



Medienvielfalt
im **Mathematikunterricht**

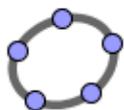
Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

Medienvielfalt im Mathematikunterricht

TEIL 4

LERNPFADE und lernpfadspezifische Evaluation

Hollabrunn, Dezember 2006



GeoGebra

Eine Galerie multimedialer Lernhilfen

mathe online



für Schule, Fachhochschule,
Universität und Selbststudium

Medienvielfalt
im **Mathematikunterricht** 

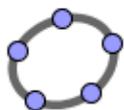
Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

**Medienvielfalt im
Mathematikunterricht**

TEIL 4

**LERNPFAD
KOORDINATENSYSTEM**

Hollabrunn, Dezember 2006



GeoGebra



Eine Galerie multimedialer Lernhilfen

mathe online

für Schule, Fachhochschule,
Universität und Selbststudium

Lernpfad: Einführung – Koordinatensystem und geometrische Grundbegriffe

6. Schulstufe

Autoren/innen: Anita Dorfmayr, Walter Klinger

1. Motivation – Warum wurde das Thema gewählt?

Da die Geometrie in der 6. Schulstufe einen Schwerpunkt darstellt, erscheint der Einsatz eines Dynamischen Geometrieprogramms pädagogisch – didaktisch wertvoll. Neben der gesteigerten Motivation der Schüler/innen ermöglicht der Einsatz des Computers auch die verstärkte Selbsttätigkeit und das experimentelle Arbeiten der Schüler/innen.

Der Einsatz eines Dynamischen Geometrieprogrammes fördert genaues und systematisches Arbeiten. Der Einsatz von Konstruktionsprotokollen erzieht die Schüler/innen zum genauen Dokumentieren ihrer Arbeit und schult das Lesen / Verstehen mathematischer Anleitungen.

Speziell GeoGebra ermöglicht eine sehr frühe Schulung elementarer Beziehungen zwischen algebraischen und geometrischen Sichtweisen. Auch das Experimentieren mit Abhängigkeiten von Objekten und das Erleben der Auswirkungen von Veränderungen von Größen sind erst dadurch möglich.

2. Didaktischer Kommentar

Mit diesem Lernpfad sollen neben einem ausführlichen Kennenlernen von GeoGebra geometrische Grundbegriffe eingeführt und / oder gefestigt werden. Besonderes Augenmerk wird auf die Beschreibung eines Konstruktionsvorgangs gelegt. Dabei werden Konstruktionsprotokolle zuerst abgearbeitet und dann von den Schüler/innen selbst erstellt. Durch die Verwendung von Variablen sollen neue (abhängige) Objekte aus bestehenden erzeugt werden. Die dynamische Veränderung von Objekten soll erlebt und durchgeführt werden.

Kurzinformation	
Schulstufe	6. Schulstufe
Dauer	5 - 6 Stunden
Unterrichtsfächer	Mathematik
Verwendete Medien	Dynamische Geometrie Software (DGS), Java Applets, Internet
Technische Voraussetzungen	Java, Internet
Autoren	Anita Dorfmayr, Walter Klinger

Voraussetzungen

- Technische Voraussetzungen: GeoGebra (kostenlos von www.geogebra.at), Java (kostenlos von www.java.com), Internet
- Vorwissen der SchülerInnen: Geometrische Grundbegriffe aus der 1. Klasse
- Technisches Vorwissen der SchülerInnen: Elementarer Umgang mit dem Computer

Lerninhalte und Lernziele

Lerninhalt	Lernziel
Arbeiten mit Figuren	Geometrische Objekte selbst erzeugen und verbinden können
Koordinatensystem	Lage von Punkten mit Hilfe kartesischer Koordinaten beschreiben können (in allen 4 Quadranten)
Konstruieren von Figuren	Konstruktionsprotokolle für Figuren, die aus Kreisen und Vierecken bestehen, abarbeiten und erzeugen können
Arbeiten mit Variablen	aus bestehenden Objekten durch die Verwendung von Variablen neue (abhängige) Objekte erzeugen können dynamische Veränderungen und Abhängigkeiten erfassen können

Didaktischer Hintergrund

Dieser Lernpfad versucht durch motivierende Beispiele geometrische Grundbegriffe und deren Beziehungen zu festigen und dabei die wesentlichen Fähigkeiten eines Dynamischen Geometrie-Programms zu vermitteln. Die Schüler/innen sollen nach einer begleitenden Einführung zu einem möglichst hohen Grad von Selbsttätigkeit geführt werden. Für den Transfer des neu Erlernten auf ähnliche Aufgabenstellungen soll ausreichend Zeit zur Verfügung stehen.

Einsatz im Unterricht

Grundsätzlich wäre für ein effizientes Arbeiten pro Schüler/Schülerin ein PC notwendig; allerdings ist auch eine Partnerarbeit an einem Gerät bei entsprechender Abstimmung der Lerngeschwindigkeiten der beiden Partner durchaus möglich. Einzelne Module können auch ohne PC in der Klasse vorbereitet und / oder durchgeführt werden.

Dieser Lernpfad ist relativ streng sequentiell aufgebaut. Neben nötigen Lehrer-Inputs und vielen verpflichtenden Modulen werden nur wenige zusätzliche Materialien angeboten. Für Schüler/innen wird ein **Lernparcours** angeboten. Für Lehrer/innen zusätzlich noch begleitende Informationen zu diesem Lernparcours.

Kombination der Medien

In dem vorliegenden Lernpfad wird versucht, durch den Einsatz von interaktiven Internetseiten und der Software GeoGebra das selbsttätige Lernen der Schüler/innen zu fördern. Die neu gewonnenen Erkenntnisse sollen auch durch händisches Zeichnen im traditionellen Sinn gefestigt werden (speziell bei Hausübungen).

Lernmedien der Schüler/innen

Die Schüler arbeiten mit diesem Lernpfad nicht nur am Computer. Ihre Tätigkeiten und Ergebnisse sollen sie meist auf Arbeitsblättern festhalten.

Leistungsbeurteilung

Nicht die Ergebnisse, sondern der Lernprozess, also der Grad der Selbsttätigkeit und die Selbstorganisation, stehen im Zentrum. Die Evaluation erfolgt über eine Wiederholung mit eingebautem Transfer.

3. Vorteile des Medieneinsatzes – exemplarische Beschreibung der Materialien

Intuitiver Einstieg – GeoGebra

Reihenhaus

1. Öffne das dynamische Arbeitsblatt in GeoGebra und vervollständige das zweite Reihenhaus.
2. Zeichne danach das dritte Reihenhaus fertig.
3. Für Profis: Zeichne noch ein viertes Reihenhaus.
Hinweis: Du musst etwas verändern, damit du alle 4 Häuser sehen kannst.

Du kannst verschiedene Farben verwenden (lasse nur das Dach und den Rauchfang gleich).

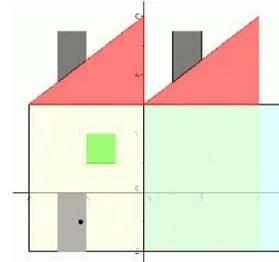


Abbildung 1: Reihenhaus - Angabe

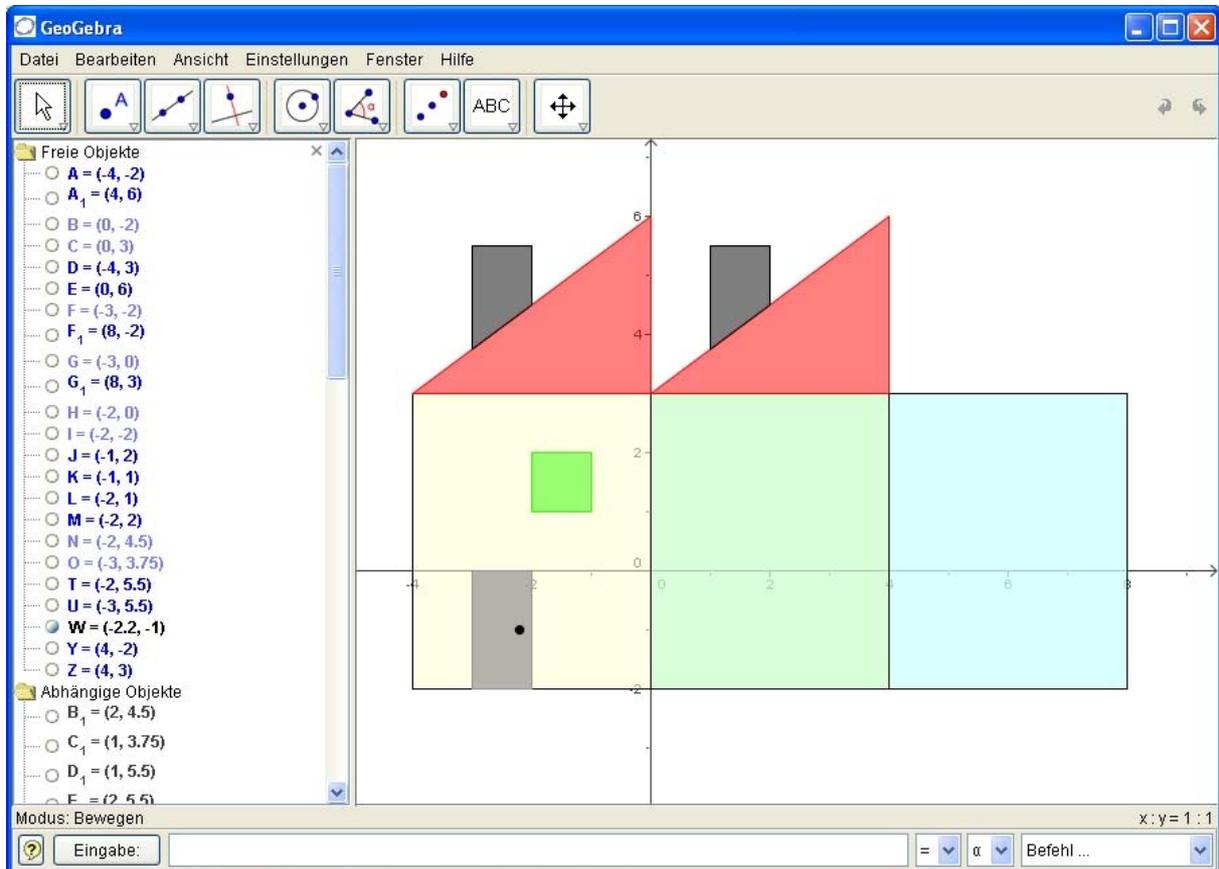


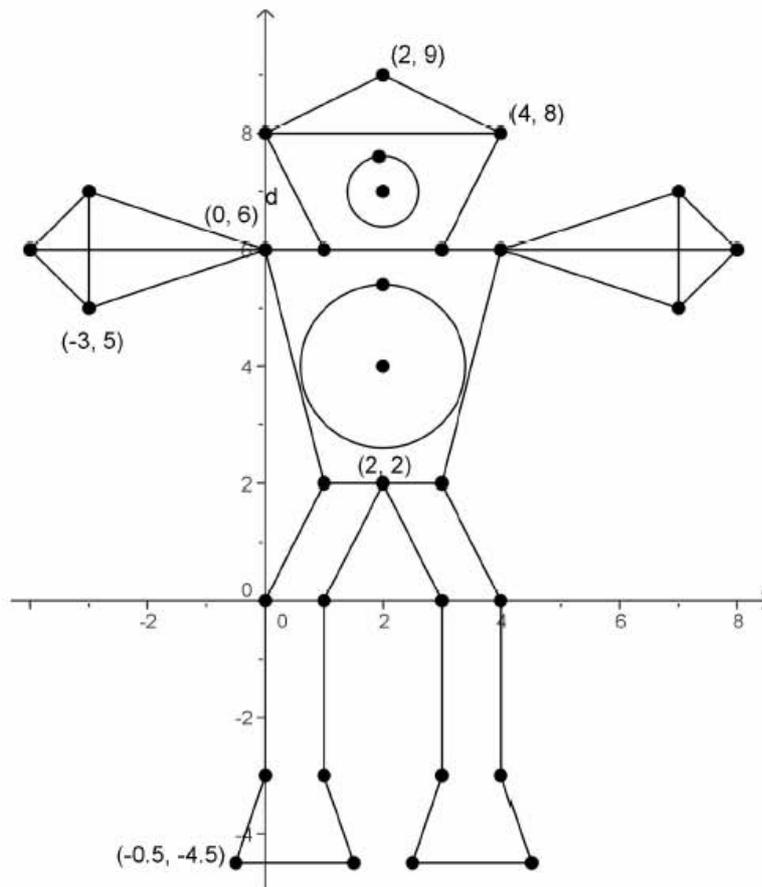
Abbildung 2: Reihenhaus - Arbeiten mit GeoGebra

Direkte Eingabe und Zusammenspiel von algebraischer und geometrischer Darstellung – Koordinatensystem

Arbeitsblatt: Roboter



Öffne GeoGebra und zeichne diesen Roboter. Zeichne dazu zuerst alle Punkte ein und verbinde dann diese Punkte durch Strecken. Versuche dabei, einzelne Punkte und Strecken auch direkt einzugeben, z.B.: $B=(2,9)$ oder *Strecke*[A,B] (wenn A und B bereits eingegeben sind).



Vervollständige auf dem Arbeitsblatt die fehlenden Koordinaten (x,y) der Punkte für deinen Roboter (ohne Bezeichnungen).

