort D

Sind die Anhänger aus demselben Material und gleich schwer, so haben sie dasselbe Volumen. Weil sie darüber hinaus gleich dick sind, müssen sie auch dieselbe Grundfläche haben. Die Grundfläche des ersten Anhängers in cm² ist

$$A_{Ring} = \left(r_{außen}^2 - r_{innen}^2\right)\cdot \pi = \left(6^2 - 4^2\right)\cdot \pi = 20\pi\,.$$

Sie stimmt mit der kreisförmigen Grundfläche des zweiten Anhängers überein. Für dessen Radius R ergibt sich daher

$$R^2\pi = 20\pi\ \text{cm}^2,\quad R = \sqrt{20}\,\text{cm} = 2\sqrt{5}\,\text{cm}.$$

7) Die Differenz von je zwei auf einander folgenden Zahlen der Liste a, b, c, d, e ist gleich groß. Wenn b = 5,5 und e = 10 gelten, wie groß ist a?

A) 0.5 B) 3 C) 4 D) 4.5 E) 5

Antwort C

Bezeichnen wir die Differenz auf einander folgender Zahlen der Liste mit x, so gilt

$$a = b - x, \quad c = b + x, \quad d = c + x = b + 2x, \quad e = d + x = b + 3x.$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$x = \frac{e-b}{3} = \frac{10-5{,}5}{3} = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5.$$

Damit erhalten wir schließlich $a = b - x = 5{,}5 - 1{,}5 = 4$.

8) Wenn $4^x = 9$ und $9^y = 256$ gelten, dann gilt xy =

A) 2006 B) 48 C) 36 D) 10 E) 4

Antwort E

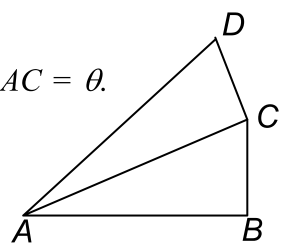
Lösung 1: Aus $4^x = 9$, $9^y = 256$ folgt $4^{xy} = 9^y = 256$. Wegen $256 = 4^4$ ergibt das xy = 4.
Lösung 2: Aus $4^1 < 9 < 4^2 = 16$ und $9^2 = 81 < 256 < 9^3 = 729$ folgt $1 < x < 2$, $2 < y < 3$. Damit erhalten wir als Abschätzung $2 < xy < 6$. Die einzige angebotene Lösung, die diese Bedingung erfüllt, ist 4.

9) Wir betrachten alle 9-ziffrigen Zahlen, die jeweils aus allen 9 Ziffern 1,2,...,9 gebildet werden können (jede der Ziffern kommt in jeder Zahl also genau einmal vor). Jede derartige Zahl wird auf ein Blatt Papier geschrieben, und die Blätter werden alle in eine Schachtel gelegt. Was ist die kleinste Zahl dieser Blätter, die ich aus der Schachtel blind ziehen muss, wenn ich sicher gehen will, dass sich unter den gezogenen Zahlen zwei mit derselben ersten Ziffer befinden?

A) 9! B) 8! C) 72 D) 10 E) 9

Antwort D

Jede der Zahlen hat eine der 9 Ziffern von 1 bis 9 als erste Ziffer. Zieht man 9 Zettel aus der Schachtel, so können die 9 darauf geschriebenen Zahlen 9 verschiedene erste Ziffern haben. Spätestens mit dem Ziehen des zehnten Zettels zieht man aber stets eine Zahl, deren erste Ziffer auch eine schon zuvor gezogene Zahl hat.



10) In der Figur gilt AB = 1, $\angle ABC = \angle ACD = 90°$ und $\angle CAB = \angle DAC = \theta$. Wie lang ist AD?

A) $\cos\theta + \tan\theta$ B) $\frac{1}{\cos 2\theta}$ C) $\cos^2\theta$ D) $\cos 2\theta$ E) $\frac{1}{\cos^2\theta}$

Antwort E

Es gilt $AB : AC = AC : AD = \cos\theta$, also

$$AC = \frac{AB}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad AD = \frac{AC}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

- 4 Punkte Beispiele -

11) Welche der 5 Funktionsgleichungen bestimmt eine Funktion, deren Graph die y-Achse als Symmetrieachse hat?

A) $y = x^2 + x$ B) $y = x^2 \cdot \sin x$ C) $y = x \cdot \cos x$ D) $y = x \cdot \sin x$ E) $y = x^3$

Antwort D

Der Graph einer Funktion f hat genau dann die y-Achse als Symmetrieachse, wenn

$$f(-x) = f(x) \text{ für alle } x$$

gilt. Nun ist

$$(-x)^2 + (-x) = x^2 - x, \quad (-x)^3 = -x^3,$$

also gilt für die Funktionen aus A) und E) nicht $f(-x) = f(x)$.