Weitere Aufgaben:

- Lasse dir in GeoGebra die Werte der einzelnen Koordinaten anzeigen und kontrolliere so, ob du am Arbeitsblatt alle Koordinaten richtig eingetragen hast.
- Blende am Ende alle Bezeichnungen von Punkten und Strecken aus.
- Male einzelne Teile an (Vielecke).
- Blende auch „störende“ Punkte aus und belasse nur die Linien auf dem Bildschirm.
So machst du das: Rechtsklick auf den Punkt oder die störende Linie, dann *Objekt anzeigen* weghaken

Abbildung 3: Roboter – Arbeitsblatt

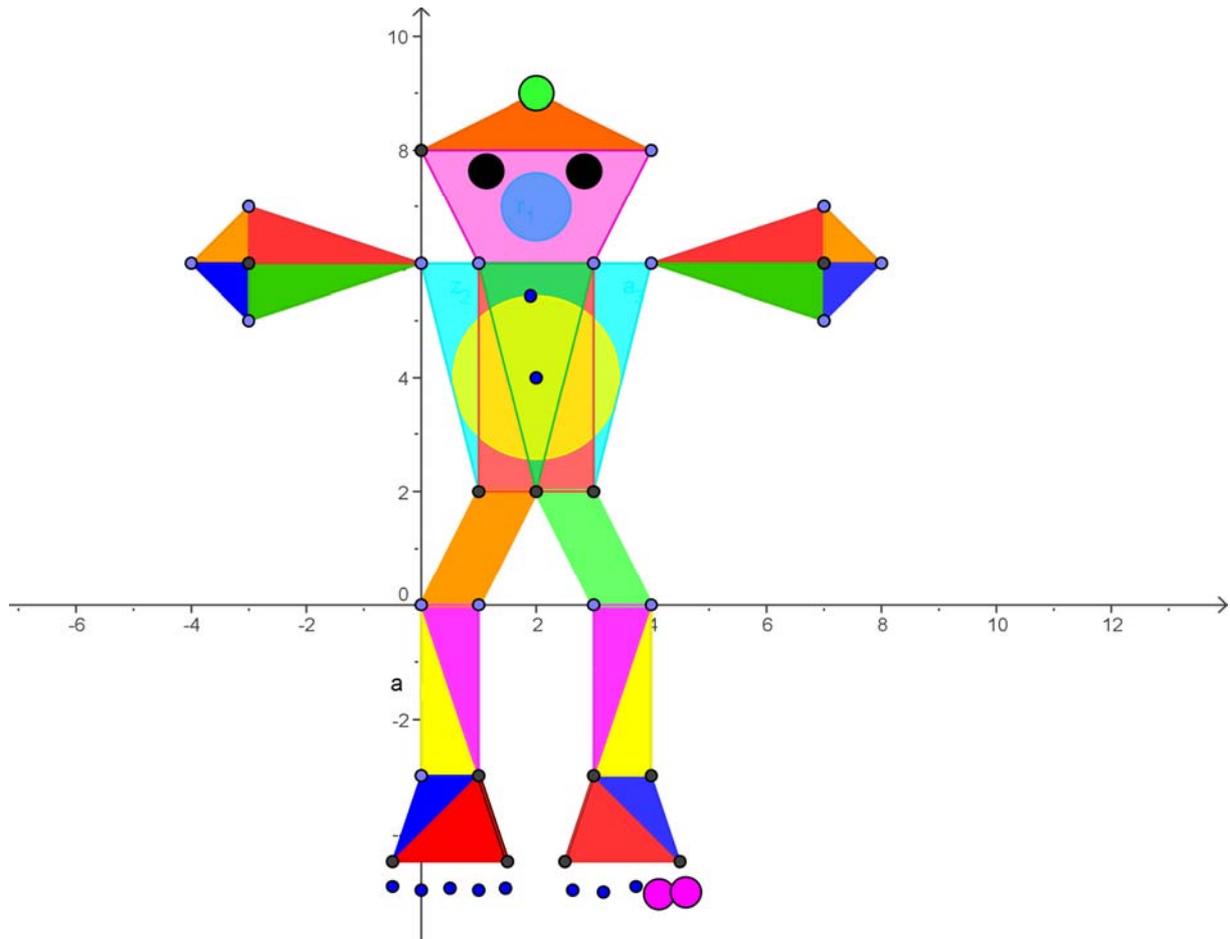


Abbildung 4: Schülerarbeit - Roboter

Systematisches Arbeiten und Abhängigkeit von Objekten – Konstruktionsprotokoll

**Einführung in systematisches Arbeiten mit Konstruktionsprotokollen
und Erkennen von Abhängigkeiten – Beispiel: Olympische Ringe**

Abhängigkeiten und Konstruktionsprotokolle

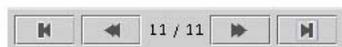
Olympische Ringe



- Zeichne die Olympischen Ringe mit GeoGebra:
 - Blende das Algebra-Fenster und die Koordinatenachsen aus (unter [Ansicht]).
 - Gib in der Eingabezeile den Radius ein: $r = 4$
 - Zeichne folgende Punkte ein: A (5 / 8), B (11 / 8), C (17 / 8), D (8 / 4), E (13 / 4). Verwende dazu die direkte Eingabe in der Eingabezeile, z.B. A = (5 , 8)
VORSICHT: Achte genau darauf, wie die Eingabe der Koordinaten zu erfolgen hat!
 - Zeichne jetzt die Olympischen Ringe mit dem Werkzeug *Kreis mit Mittelpunkt und Radius*.
 - Jetzt musst du die Kreise nur noch richtig einfärben und die Mittelpunkte ausblenden. Verwende dazu das Eigenschaftsfenster (rechter Mausklick auf Objekt, ...).
- Blende das Algebra-Fenster durch [Ansicht][Algebrafenster] wieder ein! Verändere die Koordinaten der Punkte und den Radius mit dem Werkzeug *Bewegen* direkt im Algebra-Fenster (Doppelklick).
 - Was passiert, wenn du die Koordinaten eines oder mehrerer Punkte veränderst?
 - Schaffst du es, die Olympischen Ringe ein Stückchen nach rechts oder nach oben zu verschieben? Wie?
 - Was passiert, wenn du den Radius vergrößerst oder verkleinerst?
 - Schaffst du es, nur die unteren beiden Ringe etwas kleiner zu machen? Begründe!
- Unter [Ansicht] [Konstruktionsprotokoll] versteckt sich folgende Tabelle. Erkläre, was diese Tabelle bedeutet. ACHTUNG: Keine Sorge – du kannst hier noch nicht alles verstehen.

Konstruktionsprotokoll			
Datei Ansicht Hilfe			
Nr.	Name	Definition	Algebra
1	Zahl r		$r = 4$
2	Punkt A		$A = (5, 8)$
3	Kreis c	Kreis mit Mittelpunkt A und Radius r	$c: (x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 16$
4	Punkt B		$B = (11, 8)$
5	Kreis d	Kreis mit Mittelpunkt B und Radius r	$d: (x - 11)^2 + (y - 8)^2 = 16$
6	Punkt C		$C = (17, 8)$
7	Kreis e	Kreis mit Mittelpunkt C und Radius r	$e: (x - 17)^2 + (y - 8)^2 = 16$
8	Punkt D		$D = (8, 4)$
9	Kreis f	Kreis mit Mittelpunkt D und Radius r	$f: (x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 16$
10	Punkt E		$E = (13, 4)$
11	Kreis g	Kreis mit Mittelpunkt E und Radius r	$g: (x - 13)^2 + (y - 4)^2 = 16$

- Experimentiere mit den Pfeilen am unteren Rand des Konstruktionsprotokolls! Was kannst du damit machen?



- BONUS: Was bedeuten die verschiedenen Farben der 5 Olympischen Ringe? Mache eine Internetrecherche!

Abbildung 5: Olympische Ringe - Arbeitsblatt

Vertiefung in systematischem Arbeiten mit vorgegebenen Konstruktionsprotokollen – Beispiel: Wunderblume

Arbeitsblatt: Wunderblume

1. Führe alle Konstruktionsschritte aus, die im folgenden Konstruktionsprotokoll gegeben sind! Welche Figur entsteht?

Nr.	Name	Definition	Algebra
1	Zahl r		$r = 4$
2	Punkt M		$M = (8.6, 8.4)$
3	Kreis c	Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r	$c: (x - 8.6)^2 + (y - 8.4)^2 = 16$
4	Punkt A	Punkt auf c	$A = (7.63, 4.52)$
5	Kreis d	Kreis mit Mittelpunkt A und Radius r	$d: (x - 7.63)^2 + (y - 4.52)^2 = 16$
6	Punkt B	Schnittpunkt von d, c	$B = (4.75, 7.3)$
6	Punkt C	Schnittpunkt von d, c	$C = (11.48, 5.62)$
7	Kreis e	Kreis mit Mittelpunkt B und Radius r	$e: (x - 4.75)^2 + (y - 7.3)^2 = 16$
8	Punkt D	Schnittpunkt von c, e	$D = (7.63, 4.52)$
8	Punkt E	Schnittpunkt von c, e	$E = (5.72, 11.18)$
9	Kreis f	Kreis mit Mittelpunkt E und Radius r	$f: (x - 5.72)^2 + (y - 11.18)^2 = 16$
10	Punkt F	Schnittpunkt von f, c	$F = (4.75, 7.3)$
10	Punkt G	Schnittpunkt von f, c	$G = (9.57, 12.28)$
11	Kreis g	Kreis mit Mittelpunkt G und Radius r	$g: (x - 9.57)^2 + (y - 12.28)^2 = 16$
12	Punkt H	Schnittpunkt von c, g	$H = (5.72, 11.18)$
12	Punkt I	Schnittpunkt von c, g	$I = (12.45, 9.5)$
13	Kreis h	Kreis mit Mittelpunkt I und Radius r	$h: (x - 12.45)^2 + (y - 9.5)^2 = 16$
14	Kreis k	Kreis mit Mittelpunkt C und Radius r	$k: (x - 11.48)^2 + (y - 5.62)^2 = 16$

2. Öffne das Dynamische Arbeitsblatt und blende die Navigationsleiste ein. Du findest sie direkt unter dem Geometrie-Fenster.



Blende dann das Konstruktionsprotokoll ein und gehe schrittweise durch die Konstruktion. Vergleiche mit deiner Lösung. Hast du alles richtig gemacht?

3. Gestalte deine Konstruktion farbig.

4. BONUS: Verbinde alle Punkte, die auf dem inneren Kreis liegen! Welche Figur entsteht?

Abbildung 6: Wunderblume - Arbeitsblatt

Wunderblume - Konstruktionsprotokoll

Verwende die Pfeiltasten unter dem Geometrie-Fenster und gehe schrittweise durch die Konstruktion.

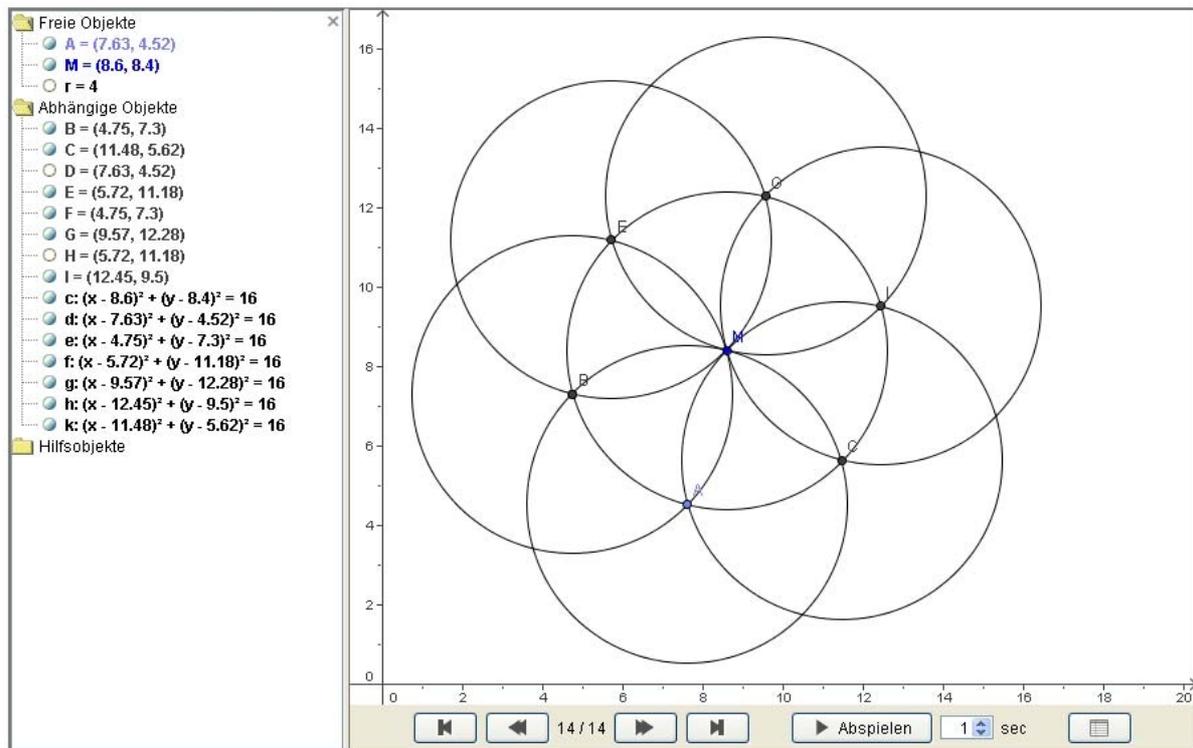


Abbildung 7: Wunderblume – Lösung

4. Drehbuch / Drehbücher – Methodisch-didaktische Anleitungen

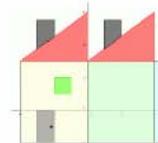
Unterrichtsorganisation – Arbeitsanweisungen für Schüler/innen

Für die Schüler/innen wurde ein „Lernparcours“ entwickelt (siehe Abbildung 8 bis 10). Dieser Arbeitsplan gibt einen Überblick über den Lernpfad (Pflicht- und Wahlaufgaben), beinhaltet Informationen über die Aktivität der Schüler/innen, Arbeitsaufträge und Sozialform, sowie die Art der Kontrollmöglichkeiten.



Lernparcours

Einführung – Koordinatensystem und Geometrische Grundbegriffe



Kursive Anleitungen

Dein Lehrer / deine Lehrerin sagt dir, wie's geht ...