Weiters ist $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, und daher

$$(-x)^2 \cdot \sin(-x) = x^2 \cdot (-\sin x), \quad (-x) \cdot \cos(-x) = -x \cdot \cos x,$$

also sind auch die Graphen der Funktionen aus B) und C) nicht syymetrisch bezüglich der y-Achse.

Hingegen erhalten wir

$$(-x) \cdot \sin(-x) = (-x) \cdot (-\sin x) = x \cdot \sin x.$$

Somit ist die Funktion aus D) die einzige mit einem zur y-Achse symmetrischen Graphen.

12) Auf einem Rouletterad befinden sich alle 37 ganzen Zahlen von 0 bis 36. Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet die Kugel auf einer Primzahl?

A) 5/18 B) 11/37 C) 11/36 D) 12/37 E) 1/3

Antwort B

Unter den 37 natürlichen Zahlen von 0 bis 36 sind 11 Primzahlen, nämlich 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 und 31. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel auf einer Primzahl landet, 11/37.

13) Der Rest nach Division von 1001 durch eine einziffrige Zahl beträgt 5. Welcher Rest bleibt nach Division von 2006 durch dieselbe Zahl?

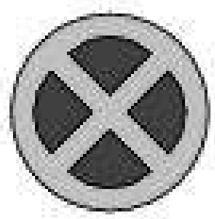
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Antwort A

Weil sich bei der Division 1001:n der Rest 5 ergibt, ist n ein Teiler von 1001-5 = 996. 996 hat die Primfaktorenzerlegung $996 = 2^2 \cdot 3 \cdot 83$, hat also als einstellige Teiler die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 6. Der Rest 5 kann sich nur ergeben , wenn n > 5 gilt, daher wird 1001 durch 6 dividiert.

Bei der Division 2006:6 ergibt sich schließlich der Rest 2.

14) Der Radius der Verkehrstafel ist 20 cm. Jeder dunkle Teil ist ein Viertel einer bestimmten Kreisfläche. Die Gesamtfläche der vier dunklen Teile ist gleich der Fläche des hellen Teils. Wie groß ist der Radius des dunklen Kreises?



A) $10\sqrt{2}$ cm B) $4\sqrt{5}$ cm C) 20/3 cm D) 12,5 cm E) 10 cm

Antwort A

Wenn die Gesamtfläche der vier dunklen Teile gleich der Fläche des hellen Teils ist, ist die Fläche des ganzen Verkehrsschilds doppelt so groß wie Gesamtfläche der dunklen Teile, die Fläche jenes Kreises, der sich aus den dunklen Viertelkreisflächen zusammensetzen lässt, verhält sich zur Fläche der kreisförmigen Verkehrstafel also wie 1 : 2. Damit verhalten sich die Radien der beiden Kreise wie $1:\sqrt{2}$.
Hat die Verkehrstafel einen Radius von 20cm, dann gilt für den Radius *r* des dunklen Kreises

$$r = \frac{20}{\sqrt{2}}\,\text{cm} = 10\sqrt{2}\,\text{cm}.$$

15) Wir kennen drei Primzahlen a, b und c mit a > b > c. Wenn a + b + c = 78 und a – b – c = 40 gelten, dann gilt abc =

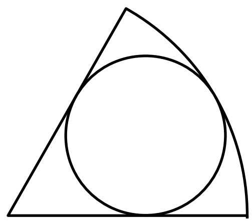
A) 438 B) 590 C) 1062 D) 1239 E) 2006

Antwort E

Addition von a + b + c = 78 und a – b – c = 40 ergibt 2a = 118, also a = 59. Daraus folgt b + c = 19. Weil b + c ungerade, also Summe einer geraden und einer ungeraden (Prim-)Zahl ist, und 2 die einzige gerade Primzahl ist, ist eine der beiden Zahlen b und c gleich 2, die andere gleich 17. Wegen a > b > c gilt also b = 17, c = 2. Damit erhalten wir

$$abc = 2\cdot 17\cdot 59 = 2006.$$

16) Das Verhältnis der Radien von Kreissektor und Inkreis der Figur beträgt 3:1. Das Verhältnis ihrer Flächen beträgt dann

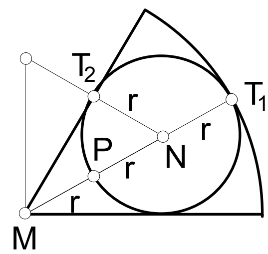


A) 3:2 B) 4:3 C) 5:3 D) 6:5 E) 5:4

Antwort A

Ist M der „Mittelpunkt“ des Kreissektors (Radius R), N der Mittelpunkt seines Inkreises k (Radius r), so berührt k aus Symmetriegründen den Kreisbogen im Schnittpunkt T_1 mit der Geraden MN.
Ist P der zweite Schnittpunkt der Geraden MN mit dem Kreis, so gilt wegen $R : r = MT_1 : NT_1 = 3 : 1$

$$MP = PN = r.$$



Ist T2 der Berührpunkt von k mit einem der Radien, die zum Rand des Kreissektors gehören, so gilt

$$NT_2 \perp MT_2,\ NT_2 = r.$$

Damit ist das Dreieck ΔMNT2 ein „halbes gleichseitiges Dreieck“. Daraus folgt

$$\angle NMT_2 = 30°.$$

Das bedeutet, weil MN Symmetrieachse des Kreissektors ist, dass der Zentriwinkel im Kreissektor 2·30° = 60° misst, der Kreissektor ist also ein Sechstelkreis.
Weil sich der Radius R des Kreissektors zum Radius r seines Inkreises k wie 3 : 1 verhält, verhalten sich die Flächen des Kreises, zu dem der Kreissektor gehört, und des Inkreises k wie 9 : 1, der Flächeninhalt des Kreissektors (=Sechstelkreis) zu dem seines Inkreises also wie

$$\tfrac{9}{6} : 1 = 9 : 6 = 3 : 2.$$

17) Sechzehn Mannschaften spielen in einer Volleyballliga. Im Verlauf der Meisterschaft spielt jede Mannschaft genau ein Mal gegen jede andere. Die Siegermannschaft bekommt in jedem Spiel einen Punkt, und die Verlierermannschaft 0 Punkte. Unentschieden kommt nicht vor. Nachdem alle Spiele absolviert wurden, bilden die Punkteergebnisse aller Mannschaften eine arithmetische Folge. Wie viele Punkte hat die Mannschaft, die in der Tabelle an letzter Stelle steht?

A) 3 B) 2 C) 1 D) Die beschriebene Situation ist unmöglich.
E) Die Antwort ist eine andere Zahl als angegeben.

Antwort E

Jede der 16 Mannschaften spielt 15 Spiele, also erreicht die beste Mannschaft nicht mehr als 15 Punkte, während die schwächste Mannschaft nicht weniger als 0 Punkte erreicht. Daher sind die Punkteergebnisse aller Mannschaften ganze Zahlen nicht kleiner als 0 und nicht größer als 15. Bilden diese Ergebnisse eine nicht konstante arithmetische Folge, dann erreicht die beste Mannschaft 15 Punkte, die zweitbeste 14 Punkte, und so fort. Die Mannschaft an der letzten Stelle hat schließlich 0 Punkte. Eine zweite Möglichkeit bestünde darin, dass die arithmetische Folge eine konstante Folge ist. Das würde aber bedeuten, dass jede Mannschaft gleich oft siegt und verliert, was bei 15 Spielen nicht möglich ist. Daher hat die letzte Mannschaft sicher 0 Punkte.

18) Im vergangenen Jahr waren um 30 mehr Burschen als Mädchen im Schulchor. In diesem Jahr ist die Mitgliederzahl des Chors um 10% gestiegen, die Zahl der Mädchen um 20% und die der Burschen um 5%. Wie viele Mitglieder hat der Chor in diesem Jahr?

A) 88 B) 99 C) 110 D) 121 E) 132

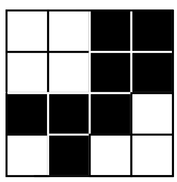
Antwort B

Waren im letzten Jahr x Mädchen im Chor, dann war die Anzahl der männlichen Chormitglieder x+30, die Zahl aller Chormitglieder 2x+30.
Sind heuer 20% mehr Mädchen und 5% mehr Burschen im Chor, dann ist die Zahl der weiblichen beziehungsweise männlichen Chormitglieder in diesem Jahr $\frac{120}{100}x$ beziehungsweise $\frac{105}{100}(x+30)$. Ist schließlich die Gesamtanzahl alle Sänger um 10% gestiegen, dann umfasst der Chor heuer $\frac{110}{100}(2x+30)$. Das liefert die Gleichung

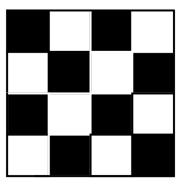
$$\frac{120}{100}x+\frac{105}{100}(x+30)=\frac{110}{100}(2x+30)$$
$$120x+105x+3045=220x+3300$$
$$225x+3450=220x+3300$$
$$5x=150$$
$$x=30$$

Letztes Jahr hatte der Chor also 30 weibliche und 60 männliche, ingesamt also 90 Mitglieder. Heuer ist die Zahl um 10% höher, also 99.

19) Die Felder einer 4×4 Tabelle sind wie in Figur 1 schwarz oder weiß gefärbt. In einem Zug darf ich zwei Felder vertauschen, die sich entweder in derselben Zeile oder in derselben Spalte befinden. Wie viele Züge benötige ich mindestens um das Bild von Figur 2 zu erhalten?