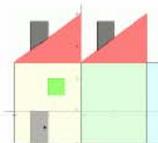
Nr.	Titel	Aktivität	Schülerzahl	Arbeitsauftrag / Lerninhalte	P/N/W	Kontrolle
LA	Kennenlernen von GeoGebra			Bedienung von GeoGebra: Fenster, Icons Werkzeuge kennen lernen: Punkt, Strecke, Vieleck	Input	-
1	Reihenhaus		oder	Arbeitsblatt: Führe die Anleitung durch und verwende das Eigenschafts-Fenster (rechter Mausclick).	P	Selbstkontrolle
LB	Koordinatensystem			Besprechung: Ursprung, Koordinatenachsen, Quadranten	Input	-
LC	Direkte Eingabe und Bewegen von Objekten			Arbeiten mit der Eingabezeile: Punkt $A=(x,y)$ und Strecke $[A,B]$ 3 Möglichkeiten des Bewegens von Objekten: <i>Bewegen-Modus, Algebra-Fenster, direkte Eingabe</i>	Input	-
2	Roboter		oder	Arbeitsblatt: Führe die Anleitung durch und vervollständige auf dem Arbeitsblatt die fehlenden Koordinaten der Punkte.	P	Selbstkontrolle
3	Sahara		und	Arbeitsblatt: Führe die Anleitung durch. Welches Forscherteam ist den kürzesten Weg gegangen? Vergleiche mit einem Partner / einer Partnerin.	P	Partnerkontrolle
4	Winkel am Ziffernblatt		oder	Lade das dynamische Arbeitsblatt und bearbeite die Aufgabenstellung.	W	Selbstkontrolle

Abbildung 8: Lernparcours für Schüler/innen - Seite 1



Lernparcours

Einführung – Koordinatensystem und Geometrische Grundbegriffe



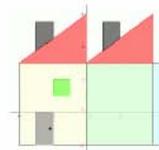
5	Olympische Ringe		oder	Arbeitsblatt: Konstruiere die Olympischen Ringe! Was verbirgt sich hinter einem Konstruktionsprotokoll?	P	Selbstkontrolle
6	Wunderblume			Arbeitsblatt: Führt die Konstruktionsschritte aus und kontrolliert! Tipp: Verwendet dieses Werkzeug:	N	Selbstkontrolle
7	Rechteck und Quadrat		und	Arbeitsblatt: Führe die Anweisungen aus. Vergleiche dein Konstruktionsprotokoll mit einem Partner / einer Partnerin.	P	Partnerkontrolle
8	Uhrmacher		und	Arbeitsblatt: Baue deine eigene Uhr an Hand des Konstruktionsprotokolls.	P	Selbstkontrolle
9	Kann ich das?			Konstruiere ein Quadrat ABCD $[A(-3/-1), s = 5 E]$ und zeichne jenen Kreis ein, auf dem alle 4 Eckpunkte des Quadrates liegen. Schreibe selbst auf einem Blatt ein Konstruktionsprotokoll.	P	Lehrerkontrolle
10	Bin ich ein Profi?			Verwende deine Konstruktion aus Aufgabe 9. Konstruiere ein Quadrat, welches den Kreis von außen berührt.	N	Lehrerkontrolle

Abbildung 9: Lernparcours für Schüler/innen - Seite 2



Lernparcours

Einführung – Koordinatensystem und Geometrische Grundbegriffe



Erklärung der Abkürzungen und Symbole

N ... für Profis: Hebe dein Niveau!
P ... Pflicht
W ... Wiederholung

	Schreiben		Lehrer-Input
	GeoGebra		gesamte Klasse
	Dynamisches Arbeitsblatt aufrufen		Einzelarbeit
	Internet-Recherche		Partnerarbeit
	schwierig		

Abbildung 10: Lernparcours für Schüler/innen - Seite 3

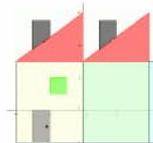
Anleitungen für Lehrer/innen

Diese Zusatzinformationen für Lehrer/innen (siehe Abbildungen 11 und 12) sollen den Ablauf des Unterrichtsprojektes unterstützen.



Zusatzinformationen zum Lernparcours

Einführung – Koordinatensystem und Geometrische Grundbegriffe



Kursive Anleitung

LehrerInnen-Input nötig

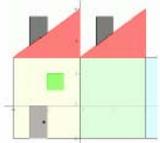
Nr.	Titel	Zusatzinformation
LA	<i>Kennenlernen von GeoGebra</i>	<i>Vorschlag siehe Beilage und Skriptum</i>
1	Reihenhaus	<p>Die Schüler werden dazu angehalten, selbsttätig ihre Versuche Punkte, Strecken, Vielecke durchzuführen. Hilfestellungen sind möglicherweise bei dem Werkzeug Vielecke nötig (oft wird das Schließen der Punktkette vergessen).</p> <p>Hier sollte man zum ersten Mal das Eigenschaftsfenster öffnen und die Beschriftung bei einzelnen Objekten ausschalten bzw. die Füllfarbe von Vielecken ändern. Zwischendurch ist eine kurze Phase des Lehrerinputs dazu günstig.</p> <p>Durch die unterschiedliche Arbeitsgeschwindigkeit werden nicht alle Schülerinnen und Schüler das 4. Reihenhaus beginnen können.</p> <p>Hinweis: Um Platz für weitere Reihenhäuser zu schaffen, ist es nötig, das Koordinatensystem zu verschieben und / oder die Skalierung zu verändern.</p>
LB	<i>Koordinatensystem</i>	<p><i>Obwohl im Lehrplan der 2. Klasse nur der 1. Quadrant als Lernziel festgelegt ist, erscheint durch die Benützung von GeoGebra der natürlichere Zugang zu allen 4 Quadranten sinnvoll.</i></p> <p><i>Diese Besprechung und händisch durchgeführte Arbeitsaufträge können auch in der Klasse durchgeführt werden.</i></p>
LC	<i>Direkte Eingabe und Bewegen von Objekten</i>	<p><i>3 Möglichkeiten des Bewegens von Objekten:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <i>1) Bewegen-Modus</i> <i>2) im Algebra-Fenster durch Doppelclick (im Bewegen-Modus)</i> <i>3) direkte Eingabe, z.B. $A = (3,-2.5)$ oder Strecke[A,B] (ACHTUNG: DezimalPUNKT und Trennstrich-KOMMA)</i>
2	Roboter	<p>Zum Vergleichen der Koordinaten wird im Eigenschaftsfenster die Möglichkeit für die Bearbeitung mehrerer Objekte vorgestellt (alle Beschriftungen ausblenden / anzeigen, verschiedene Arten der Beschriftung Wert / Name / Name und Wert).</p> <p>Mögliche Differenzierung: zusätzliche „Verschönerungs“-Aufträge</p>

Abbildung 11: Zusatzinformation für Lehrer/innen - Seite 1



Zusatzinformationen zum Lernparcours

Einführung – Koordinatensystem und Geometrische Grundbegriffe



3	Sahara	Die Schüler sollen dazu angehalten werden, die direkte Eingabe von Punkten und Strecken zu verwenden. Tipp: Um unerwünschte Veränderungen des Anfangspunktes A zu verhindern, könnte der Punkt A fixiert werden (im Eigenschaftsfenster).
4	Winkel am Ziffernblatt	Wiederholung von Winkelarten, einfacher Umgang mit GeoGebra
5	Olympische Ringe	Hier wird zum ersten Mal das Algebra-Fenster ausgeschaltet. Hier wird zum ersten Mal das Konstruktionsprotokoll eingesehen und abgearbeitet. WICHTIG: Bei diesem Beispiel soll der Unterschied zwischen freien und abhängigen Objekten ausführlich thematisiert werden. Die Form der Dokumentation der Internetrecherche erfordert eine zusätzliche Lehreranweisung.
6	Wunderblume	Hier wird zum ersten Mal das Konstruktionsprotokoll – noch dazu mit einem neuen Werkzeug (Kreis mit festem Radius) – eingesetzt. Manche Punkte auf Kreisen sind „bedingt“ freie Objekte. Zur Unterscheidung von freien, „bedingt“ freien und abhängigen Objekten ist ein Hinweis auf das Algebra-Fenster (farbliche Unterlegung) erforderlich. WICHTIG: Hier müssen die SchülerInnen erstmals das Werkzeug „Schnitt zweier Objekte“  verwenden. Eventuell ist hier ein kurzer LehrerInnen-Input nötig.
7	Rechteck und Quadrat	Neue Werkzeuge werden eingeführt: normale Gerade, ev. auch parallele Gerade; Kreis mit festem Radius (für jene Schülerinnen und Schüler, die die Wunderblume nicht gemacht haben)
8	Uhrmacher	Erstmals müssen die Schülerinnen und Schüler Texte einfügen. Neue Werkzeuge: Strecke mit fester Länge (ACHTUNG: Im Konstruktionsprotokoll steht „Punkt auf Kreis[A, 5.5]) Winkel: Im Eigenschaftsfenster muss eingegeben werden, dass ein erhabener Winkel zulässig ist!
9	Kann ich das?	Lernzielkontrolle: Hier wird einerseits Bekanntes (Konstruktion eines Quadrates) gefordert, andererseits aber auch der Transfer auf Neues (Umkreis). Zeitlimit vorgeben!
10	Bin ich ein Profi?	Diese Aufgabe ist schwer. Die Überprüfung muss durch den Lehrer / die Lehrerin direkt am Computer erfolgen (Ergebnis wirklich durch Zoomen oder Bewegen von Eckpunkten überprüfen).

Abbildung 12: Zusatzinformation für Lehrer/innen - Seite 2

Weitere Materialien

Da auch die Einführung in die Handhabung des Dynamischen Geometrieprogrammes GeoGebra Ziel dieses Lernpfades ist, wurde ein Kurzsriptum für Schüler/innen sowie eine Beilage zu diesem Skriptum für Lehrer/innen angeboten.



GeoGebra - Skriptum für die 2. Klasse

- Neu gezeichnete Objekte werden automatisch beschriftet. Es wird immer der nächste Buchstabe im Alphabet verwendet, z.B.: Punkte mit Großbuchstaben (A,B,C...), Strecken und Geraden mit Kleinbuchstaben (a,b,c,...), Winkel mit griechischen Buchstaben ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$).
- Jede Tätigkeit kann rückgängig gemacht werden.
- Koordinaten (z.B.: $A=(1,2)$, ...), Längen (z.B.: $a=9, \dots$), Flächen (z.B.: $P=20,4, \dots$), werden im Algebra-Fenster automatisch eingetragen.

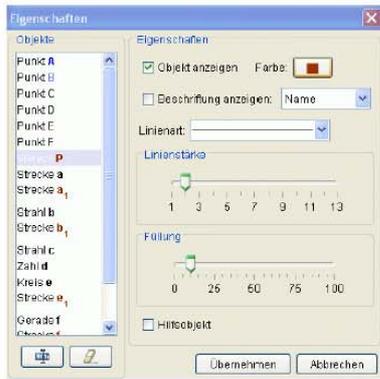
Icon	Was wird damit gemacht?	Direkte Eingabe:
	Neuer Punkt	z.B.: (2,3) oder $A=(2,3)$
	Strecke zwischen zwei Punkten	Strecke[A,B] <i>Strecke zwischen A und B</i>
	Gerade durch zwei Punkte	Gerade[A,B] <i>Gerade durch A und B</i>
	Kreis mit Mittelpunkt durch Punkt	Kreis[M,X] <i>Mittelpunkt M, Punkt X</i>
	Kreis mit Mittelpunkt und Radius	Kreis[M,r] <i>Mittelpunkt M, Radius r</i>
	Vieleck <i>Hinweis: Anfangspunkt = Endpunkt</i>	z.B.: Vieleck[A,B,C]
	Bewegen von Objekten, Änderungen von Daten im Algebrafenster (Doppelklick)	z.B.: $A = (5,-4)$
	Verschiebe Zeichenblatt	
	vergrößern <i>Beachte die Einheiten auf den Achsen!</i>	
	verkleinern <i>Beachte die Einheiten auf den Achsen!</i>	
	Schneide zwei Objekte <i>Klicke nacheinander auf die beiden Objekte oder klicke ungefähr auf den Schnittpunkt.</i>	Schneide[a,b] <i>Ergebnis: alle Schnittpunkte</i>
	Parallele Gerade	
	Senkrechte Gerade (Normale)	Senkrechte[A, Gerade[B,C]]
	Strecke mit fester Länge vom Punkt aus	Strecke[A,r] <i>Punkt A, Länge r</i>
	Strahl durch zwei Punkte	Strahl[F,A] <i>Strahl mit Anfangspunkt F durch A</i>
	Winkel <i>(Schenkelpunkt – Scheitel – Schenkelpunkt der Reihe nach anklicken)</i>	Winkel[A,B,C] <i>Winkel mit B als Scheitel</i>
	Winkel mit fester Größe <i>(mit dem oder gegen den Uhrzeigersinn: Punkt auf Scheitel, dann Schenkel anklicken, dann Größe mit „°“ angeben)</i>	Winkel[A,B, α°] <i>(gegen den Uhrzeigersinn)</i>
	Mittelpunkt	Mittelpunkt[A,B] <i>Mittelpunkt der Strecke AB</i>

Abbildung 13: GeoGebra - Skriptum - Seite 1

Verändern von Eigenschaften

Mit **Rechtsklick** (auf ein Objekt bzw. auf das Zeichenblatt) können wichtige Optionen ausgeführt werden:

- **Standardansicht**
- **Zoom**
- **Umdefinieren** – Einsicht in die direkte Eingabe
- **Eigenschaften** (z.B.: Farbe, Beschriftung, Füllung).

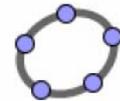


Über das **Eigenschaftsfenster** (siehe links) können auch Eigenschaften mehrerer Objekte gleichzeitig verändert werden. Markiere dazu die gewünschten Objekte nacheinander bei gedrückter [STRG] – Taste (auf einer englischen Tastatur: [CTRL] – Taste).