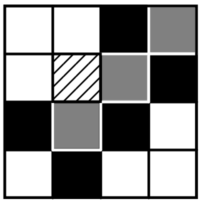
Figur 1

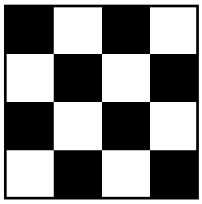


Figur 2

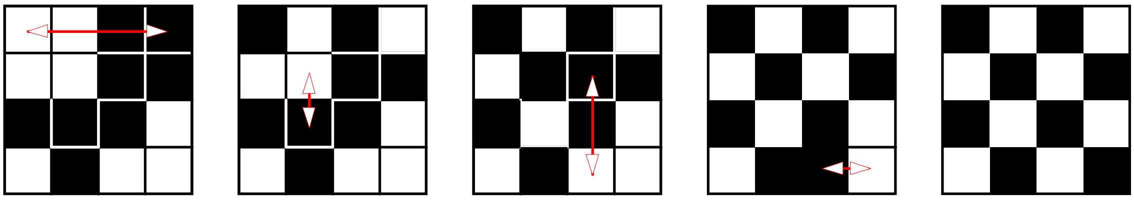
A) Es ist nicht möglich. B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Antwort D

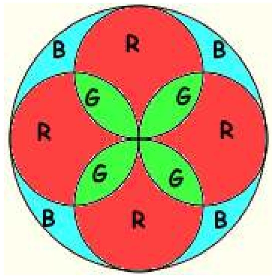




In Figur 1 sind 3 Felder schwarz, die in Figur 2 weiß sind, und 3 Felder weiß, die in Figur 2 schwarz sind. Weil man in einem Zug jeweils nur ein weißes und ein schwarzes Feld austauschen kann, sind weniger als 3 Züge nicht ausreichend. Zusätzlich gibt es aber unter den in Figur 1 weißen, in Figur 2 schwarzen Feldern eines, das für zwei der in Figur 1 schwarzen Feldern die einzige Austauschmöglichkeit ist, daher reichen auch drei Züge nicht. Dass vier Züge reichen, zeigt das Beispiel in der Abbildung.



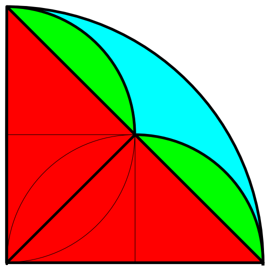
20) In einer Kirche gibt es ein Fenster, dessen Felder rot, grün oder blau sind. (Man erkennt dies an der Beschriftung R, G bzw. B.) Es würde im Fenster genau 400 cm² grünes Glas verwendet. Wie viele cm² blaues Glas wurden verwendet?



A) 396 B) 400 C) 120π D) $90\sqrt{2}\,\pi$ E) 382

Antwort B

Lösung 1: Wir betrachten zunächst nur das rechte obere Viertel des Fensters. Der im Überlappungsbereich der beiden kleinen Kreise liegende grüne Teil des Fensters kann in zwei kongruente Kreissegmente mit Zentriwinkel 90° zerteilt werden. Werden diese Kreissegmente wie in der Abbildung angeordnet, so bilden diese beiden grünen Kreissegmente zusammen mit dem blauen Fensterteil ein Kreissegment des großen Kreises mit Zentriwinkel 90°. Weil der Radius des ganzen Fensters gleich dem doppelten Radius eines der kleinen Kreise ist, hat dieses große blau-grüne Kreissegment den vierfachen Flächeninhalt eines kleinen (grünen) Kreissegments, also haben die beiden grünen Kreissegmente zusammen den halben Flächeninhalt des blau-grünen Kreissegments. Daher stimmt in diesem Viertel des Fensters und folglich auch im ganzen Fenster die Flächen der blauen und der grünen Teile überein.



Lösung 2: Verhalten sich die Radien zweier Kreise wie 1 : 2, so verhalten sich ihre Flächeninhalte wie 1 : 4. Daher ist die Gesamtfläche des Fensters viermal so groß wie die Fläche eines der kleinen, aus einer roten und zwei kongruenten grünen Teilflächen bestehenden Kreises. Bezeichnen wir den Flächeninhalt jedes der vier roten Teile mit R, den jedes der vier grünen Teile mit G und den jedes der vier blauen Teile mit B, so gilt also

$$4R + 4G + 4B = 4\cdot(R + 2G)$$
$$4R + 4G + 4B = 4R + 8G$$
$$4B = 4G$$

Damit stimmt die Gesamtfläche der blau gefärbten Teile mit der der grün gefärbten Teile überein, es wurden also 400cm² blaues Glas verwendet.

- 5 Punkte Beispiele -

21) Wir wissen, dass die Zahlen a und b beide größer als 1 sind. Welcher der folgenden Brüche hat den größten Wert?