Im **Menü Ansicht** kann das **Konstruktionsprotokoll** eingesehen und die Konstruktion schrittweise durchgeführt werden. Ein Konstruktionsprotokoll sieht etwa so aus:

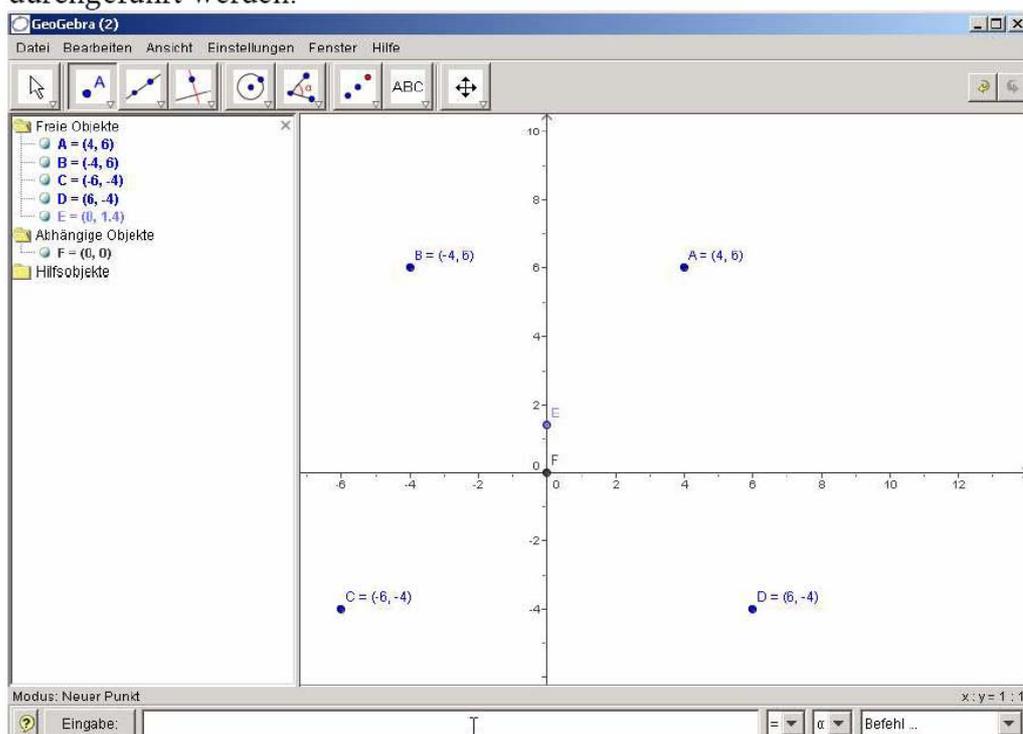
Nr.	Name	Definition
1	Punkt A	
2	Punkt B	
3	Strecke a	Strecke[A, B]
4	Punkt C	B gedreht um den Winkel 68° um A
5	Strahl b	Strahl durch A, C
6	Winkel α	Winkel zwischen B, A, C
7	Punkt D	A gedreht um den Winkel 286° um B
8	Winkel β	Winkel zwischen D, B, A
9	Strahl c	Strahl durch B, D
10	Zahl d	
11	Kreis e	Kreis mit Mittelpunkt A und Radius d
12	Punkt E	Schnittpunkt von e, b
13	Gerade f	Gerade durch E parallel zu a
14	Punkt F	Schnittpunkt von f, c
15	Viereck P	Viereck A, B, F, E
15	Strecke a ₁	Strecke[A, B] von Viereck P
15	Strecke b ₁	Strecke[B, F] von Viereck P
15	Strecke f ₁	Strecke[F, E] von Viereck P
15	Strecke e ₁	Strecke[E, A] von Viereck P

Abbildung 14: GeoGebra - Skriptum - Seite 2



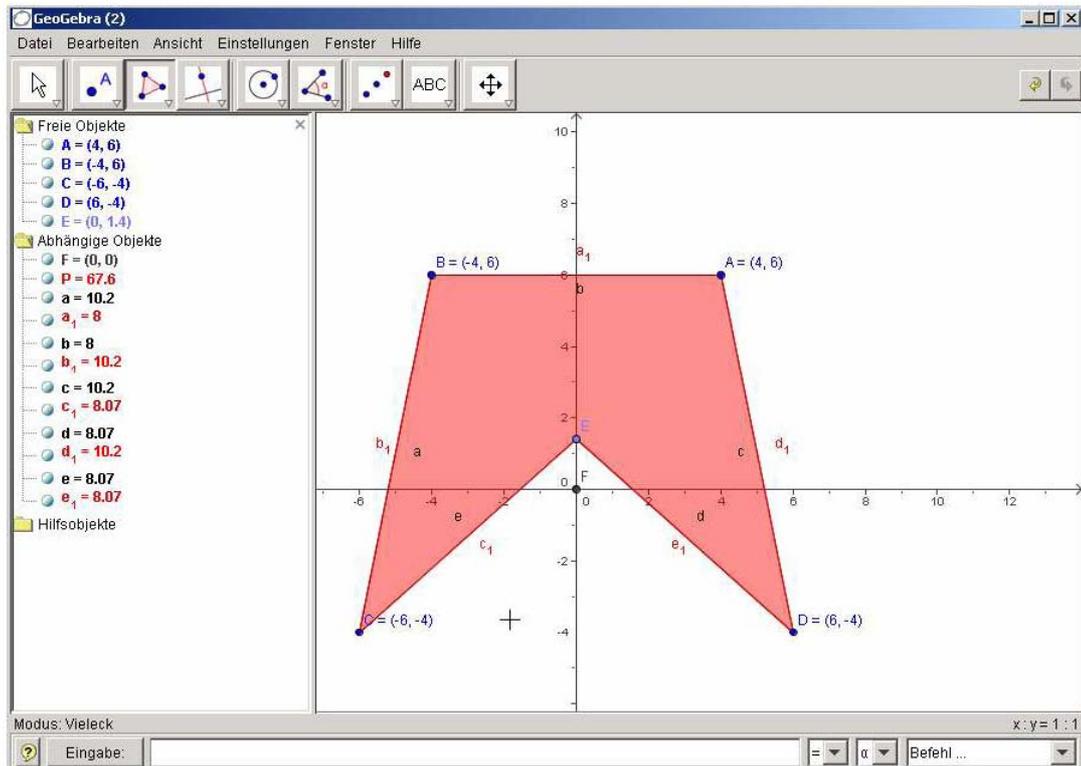
Kurzanleitung für LehrerInnen

1. Skriptum austeilten und erklären - zuerst nur die Icons in der Symbolleiste vorstellen, ansehen.
2. Aufklappfenster vorzeigen und selbst aufklappen lassen
3. Algebrafenster und Geometriefenster besprechen
4. Eingabe von Punkten (Symmetrie – Quadranten) Koordinatensystem (Punkt mit Werkzeug verändern/verschieben)
5. 4 Quadranten – Koordinatenachsen besprechen (Koordinaten auf diesen Koordinatenachsen sind nicht völlig frei) – Koordinatenursprung (0,0) – abhängiges Objekt - genau im Algebrafenster hinsehen!
6. Thematisieren der abhängigen und der freien Variablen kann auch erst später durchgeführt werden.



7. Weitere Bearbeitung (mit Werkzeugen: Strecken einzeichnen, Vieleck einzeichnen – im Eigenschaftenfenster: Füllfarbe ändern)

Abbildung 15: GeoGebra - Kurzanleitung für Lehrer/innen - Seite 1



8. Wenn Zeit bleibt, kann man im Eigenschaftsfenster eine Bezeichnung löschen (oder andere Anzeige vorzeigen).
9. Konstruktionsprotokoll herzeigen und kurz besprechen.
WICHTIG: SchülerInnen darauf hinweisen, dass sie in der Spalte „Algebra“ nicht alles verstehen können (insbesondere Geraden- und Kreisgleichungen).
10. WICHTIG: 2. Seite des Skriptums (Konstruktionsprotokoll) im Detail besprechen! Vor allem:
 - a) Strecke fester Länge – vergleich mit „Abschlagen mit dem Zirkel“
 - b) Winkel fester Größe
 - Die Schenkel müssen nachträglich selbst gezeichnet werden, GeoGebra erzeugt jeweils nur einen Schenkelpunkt.
 - Angabe des Uhrzeigersinns
11. Danach den Lernparcours besprechen und wenn nötig kopiert austeilten (als Übersicht für die Führung einer Projektmappe)

Abbildung 16: GeoGebra - Kurzanleitung für Lehrer/innen - Seite 2

5. Ergebnisse der internen Evaluation

Fragestellungen zum didaktischen/methodischen Kommentar

Der Lernpfad dient zur Einführung und Festigung von geometrischen Grundbegriffen und dem Kennenlernen von Geogebra. Neue Begriffe werden vorwiegend heuristisch erarbeitet. Lerninhalte, Lernziele, das notwendige mathematische und technologische Vorwissen der Schüler/innen sowie das notwendige technologische Umfeld werden im didaktischen Kommentar formuliert.

Für die Bedienung von Geogebra wird ein Kurzsriptum für Schüler/innen und Lehrer/innen angeboten. Als methodisches Drehbuch steht ein Lernparcours mit Wahl- und Pflichtstationen zur Verfügung. Bei jedem Lernschritt werden die Sozialform und eine Kontrollmöglichkeit vorgeschlagen. Es finden sich auch Hinweise zur Leistungsmessung und Leistungsbeurteilung.

Fragestellungen zum Lernpfad

Im Lernpfad dominieren handlungsorientierte Phasen. Die Schüler/innen werden dazu angehalten ihren Lernprozess im Heft zu dokumentieren. Neben dem Übungs- und Festigungscharakter im Bereich der Geometrie werden parallel dazu Grundkonzepte der elementaren Algebra vorbereitet.

Das methodische Vorwissen muss durch den Lehrer/ die Lehrerin geschehen. Die unterschiedlichen Lern- und Arbeitsgeschwindigkeiten der Schüler/innen werden berücksichtigt. Schüler/innen können sich bei Partnerarbeit gegenseitig unterstützen. Es gibt inner- und außermathematische Zusatzangebote.

Die Lernschritte sollten wie beim Lernparcours durchnummeriert werden. Außerdem sollten alle Arbeitsblätter als zip-Datei zur Verfügung gestellt werden.

Festigung des Wissens – Wissensüberprüfung

Es gibt Übungs- und Festigungsaufgaben, aber keine Hinweise für Hausübungen. Selbstkontrolle wird durch das Konstruktionsprotokoll unterstützt. Die Sicherung des Erlernten bleibt dem Lehrer/ der Lehrerin überlassen.

6. Äußere Evaluation

Feedback der Schüler/innen

Dieser Abschnitt fasst die Rückmeldungen von 198 Schüler/innen aus 8 Klassen zusammen.

Die Navigation innerhalb des Lernpfades wird als sehr gut eingeschätzt. Auch das Layout wird von den Schüler/innen sehr positiv bewertet. Sprache des Lernpfades wird als sehr verständlich bewertet.

Die Bedienung der Software Geogebra bereitet 85% der Schüler/innen keinerlei Probleme (siehe Abbildung 17). Etwa 70% der Schüler/innen meinen, dass die interaktiven Übungen ihnen beim Verstehen der mathematischen Inhalte geholfen haben (siehe Abbildung 18).

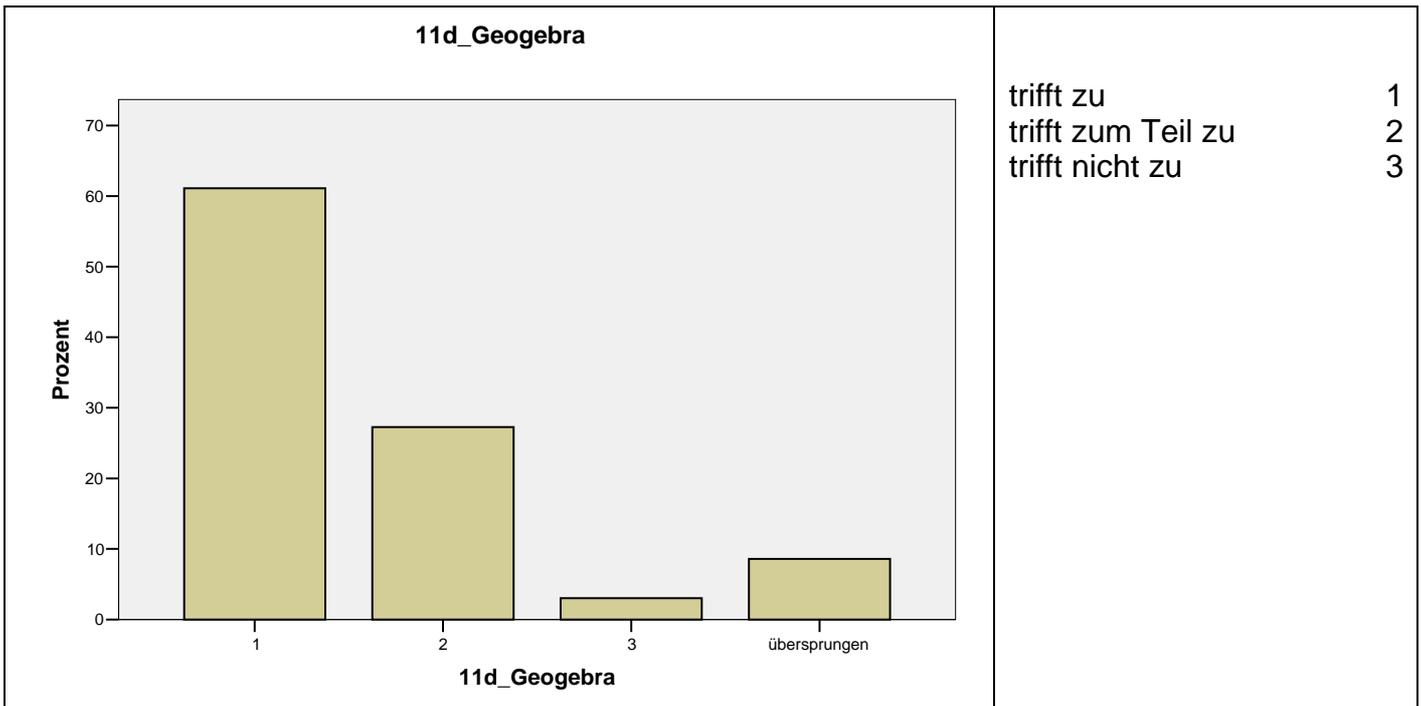


Abbildung 17: Die Software GeoGebra war leicht zu handhaben.

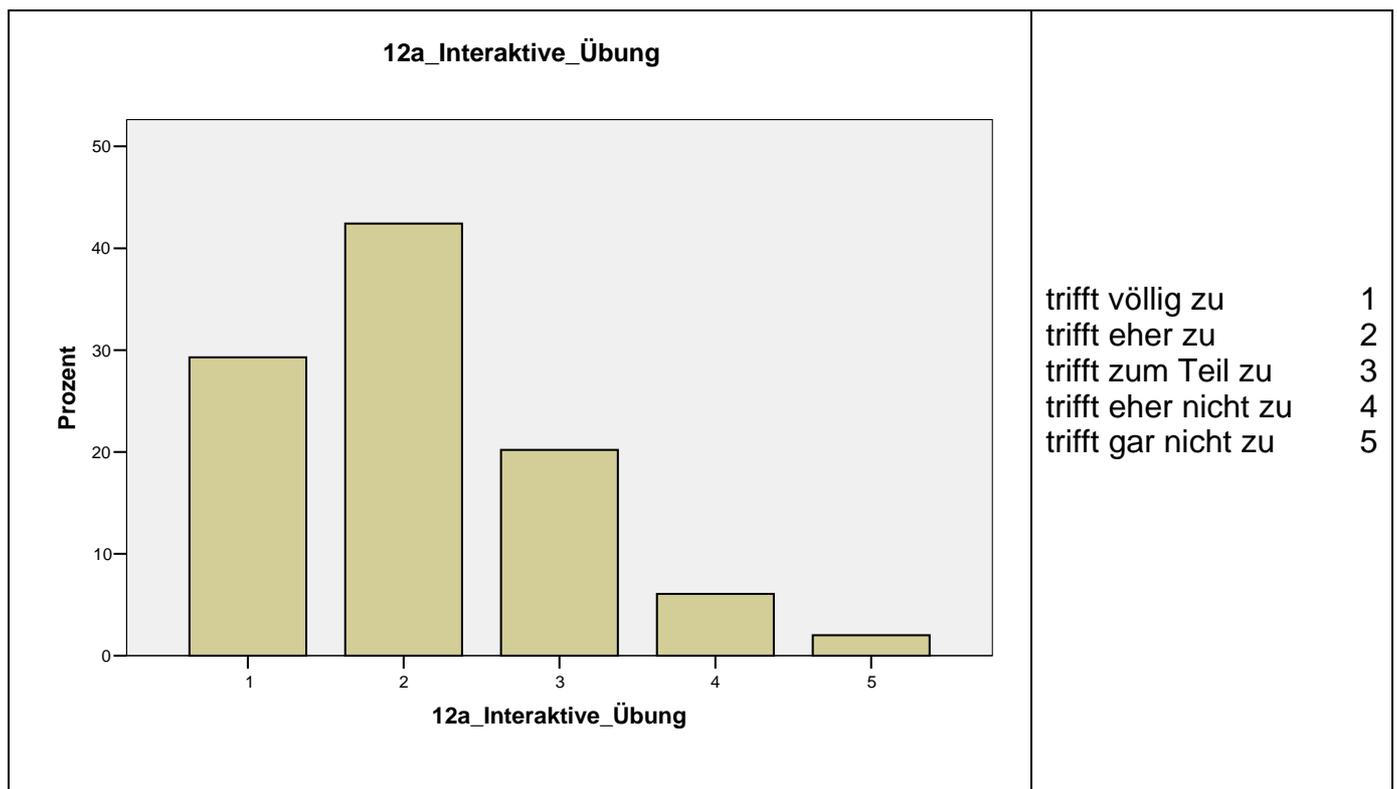


Abbildung 18: Die interaktiven Übungen haben mir beim Verstehen geholfen.

Mehr als die Hälfte der Schüler/innen haben mindestens manchmal zu Hause mit dem Lernpfad gearbeitet. Abbildung 19 zeigt, dass fast 40% mit dem Lernpfad für die Schularbeit geübt haben.

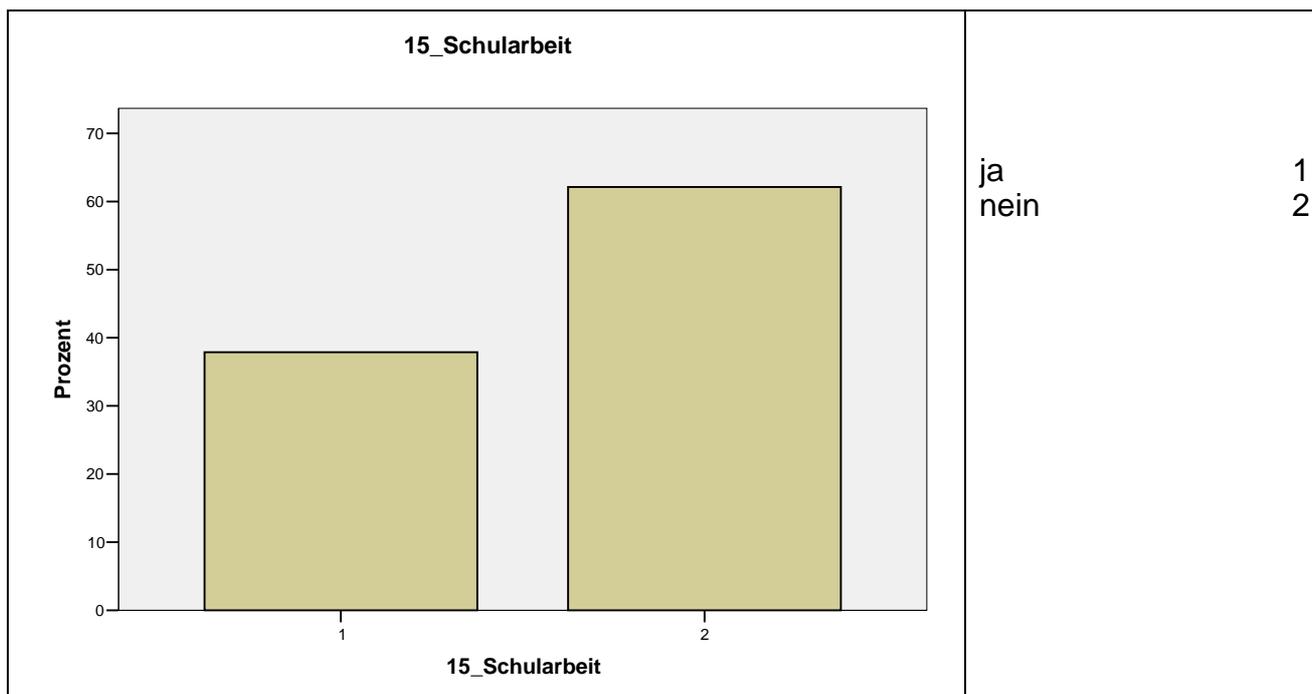


Abbildung 19: Ich habe den Lernpfad zum Üben für die Schularbeit verwendet.

Fast 90% der Schüler/innen geben an, dass sie im Mathematikunterricht gerne wieder mit einem Lernpfad arbeiten möchten (siehe Abbildung 20).

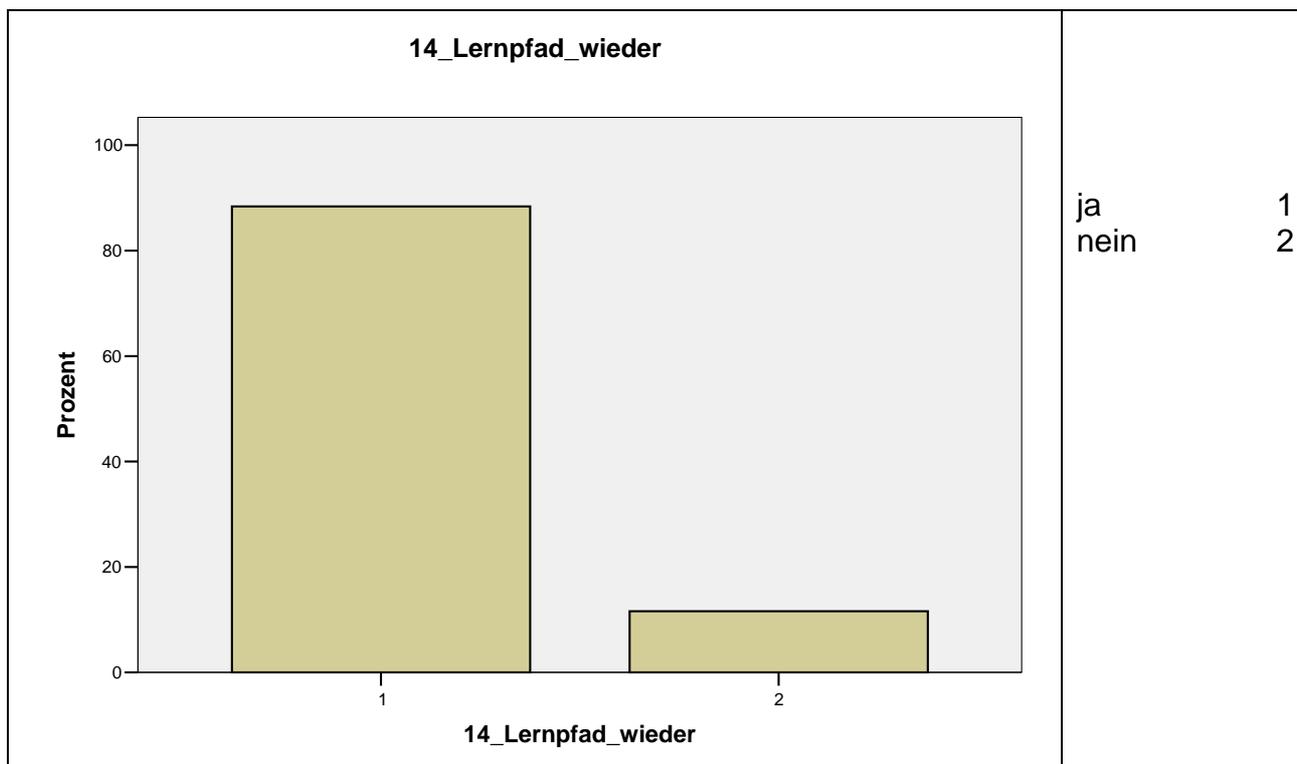


Abbildung 20: Ich möchte im Mathematikunterricht wieder mit einem Lernpfad arbeiten.

Das Verstehen der mathematischen Inhalte war laut Rückmeldung der Schüler/innen für das Arbeiten mit dem Lernpfad entscheidend. Laut Selbsteinschätzung haben über 90% der Schüler/innen die in diesem Lernpfad vermittelten Lerninhalte verstanden (siehe Abbildung 21).

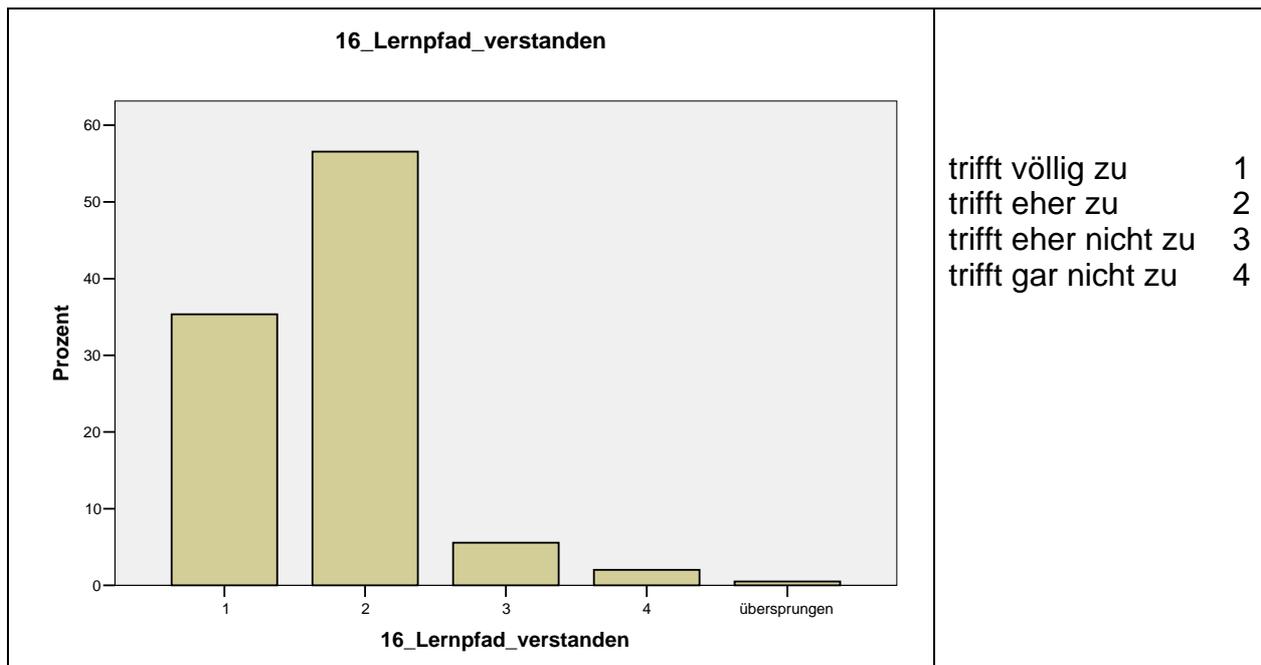


Abbildung 21: Ich habe alle wichtigen mathematischen Inhalte des Lernpfades verstanden.

Fast 90% der Schüler/innen meinen, dass sie die Möglichkeit hatten über mathematische Inhalte mit anderen zu sprechen (auch das Verstehen der mathematischen Inhalte sowie das gegenseitige Helfen wird als wichtig und mögliche angesehen).

Fast 80% der Schüler/innen hatten die Gelegenheit über mathematisches Tun nachzudenken. Sie hatten auch das Gefühl, dass ihre eigenen Gedanken berücksichtigt wurden. Fast 80% der Schüler/innen haben mit Neugier, Engagement sowie Lust am Denken und mathematisches Tun den Lernpfad absolviert. Etwa 85% der Schüler/innen geben an, dass sie für ihren Lernfortschritt und den Lernprozess selbst verantwortlich waren.