A) $\dfrac{a}{b-1}$ B) $\dfrac{a}{b+1}$ C) $\dfrac{2a}{2b+1}$ D) $\dfrac{2a}{2b-1}$ E) $\dfrac{3a}{3b+1}$

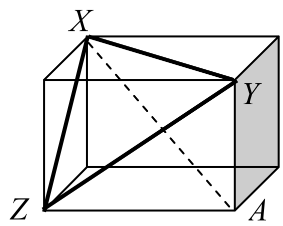
Antwort A

Wegen a, b > 1 sind in jedem der gegebenen Brüche Zähler und Nenner positiv. In diesem Fall hat von mehreren Brüchen mit gleichem Zähler der den größten Wert, der den kleinsten Nenner hat. Bringt man die gegebenen Brüche auf gemeinsamen Zähler, so erhält man

$$\frac{a}{b-1}=\frac{6a}{6b-6},\quad \frac{a}{b+1}=\frac{6a}{6b+6},\quad \frac{2a}{2b+1}=\frac{6a}{6b+3},\quad \frac{2a}{2b-1}=\frac{6a}{6b-3},\quad \frac{3a}{3b+1}=\frac{6a}{6b+2}$$

Der kleinste Zähler tritt dabei im ersten Bruch auf, also hat $\frac{a}{b-1}$ den kleinsten Wert.

22) Die Seitenlängen im Dreieck XYZ betragen 8cm, 9 cm und $\sqrt{55}$ cm. Bestimme die Länge der Raumdiagonale XA im dargestellten Quader.



A) $\sqrt{90}$ cm B) 10 cm C) $\sqrt{120}$ cm D) 11 cm E) $\sqrt{200}$ cm

Antwort B

Bezeichnen wir Länge, Breite und Höhe des Quaders mit a, b beziehungsweise c, dann gilt

$$XY^2=a^2+b^2,\quad XZ^2=b^2+c^2,\quad YZ^2=a^2+c^2,\quad XA^2=a^2+b^2+c^2.$$

Daraus folgt

$$XA^2=\frac{XY^2+XZ^2+YZ^2}{2}=\frac{64+81+55}{2}=\frac{200}{2}=100$$

und damit XA = 10cm.

23) Wie viele reelle Zahlen b gibt es, sodass die Gleichung $x^2 - bx + 80 = 0$ zwei verschiedene positive gerade ganzzahlige Lösungen besitzt?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) unendlich viele

Antwort D

Nach Satz von Vietá ist das konstante Glied einer normierten quadratischen Gleichung Gleich dem Produkt ihrer Lösungen. Im vorliegenden Beispiel gilt also

$$x_1x_2=80.$$

80 kann auf drei Arten als Produkt zweier positiver gerader ganzer Zahlen dargestellt werden:

$$80=2\cdot 40=4\cdot 20=8\cdot 10.$$

Weil b nach Satz von Vietá die Summe der beiden positiven geraden ganzzahligen Lösungen der Gleichung ist, gibt es drei reelle Zahlen mit der geforderten Eigenschaft, nämlich 42, 24 und 18.

24) Wie viele nichtleere Teilmengen der Menge {1, 2, 3, …, 12} gibt es, sodass die Summe des größten und des kleinsten Elements 13 beträgt?

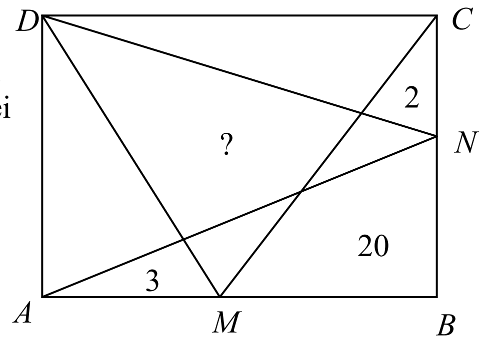
A) 1024 B) 1175 C) 1365 D) 1785 E) 4095

Antwort C

Jede n-elementige Menge hat 2^n Teilmengen, denn beim Bilden von Teilmengen hat man bei jedem der n Elemente der Menge zwei Möglichkeiten: es zu einer Teilmenge dazu zu nehmen oder nicht.
Es gibt für die Auswahl des größten und kleinsten Elements mit Summe 13 einer nichtleeren Teilmengen der Menge {1, 2, 3, …, 12} gibt es sechs Fälle zu beachten:
Ist das kleinste Element 1, so muss das größte 12 sein. Jede Vereinigungsmenge der Menge {1, 12} mit einer beliebigen Teilmenge der Menge {2, 3,…, 11} ergibt eine Teilmenge von {1, 2, 3, …, 12} mit der geforderten Eigenschaft. Weil {2, 3,…, 11} eine 10-elementige Menge ist, gibt es in diesem Fall 2^{10} derartige Teilmengen.
Ist das kleinste Element 2, so ist das größte 11. Jede Vereinigungsmenge der Menge {2, 11} mit einer beliebigen Teilmenge der 8-elementigen Menge {3, 4,…, 10} ergibt eine bisher noch nicht gezählte weitere Teilmenge von {1, 2, 3, …, 12} mit der geforderten Eigenschaft. In diesem Fall gibt es 2^8 derartige Teilmengen.
Analog gibt es 2^6 Teilmengen von {1, 2, 3, …, 12} mit kleinstem Element 3 und größtem Element 10, 2^4 Teilmengen von {1, 2, 3, …, 12} mit kleinstem Element 4 und größtem Element 9, 2^2 Teilmengen mit kleinstem Element 5 und größtem Element 8 und $2^0 = 1$ Teilmengen mit kleinstem Element 6 und größtem Element 7 (nämlich genau die Menge {6, 7}).
Insgesamt gibt es also $2^{10}+2^8+2^6+2^4+2^2+1=4^5+4^4+4^3+4^2+4^1+1$ derartige Teilmengen. $4^5+4^4+4^3+4^2+4^1+1$ ist die Summe einer endlichen geometrischen Reihe, es gilt