Negativ wird von einigen Schüler/innen Zeitmangel bei der Bearbeitung genannt. Insgesamt ist die Zufriedenheit mit dem Lernpfad aber sehr hoch, was auch das positive Feedback der Schüler/innen zeigt. Einige Zitate von Schüler/innen:

- „Dass man mit diesem Programm leichter lernen kann als mit dem Buch.“
- „Dass man so viele Hilfen hatte!!!“
- „Kompliment !“

Feedback der Testlehrer/innen

Insgesamt haben 8 Testlehrer/innen den Rückmeldebogen zum hier besprochenen Lernpfad ausgefüllt. Davon unterrichten vier in eLSA – Schulen, zwei haben bereits MNI-Projekten koordiniert und / oder bei solchen mitgearbeitet. Alle Testlehrer/innen haben bereits Vorerfahrungen auf dem Gebiet der neuen Lernkultur (Stationenbetrieb und / oder EVA-Lernspiralen) und E-Learning. 6 von ihnen haben bereits Lernplattformen im Unterricht eingesetzt.

Alle Testlehrer/innen haben den didaktischen Kommentar vollständig gelesen. Abbildung 22 zeigt, dass die Lehrer/innen die begleitenden Vorschläge zur Umsetzung des Lernpfades im Unterricht ausnahmslos sehr positiv bewertet haben. Ein ähnliches Ergebnis stellt sich bei der Frage dar, ob die methodischen Anleitungen als hilfreich empfunden wurden (siehe Abbildung 23).

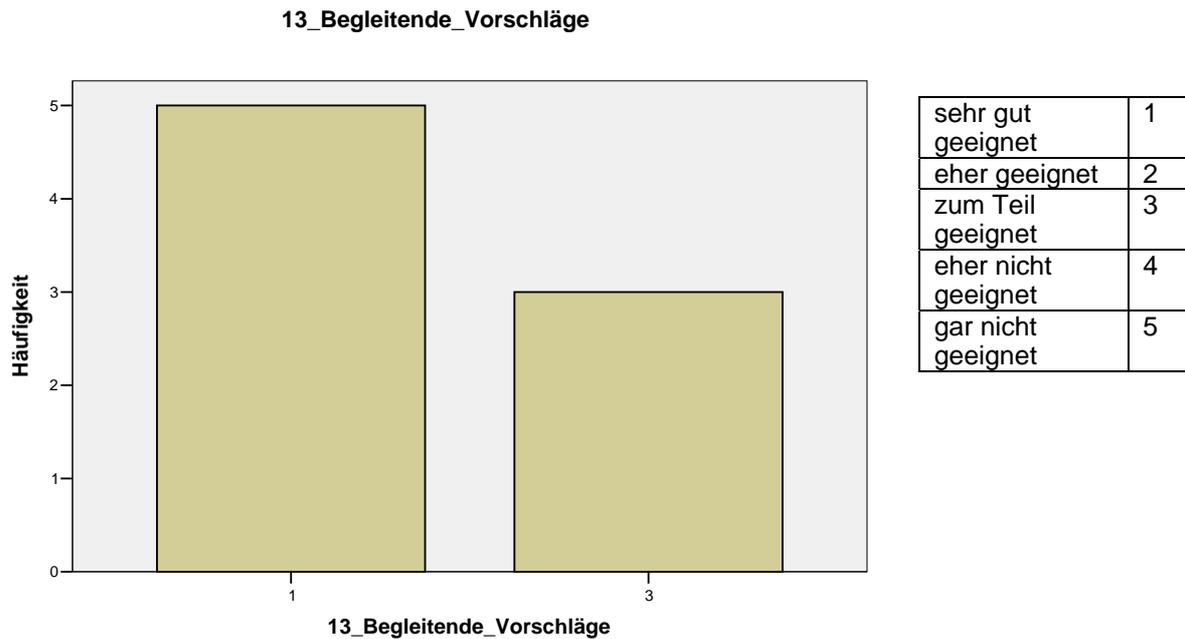


Abbildung Sind die begleitenden Vorschläge zur Umsetzung (Lernspirale, Themenplan, Arbeitsanleitung, ...) des Lernpfads im Unterricht für technologieunterstützten Unterricht geeignet?

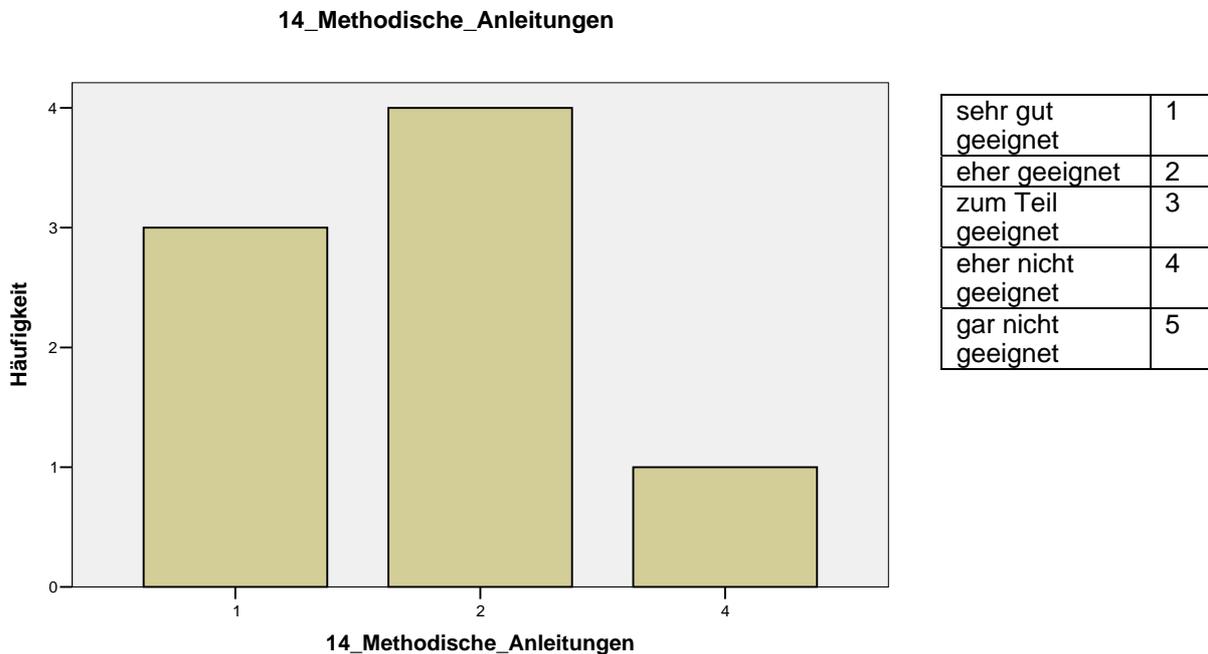


Abbildung 23: Die methodischen Anleitungen waren für mich sehr hilfreich.

Überdurchschnittlich viele Lehrer/innen (etwa die Hälfte gegenüber weniger als 25% im Durchschnitt) hätten die Zusammenstellung des Lernpfads gerne geändert.

Alle Lehrer/innen geben an, dass der Lernpfad das Reflektieren der Schüler/innen über ihr eigenes Tun ermöglicht (siehe Abbildung 24).

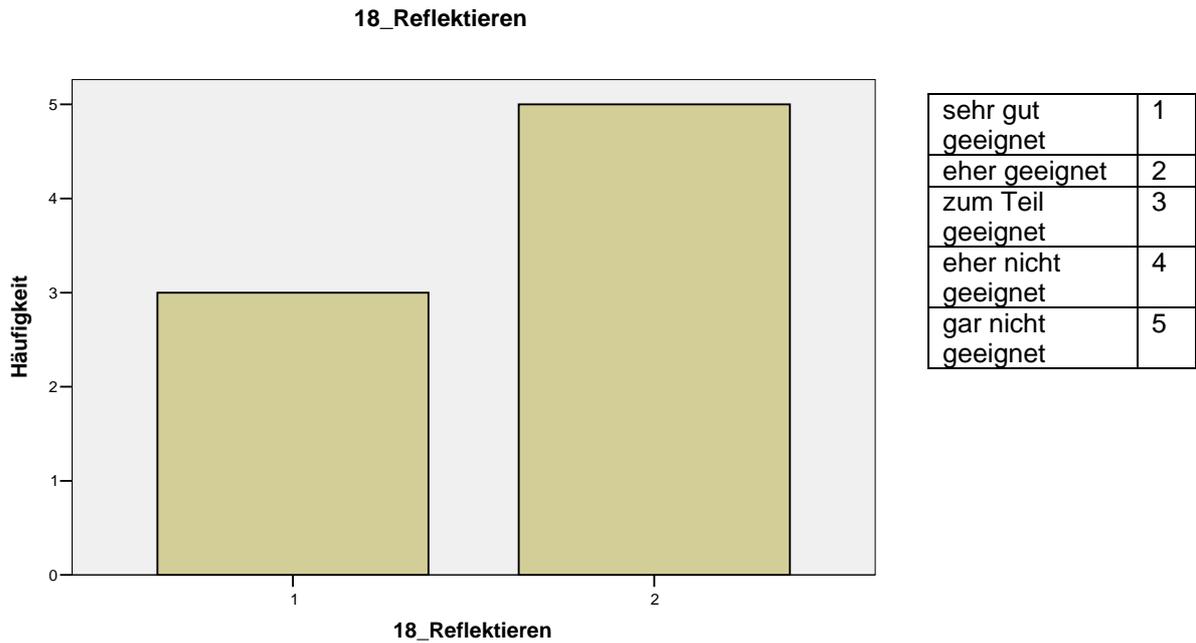


Abbildung 24: Der Lernpfad ermöglicht Schüler/innen das Reflektieren über ihr mathematisches Tun.

Abbildung 25 zeigt, dass laut Meinung der Lehrer/innen der Lernpfad individuelle und unterschiedliche Lösungswege der Schüler/innen ermöglicht. Außerdem erleben die Schüler/innen Mathematik hier als Erkundungsprozess, der von Austausch von Ideen und Argumenten geprägt ist (siehe Abbildung 26).

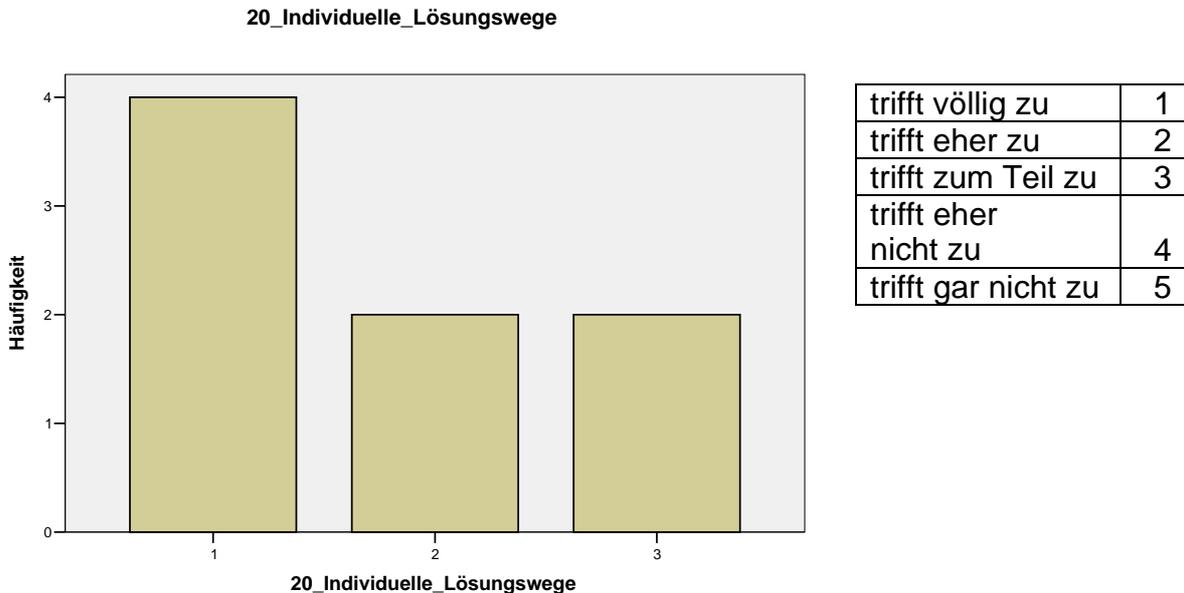
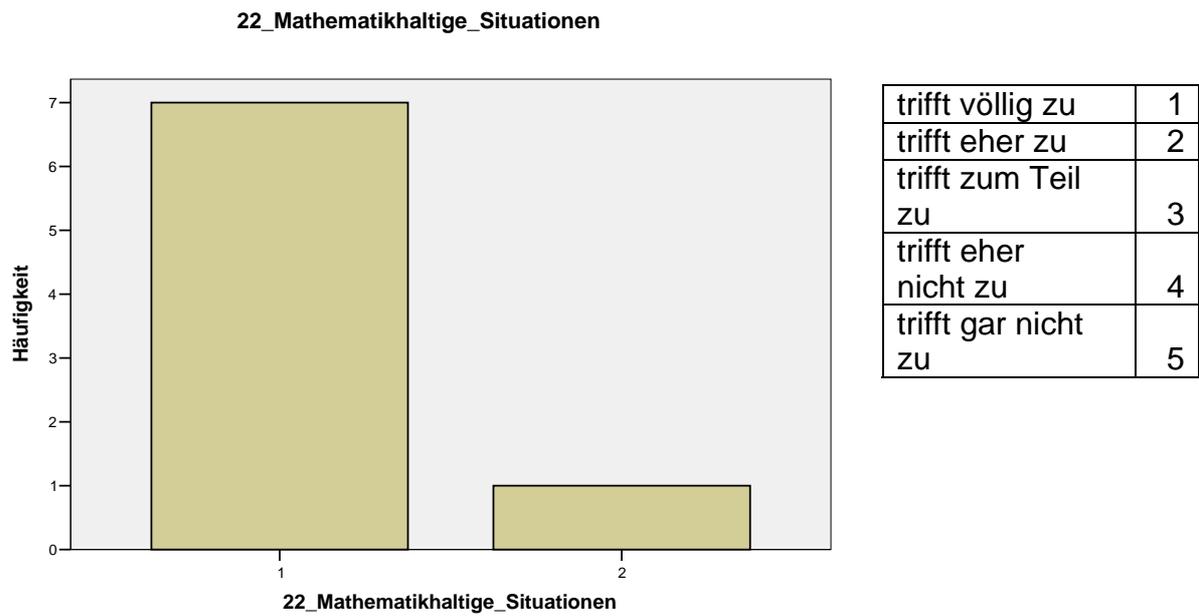


Abbildung 25: Der Lernpfad ermöglicht Schüler/innen unterschiedliche und individuelle Lösungswege.



trifft völlig zu	1
trifft eher zu	2
trifft zum Teil zu	3
trifft eher nicht zu	4
trifft gar nicht zu	5

Abbildung 26: Mit diesem Lernpfad erleben Schüler/innen Mathematiklernen als Erkundungsprozess, der allein oder gemeinsam mit anderen in intensivem Austausch von Ideen und Argumenten vollzogen werden kann:

7. Überblick über den Erstellungsprozess

Am Beginn stand die Diskussion möglicher Themen, bei denen der Medieneinsatz besonders vorteilhaft erscheint. Ideen für mögliche Beispiele und Bereiche wurden in einem Mindmap zusammengefasst. Dabei kristallisierten sich bereits mehrere Themen, die für Kurzprojekte geeignet erschienen, heraus (Koordinatensystem und Einführung von GeoGebra, Kongruenzbegriff und Dreieckskonstruktion, Merkwürdige Punkte im Dreieck). Die Grobplanung des Konzeptes für das Thema *Koordinatensystem und Einführung von GeoGebra* inklusive Ablauf des Projektes in verschiedenen Phasen ergab folgende aufeinander folgende Bereiche:

- Einführung in die Bedienung von GeoGebra
- Einstieg in das Koordinatensystem
- Vertiefen der Kenntnis von GeoGebra
- Verwenden algebraischer und geometrischer Darstellungsformen
- Dokumentieren und systematisches Arbeiten mit Konstruktionsprotokollen
- Erleben der Auswirkungen von Veränderungen abhängiger und unabhängiger geometrischer Objekte
- Vertiefen und Trainieren der neu erworbenen Fertigkeiten an Hand verschiedenartiger Aufgabenstellungen (auf gehobenem Niveau)

Eine umfangreiche Internet-Recherche zu dem Thema verlief ergebnislos. Daher zeigte sich die Notwendigkeit der Neuentwicklung aller benötigten Ressourcen. Beispiele zu den einzelnen Bereichen wurden besprochen und arbeitsteilig erstellt. Die Materialienerstellung (Dynamische Arbeitsblätter, Anleitungen für Schüler/innen, GeoGebra-Dateien) sowie die technische Implementierung mit Frame-Navigation erwiesen sich als besonders zeitaufwändig. Neben der individuellen Arbeit waren mehr als 10 Treffen notwendig.

Die didaktische Aufbereitung der Materialien, sowie die Erstellung eines Arbeitsplanes (Lernparcours) gingen zügig vor sich. Parallel wurden ein GeoGebra – Skriptum und Begleitmaterialien für Lehrer/innen entwickelt.

Geringfügige Veränderungen (Tippfehler) wurden nach einer Pilottest-Phase durchgeführt.

Medienvielfalt
im **Mathematikunterricht** 

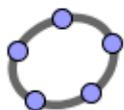
Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

Medienvielfalt im Mathematikunterricht

TEIL 4

LERNPFAD KONGRUENZ

Hollabrunn, Dezember 2006



GeoGebra



Eine Galerie multimedialer Lernhilfen

mathe online

für Schule, Fachhochschule,
Universität und Selbststudium

Lernpfad: Kongruenz – vermuten, erklären, begründen

6. Schulstufe

Autoren/innen: Anita Dorfmayr, Walter Klinger

1. Motivation – Warum wurde das Thema gewählt?

Da geometrische Figuren, insbesondere Dreiecke, in der 6. Schulstufe einen Schwerpunkt darstellen, bietet sich der Einsatz eines Dynamischen Geometrieprogramms besonders an. Neben der gesteigerten Motivation der Schüler/innen ermöglicht der Einsatz des Computers auch die verstärkte Selbsttätigkeit und das experimentelle Arbeiten der Schüler/innen.

Das selbstständige Forschen, Vermuten, Dokumentieren, Begründen, Argumentieren und exaktes mathematisches Formulieren sollen gefördert werden und stellen Herausforderungen an die Gestaltung des Unterrichts dar. Der Einsatz des Computers kann durch dynamische Applets und andere interaktive Materialien vor allem das Experimentieren und mathematische Vermuten unterstützen. Das Führen eines „wissenschaftlichen Protokolls“ soll exaktes Arbeiten und die genaue Interpretation von Fallunterscheidungen fördern.

2. Didaktischer Kommentar

Mit diesem Lernpfad soll der Begriff Kongruenz definiert und gefestigt werden. Kongruente Figuren (besonders Dreiecke) sollen erkannt und die Kongruenz begründet werden. Das Zeichnen von kongruenten Figuren und Konstruktionsaufgaben zu Dreiecken (auch im vollständigen Koordinatensystem) sollen durchgeführt werden und die Kongruenzsätze hergeleitet werden können. Unmöglichkeiten von Dreieckskonstruktionen (Dreiecksungleichung) und Mehrdeutigkeiten von Lösungen sollen zu einer möglichst exakten Begründung der Kongruenz von Dreiecken und zu den Kongruenzsätzen führen. Weitere Anwendungen sollen durchgeführt werden.

Kurzinformation	
Schulstufe	6. Schulstufe
Dauer	4 - 5 Stunden
Unterrichtsfächer	Mathematik
Verwendete Medien	Dynamische Geometrie Software (DGS), Java Applets, Internet
Technische Voraussetzungen	Java, Internet
Autoren	Anita Dorfmayr, Walter Klinger

Voraussetzungen

- Technische Voraussetzungen: GeoGebra (kostenlos von www.geogebra.at), Java (kostenlos von www.java.com), Internet
- Vorwissen der SchülerInnen: Geometrische Grundbegriffe aus der 1. Klasse, Arbeiten mit und Erstellen von Konstruktionsprotokollen
- Technisches Vorwissen der SchülerInnen: Elementarer Umgang mit dem Computer, Bedienung von GeoGebra

Lerninhalte und Lernziele

Lerninhalt	Lernziel
Arbeiten mit Figuren	kongruente Dreiecke herstellen können die Kongruenz von Dreiecken begründen können
Konstruieren von Figuren	Dreiecke skizzieren und konstruieren können Konstruktionsprotokolle für Dreiecke erzeugen können Erkennen ob Angaben mehrdeutig sind oder überhaupt nicht in Konstruktionen umgesetzt werden können

Didaktischer Hintergrund

Im Zentrum dieses Lernpfades stehen das

- Experimentieren
- Argumentieren
- Begründen
- kritische Hinterfragen und Erkennen von Mehrdeutigkeiten bzw. Unmöglichkeiten

Das Ziel ist die Entwicklung eines möglichst umfassenden **Kongruenzbegriffs**.

Durch das eigenständige Verfassen von Konstruktionsprotokollen (Beschreiben von Konstruktionswegen) sollen die Schüler/innen lernen, Dreiecke mit unterschiedlichen Angaben auch händisch zu konstruieren.

Einsatz im Unterricht

Grundsätzlich wäre für ein effizientes Arbeiten pro Schüler/Schülerin ein PC notwendig; allerdings ist auch eine Partnerarbeit an einem Gerät bei entsprechender Abstimmung der Lerngeschwindigkeiten der beiden Partner durchaus möglich.

Kombination der Medien

In dem vorliegenden Lernpfad wird versucht, durch den Einsatz der Software GeoGebra und von interaktiven Internetseiten das selbsttätige Lernen der Schüler/innen zu fördern. Die neu gewonnenen Erkenntnisse sollen schriftlich beschrieben und - speziell bei Hausübungen - durch händisches Zeichnen gefestigt werden.

Lernmedien der Schüler/innen

Die Schüler arbeiten mit diesem Lernpfad nicht nur am Computer. Ihre Tätigkeiten und Ergebnisse sollen sie schriftlich (im Heft oder auf Arbeitsblättern) festhalten.

Leistungsbeurteilung

Das Ergebnis (Kenntnis des Kongruenzbegriffs) und der Lernprozess, also der Grad der Selbsttätigkeit und die Selbstorganisation, sollen gleichwertig in die Leistungsbeurteilung einfließen. Die Evaluation erfolgt über die schriftliche Dokumentation der Schüler/innen und durch schriftliche Überprüfung bei der darauf folgenden Schularbeit.

3. Vorteile des Medieneinsatzes – exemplarische Beschreibung der Materialien

Vom Experiment zur Vermutung - Dreiecksungleichung

Drei Seiten - ein Dreieck?

Stelle die Seitenlängen richtig ein und versuche, durch Bewegung der Punkte C und C' ein Dreieck zu erzeugen. Arbeite sehr genau! Verwende - wenn nötig - auch die Zoom-Funktion.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| a) $a=4, b=5, c=3$ | b) $a=4, b=2, c=7$ |
| c) $a=3, b=5, c=8$ | d) $a=5, b=5, c=5$ |
| e) $a=5, b=9, c=3$ | f) $a=9, b=4, c=7$ |

[Öffne GeoGebra](#)

Schreibe eine Vermutung auf, unter welchen Bedingungen du aus der Angabe von drei Seitenlängen eindeutig ein Dreieck konstruieren kannst. Wann geht das nicht?

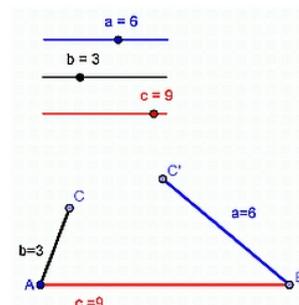


Abbildung 1: Aufgabenstellung - Dreiecksungleichung

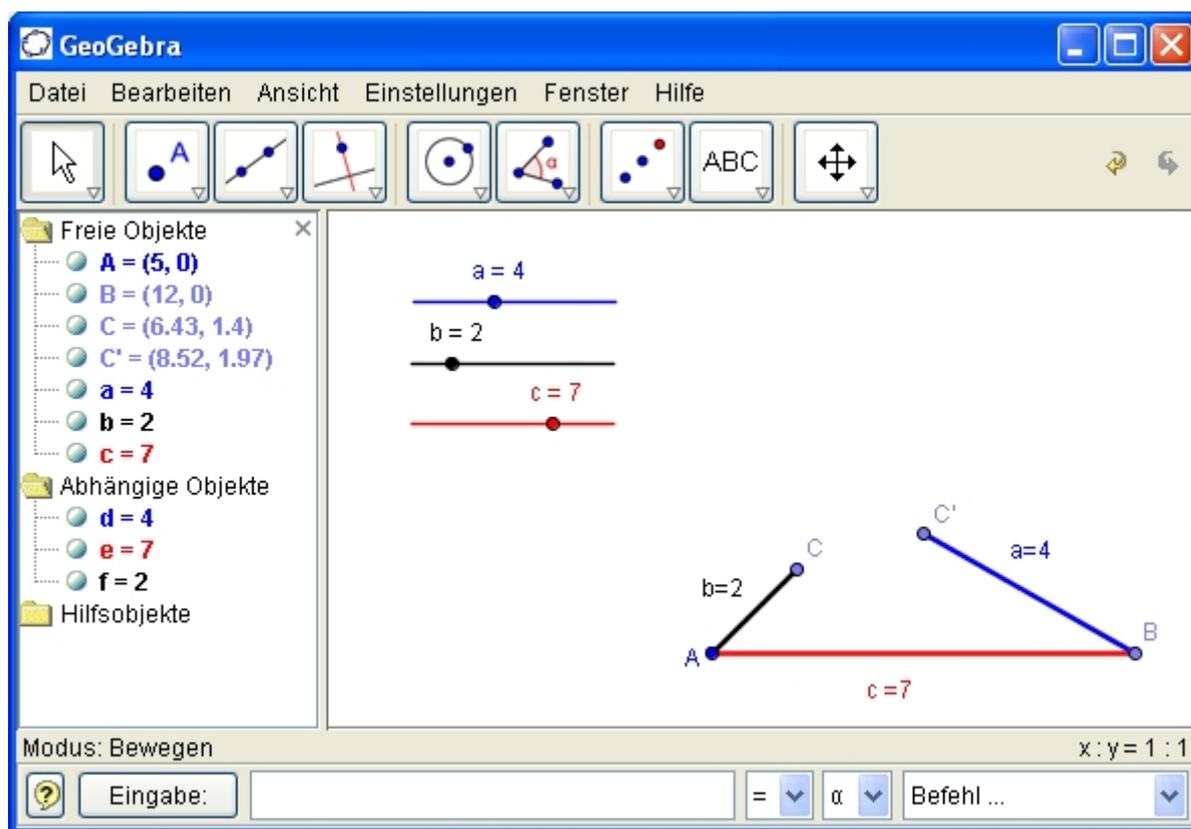


Abbildung 2: Experimentieren mit GeoGebra

Begriffsbildung erleben - Kongruenz

Das gelbe Dreieck

Gegeben sind je drei gleich lange Strecken. Du kannst jede Strecke bei den Endpunkten anfassen und so verschieben und drehen.

1. Schritt:

Erzeuge mit diesen Strecken drei Dreiecke. Verwende dabei jeweils drei Strecken von unterschiedlicher Länge.

2. Schritt:

Das gelbe Dreieck kannst du auch verschieben und drehen. Beobachte, was passiert, wenn du den Drehpunkt **schnell** bewegst. Probiere das aus!

3. Schritt:

Lege das gelbe Dreieck über jedes deiner Dreiecke und vergleiche sie. Was erkennst du? Schreibe deine Beobachtung auf.

[Öffne GeoGebra](#)

Schreibe auf, was bei diesen vier Dreiecken gleich ist.