$$4^5+4^4+4^3+4^2+4^1+1=\frac{4^6-1}{4-1}=\frac{4096-1}{3}=\frac{4095}{3}=1365.$$

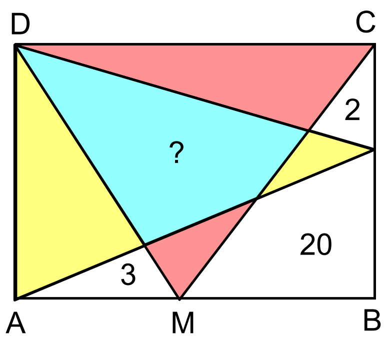
25) Auf den Seiten AB und BC befinden sich wie abgebildet die Punkte M bzw. N. Das Rechteck ist durch einige Strecken in verschiedene Teile zerschnitten, wobei die Flächen einiger Teile angegeben sind. Bestimme die Fläche des mit „?“ gekennzeichneten Vierecks.



A) 20 B) 21 C) 25 D) 26
E) Es ist nicht genug Information vorhanden.

Antwort C

Das mit „?“ gekennzeichnete Viereck nimmt zusammen mit den beiden rot gefärbten Dreiecken den halben Flächeninhalt des Rechtecks ABCD ein. Weil das mit „?“ gekennzeichnete Viereck zusammen mit den beiden gelb gefärbten Dreiecken ebenfalls das halbe Rechteck ABCD ausfüllt, ist auch die Summe der Flächeninhalte der restlichen Teilflä-chen, also der rot gefärbten Dreiecke und der drei weißen Flächen mit Flächeninhalten 3, 20 und 2 gleich dem halben Flächeninhalt des Rechtecks ABCD.



Somit haben die zwei roten Dreiecke und das blaue Viereck zusammen denselben Flächeninhalt wie die zwei roten Dreiecke und die drei weißen Flächen. Daher stimmt der Flächeninhalt des blauen Vierecks mit der Summe der Inhalte der weißen Flächen überein, ist also gleich 3+20+2 = 25.

26) Ein Test ist aus 10 Fragen zusammengesetzt, von denen jede mit „a“ oder „b“ beantwortet werden soll. Gibt man für beliebige 5 Fragen die Antwort „a“ und für die restlichen 5 die Antwort „b“, so hat man sicher mindestens 4 Antworten richtig, Wie viele Antwortschlüssel (Listen richtiger Antworten) gibt es mit dieser Eigenschaft?

A) 5^5 B) 252 C) 2 D) 10 E) 22

Antwort E

Enthält eine Liste richtiger Antworten bei zwei Fragen die Antwort „a“ und bei zwei Fragen die Antwort „b“, so kann es geschehen, dass man beim zufälligen Wählen der Antworten jede dieser vier Fragen falsch beantwortet. Unter den Antworten auf die restlichen 6 Fragen kommt (mindestens) eine der Antworten „a“ und „b“ (mindestens) dreimal vor. Läuft es ungünstig, dann hat man beim zufälligen Ankreuzen der Antworten genau bei diesen drei Fragen (bzw. bei drei dieser Fragen) falsch geraten. Das bedeutet dann, dass man mindestens 7 Antworten falsch und daher weniger als 4 Antworten richtig hat.
Daraus folgt, dass in einer Liste der richtigen Antworten nur eine der Antworten „a“ und „b“ öfter also einmal vorkommen kann, ein Antwortschlüssel besteht also entweder aus 10 „a“, aus 9 „a“ und 1 „b“, aus 1 „a“ und 9 „b“ oder aus 10 „b“. Im ersten und im letzten Fall gibt jeweils nur eine Möglichkeit, in den beiden anderen Fällen jeweils 10 Möglichkeiten, denn der „Ausreißer“ kann als Antwort bei jeder der 10 Fragen auftauchen. Damit gibt es 22 Listen richtiger Antworten mit der angegebenen Eigenschaft.

27) Florian hat von zehn aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen eine entfernt. Die Summe der verbleibenden Zahlen ist 2006. Welche Zahl hat er entfernt?

A) 218 B) 219 C) 220 D) 225 E) 227

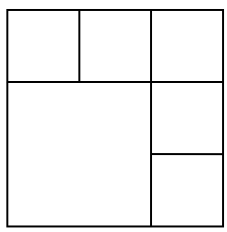
Antwort B

Bezeichnen wir die kleinste der 10 auf einander folgenden Zahlen mit n, dann sind die übrigen 9 Zahlen n+1, n+2, … , n+9. Die Summe dieser 10 Zahlen ist

$$10n + (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 10n + 45,$$

also in jedem Fall eine Zahl mit Einerziffer 5. Endet die Summe der 9 nicht gestrichenen Zahlen wie 2006 auf die Ziffer 6, so hat die gestrichene Zahl die Einerziffer 9. Daher kann Florian nur die Zahl 219 entfernt haben.
(Damit ist die Summe aller 10 Zahlen 2006+219 = 2225, und die kleinste der 10 Zahlen ist n = (2225 – 45):10 = 218.)

28) Auf wie viele Arten können die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 derart in die Felder des Quadrats geschrieben werden, dass sich in keinen angrenzenden Feldern Zahlen mit der Differenz 3 befinden? (Felder mit nur einem gemeinsamen Eckpunkt gelten dabei nicht als angrenzend.)

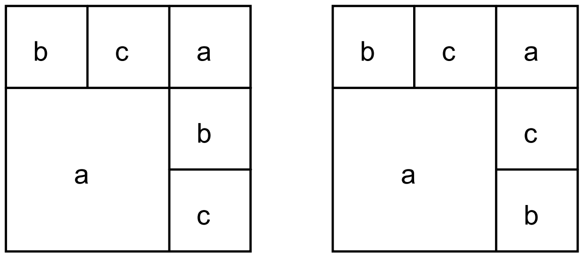


A) $3\cdot 2^5$ B) 3^6 C) 6^3 D) $2\cdot 3^5$ E) $3\cdot 5^2$

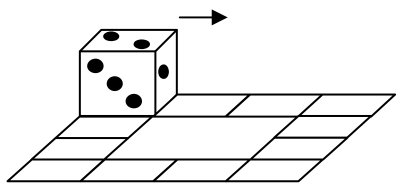
Antwort A

Lösung 1. Außer dem Quadrat in der rechten oberen Ecke grenzt jedes Quadrat an das große Quadrat links unten. Wird also irgendeine der sechs Zahlen in das große Quadrat links unten geschrieben, so muss man in das Quadrat rechts oben jene Zahl schreiben, die sich von der Zahl links unten um genau 3 unterscheidet, und es gibt mit diesen beiden Feldern keine Probleme mehr mit angrenzenden Feldern. Somit gibt es 6 Möglichkeiten, diese beiden Felder zu besetzen. In jedem Fall kann nun die Zahl links oben frei unter den verbleibenden vier Zahlen gewählt werden. In das mittlere Feld am oberen Rand darf dann aber nicht die Zahl geschrieben werden, die um 3 größer/kleiner als die Zahl links oben ist, es gibt also für diese Zahl 2 Möglichkeiten.
Für den rechten Rand bleiben zwei Zahlen, deren Differenz nicht 3 ist, es gibt 2 Möglichkeiten, diese beiden letzten Zahlen in diese zwei Felder zu schreiben.
Somit kann m,an unter den gegebenen Voraussetzungen die Zahlen 1 bis 6 auf $6{\cdot}4{\cdot}2{\cdot}2$ Arten, also auf $48 = 3{\cdot}2^5$ Arten in die Felder schreiben.

Lösung 2: Je zwei der sechs Zahlen von 1 bis 6 gehören zur selben Restklasse modulo 3; solche Zahlen dürfen nach Voraussetzung nicht in benachbarte Felder geschrieben werden. Folglich gibt es die zwei rechts dargestellten Möglichkeiten, die Repräsentanten der Restklassen a, b und c auf die 6 Felder zu verteilen. Es gibt $3! = 6$ Möglichkeiten, die Restklassen 1, 2 und 3 den „Platzhaltern“ a, b und c zuzuordnen, und es gibt in jeder der drei Restklassen 2 Möglichkeiten, die beiden Repräsentanten auf die beiden zugeordneten Felder zu verteilen. Damit gibt es $2{\cdot}3!{\cdot}2^3 = 3{\cdot}2^5$ Arten, die sechs Zahlen gemäß der Vorgabe in die Felder zu schreiben.



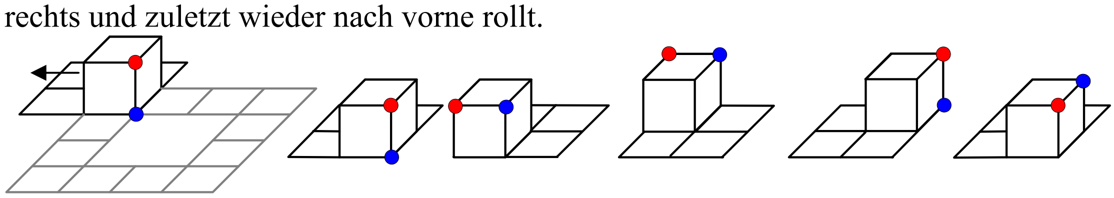
29) Ein Würfel befindet sich in der abgebildeten Lage. Er kann längs des 12 Quadrate umfassenden Weges abgerollt werden, bis er sich wieder in der Ausgangsposition befindet. Wie oft muss er um den ganzen Weg gerollt werden, bis sich auch alle Seitenflächen in den Ausgangspositionen befinden?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Es ist gar nicht möglich.

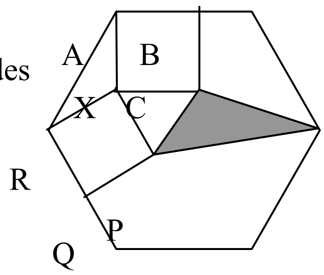
Antwort C

Rollt man den Würfel einmal nach links/hinten/rechts/vorne, so liegt er gleich, wie wenn man ihn dreimal in Folge nach rechts/vorne/links/hinten rollt. Daher betrachten wir einfacher, was geschieht, wenn man den Würfel nach einander nach links, hinten, rechts und zuletzt wieder nach vorne rollt.



Nach einer derartigen „Runde“ ist der rot markierte (anfangs rechte vordere obere) Eckpunkt des Würfels wieder an seiner Anfangsposition, der blau markierte (anfangs rechte vordere untere) Eckpunkt des Würfels wandert – von rechts vorne betrachtet – in den gegen den Uhrzeigersinn nächsten Würfeleckpunkt weiter, der mit dem roten Eckpunkt durch eine Kante verbunden ist. Weil es drei Eckpunkte gibt, mit denen der rote Eckpunkt durch eine Kante verbunden ist, kehrt auch der blaue Eckpunkt und damit der ganze Würfel nach drei „Runden“ an seine Startposition zurück.

30) Jede Seite des abgebildeten regelmäßigen Sechsecks hat die Länge $\sqrt{3}$. XABC und XPQR sind Quadrate. Wie groß ist der Flächeninhalt des grauen Bereichs?



A) $\frac{5-\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

Antwort

Hat ein gleichseitiges Dreieck die Seitenlänge s, so gilt für seine Höhe h

$$h = \frac{s\sqrt{3}}{2}$$

und für Umkreisradius R und Inkreisradius r aufgrund der Tatsache, dass Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfallen und der Schwerpunkt jede Schwerlinie im Verhältnis 2 : 1 teilt,

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{s\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{1}{3}h = \frac{s\sqrt{3}}{6}.$$

Nun gilt

$$\angle RAX = \angle RAB - \angle XAB = 120° - 90° = 30°$$

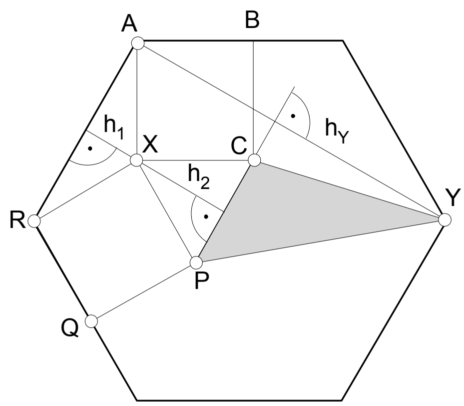
und analog $\angle XRA = 30°$. Daher ist ΔARX ein gleichschenkeliges Dreieck, und

$$\angle AXR = 120°, \angle PXC = 180° - \angle AXR = 180° - 120° = 60°.$$

Somit ist erstens X Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seite AR, und zweitens ΔXPC ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite PC aus Symmetriegründen parallel zu AR ist.

Daher gilt für die Höhe h_1 im gleichschenkeligen Dreieck ARX (die zugleich Inkreisradius eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge AR ist)

$$h_1 = \frac{AR \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2},$$



für die gemeinsame Seitenlänge XP = XC der beiden Quadrate und des gleichseitigen Dreiecks ΔXPC (die zugleich Umkreisradius eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge AR ist)

$$XP = \frac{AR \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 1$$

und für die Höhe im gleichseitigen Dreieck ΔXPC

$$h_2 = \frac{XP \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Die Diagonale AY im regelmäßigen Sechseck ist doppelt so lang wie eine Höhe in einem gleichseitigen Dreieck, das durch Mittelpunkt und zwei benachbarte Eckpunkte des Sechsecks gebildet wird, also gilt

$$AY = 2 \cdot \frac{AR \cdot \sqrt{3}}{2} = AR \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$

Das ergibt letztlich

$$h_y = AY - (h_1 + h_2) = 3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{CPY} = \frac{1}{2} \cdot CP \cdot h_y = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{5-\sqrt{3}}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{4}$$