Abbildung 3: Arbeitsanleitung - Gelbes Dreieck

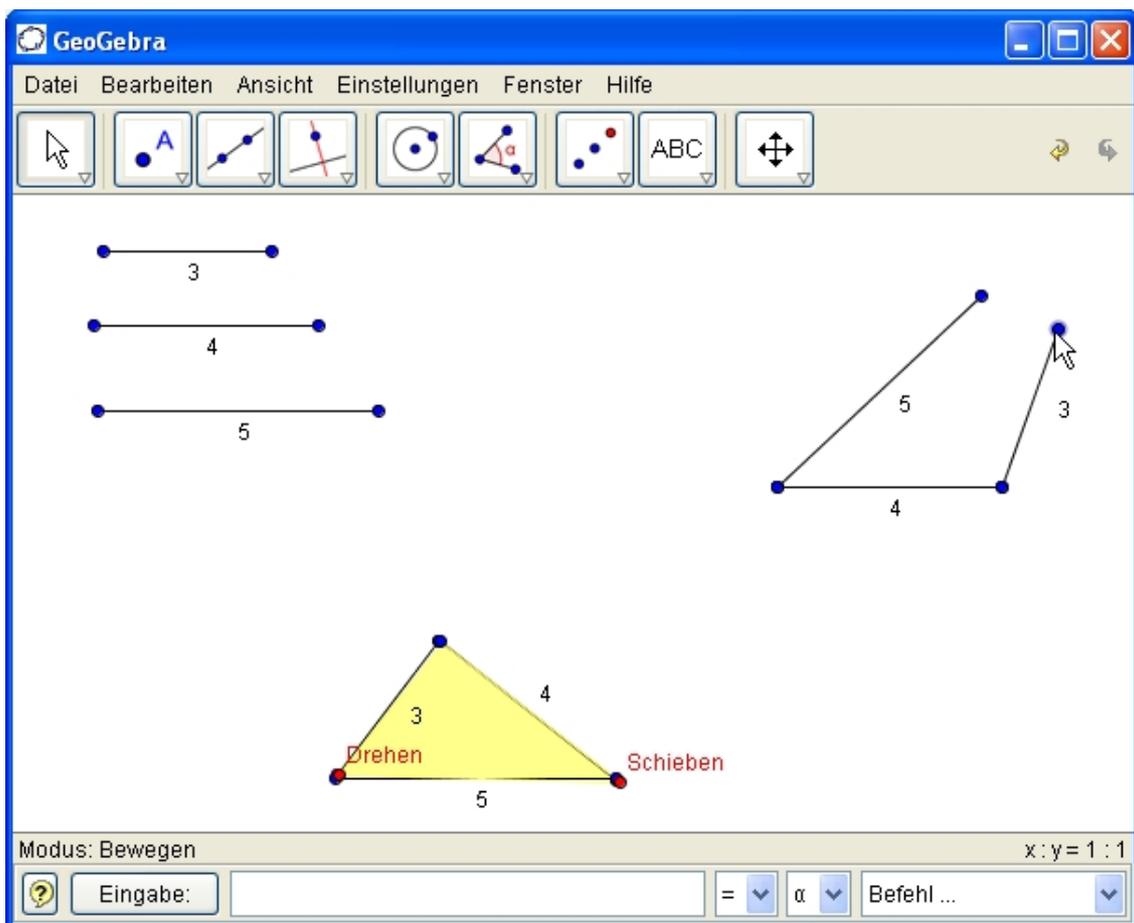
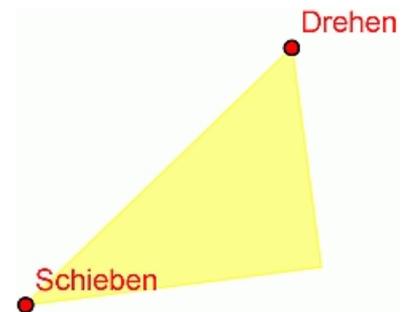


Abbildung 4: Experimentieren mit GeoGebra - Gelbes Dreieck

Forschen und Dokumentieren – Dreieckskonstruktion / Kongruenzsätze

ALLES IST MACHBAR

Konstruktionen jeder Art

Das **Konstruktionsbüro** unserer Firma kann mit allen Angaben ein eindeutiges Dreieck konstruieren

e-mail: alles.ist.machbar@aim.sofort.de

Wir haben einen Auftrag der ÖMGG

Die **Österreichisch Mathematisch-Geometrische Gesellschaft** (ÖMGG) hat einen Forschungsauftrag vergeben und unsere Firma **AIM** wird als erste und einzige alle diese Fragestellungen beantworten können.

alles ist konstruierbar!

Gleichzeitig werden **junge Forscherteams** gesucht, die ebenfalls untersuchen sollen ob und welche Dreiecksangaben zu eindeutigen Lösungen führen. Hat die Firma AIM Recht?

**Forschungsauftrag der Österreichisch Mathematisch-Geometrischen
Gesellschaft**



Fragestellung: Mit welchen Angaben lassen sich Dreiecke eindeutig zeichnen?

Untersuchen sie diese Aufgabenstellungen durch geeignete Konstruktionen, führen sie ein wissenschaftliches Protokoll (siehe Beilage) und beantworten sie die gestellte Frage möglichst mathematisch exakt!

Aufgabe 1: Gegeben sind drei Seiten: $a=4$ E, $b=7$ E, $c=5$ E.

Kann man einen SSS-Satz (es sind drei Seiten eines Dreiecks gegeben –
Voraussetzung die Dreiecksungleichung ist erfüllt) allgemein gültig formulieren?

Aufgabe 2: Gegeben sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel: $a=5$ E, $c=7$ E, $\beta =50^\circ$.

Existiert ein allgemeingültiger SWS-Satz?

**Aufgabe 3: Gegeben sind zwei Seiten und ein Winkel der der größeren Seite gegenüber
liegt: $a=6$ E, $c=8$ E, $\gamma =65^\circ$.**

Gilt einen SsW-Satz?

**Aufgabe 4: Gegeben sind zwei Seiten und ein Winkel der der kleineren Seite
gegenüber liegt: $c=10$ E, $b=7$ E, $\beta = 25^\circ$**

Gibt es einen sSw-Satz?

Aufgabe 5: Gegeben sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegenüber liegt:

$\alpha =80^\circ$, $\beta =30^\circ$, $c=6$ E

Gibt einen WSW-Satz?

Aufgabe 6: Gegeben sind eine Seite und zwei Winkel wobei einer nicht an die Seite anliegt :

$\alpha =50^\circ$, $\beta =90^\circ$, $c= 7$ E

Gibt einen SWW-Satz?

Aufgabe 7: Gegeben sind alle Winkel eines Dreiecks: $\alpha =70^\circ$, $\beta =60^\circ$, $\gamma =50^\circ$

Gibt einen WWW-Satz?

**Die gefunden allgemeingültigen Sätze werden unter den Begriff KONGRUENZSÄTZE in
die mathematische Forschung eingehen**

Die ÖMGG bedankt sich für die aktive Mitarbeit bei dieser wichtigen Forschungsangelegenheit
von gehobenem öffentlichem Interesse

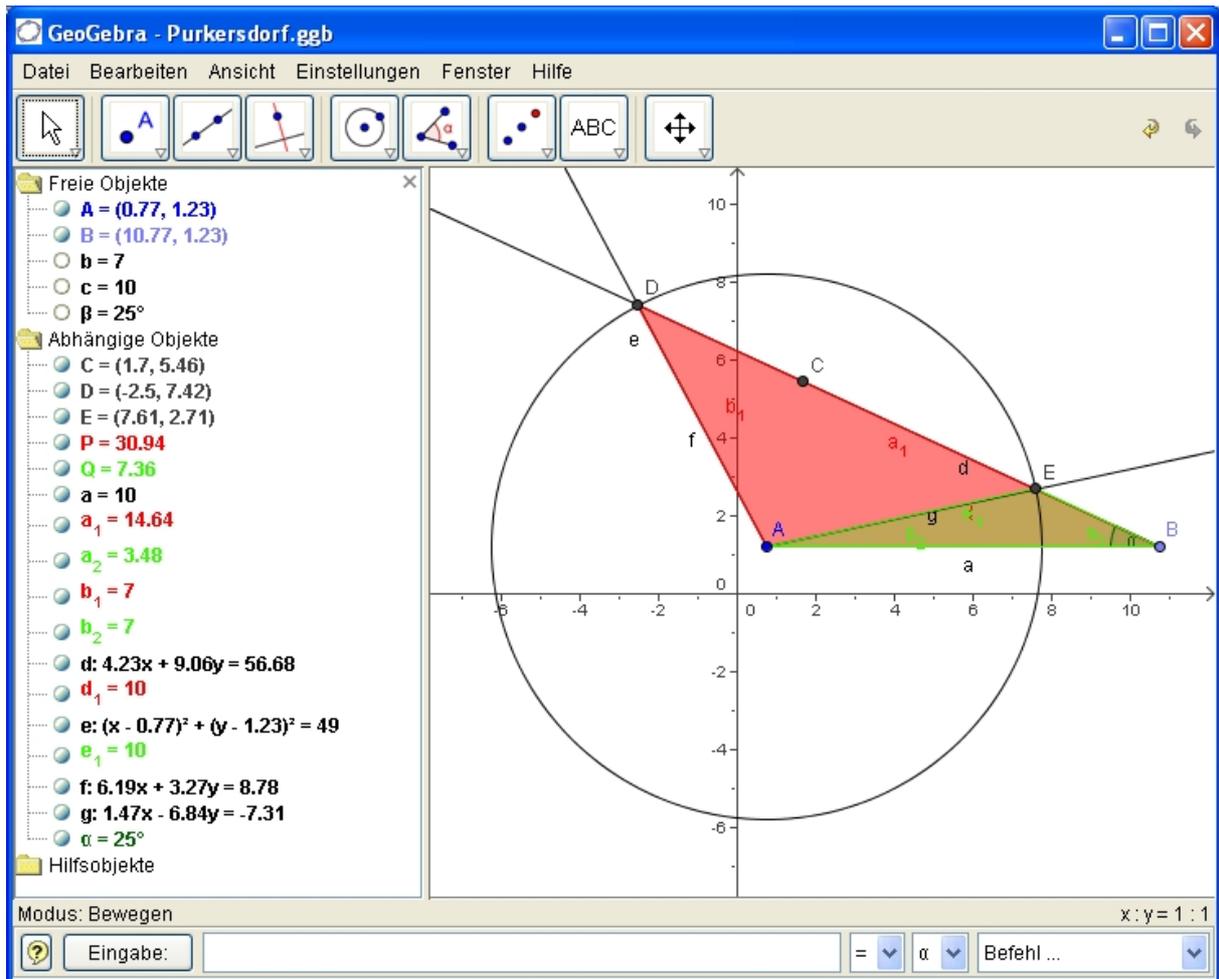


Abbildung 5: Forschen mit GeoGebra - Schülerarbeit

Wissenschaftliches Protokoll - Kongruenzsätze

Durch welche Angaben sind Dreiecke eindeutig festgelegt, durch welche nicht?

Mögliche Angaben	Meine erste Vermutung:		Schreibe deine Untersuchungsergebnisse auf! Ist die Angabe eindeutig?	Kongruenzsätze in Worten und in Kurschreibweise (XXX-Satz):	Zu keinen eindeutigen Lösungen führen:	Gibt es Fallunterscheidungen?
3 Seiten	<input type="radio"/> Ja	<input type="radio"/> Nein				<input type="radio"/> Ja
2 Seiten 1 Winkel	<input type="radio"/> Ja	<input type="radio"/> Nein				<input type="radio"/> Ja
1 Seite 2 Winkel	<input type="radio"/> Ja	<input type="radio"/> Nein				<input type="radio"/> Ja
3 Winkel	<input type="radio"/> Ja	<input type="radio"/> Nein				<input type="radio"/> Ja

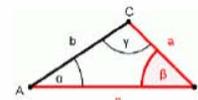
4. Drehbuch / Drehbücher – Methodisch-didaktische Anleitungen

Unterrichtsorganisation – Arbeitsanweisungen für Schüler/innen



Kongruenz-Spürnasen

Kongruenz – vermuten, erklären, begründen



Beachte: Auf der Seite **Übersicht** erfährst du, welche Stationen Voraussetzung für andere Stationen sind.



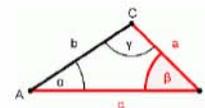
Nr.	Titel	Aktivität	Schülerzahl	Arbeitsauftrag / Lerninhalte	P/W	Kontrolle
DREIECKSUNGLEICHUNG						
1	Drei Seiten – ein Dreieck? Schieberegler			Öffne das dynamische Arbeitsblatt und schreibe eine Vermutung auf.	WP mit 3	Selbstkontrolle
2	Schieberegler?			Wie wurde das Arbeitsblatt in Station 1 erzeugt? Bastle es selbst und verwende dazu das Konstruktionsprotokoll von Station 1 und das Werkzeug <i>Schieberegler</i>	W	Lehrerkontrolle
3	Drei Seiten – ein Dreieck? Dreiecksungleichung überprüfen			Öffne das dynamische Arbeitsblatt und schreibe eine Vermutung auf.	WP mit 1	Selbstkontrolle
4	Dreiecksungleichung - Konstruktion			Kannst du aus drei Streckenlängen immer ein Dreieck konstruieren? Versuche mit Hilfe der angegebenen Längen Dreiecke zu zeichnen. Stelle Vermutungen auf und schreibe sie auf.	P	Selbstkontrolle
5	Dreiecksungleichung – Überprüfe dein Wissen			Bearbeite alle Aufgabenstellungen am Arbeitsblatt. Arbeite zuerst alleine und dann gemeinsam mit einem Partner / einer Partnerin.	WP mit 6	Partnerkontrolle
6	Dreiecksungleichung - Multiple Choice Quiz			Führe das Multiple Choice Quiz aus. Bei jeder Frage können auch mehrere Antworten richtig sein.	WP mit 5	Selbstkontrolle

Abbildung 6: Arbeitsplan für Schüler/innen - Seite 1



Kongruenz-Spürnasen

Kongruenz – vermuten, erklären, begründen



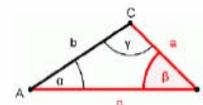
7	Vom Vermuten zum Merksatz			Suche in deinem Mathematikbuch Informationen über die Dreiecksungleichung. Formuliere selbst einen möglichst genauen Merksatz darüber und schreibe ihn auf ein A4-Blatt. Vergleiche deine Vermutungen mit dieser Formulierung!	P	Lehrerkontrolle
KONGRUENZBEGRIFF und KONGRUENZSÄTZE						
8	Das Gelbe Dreieck			<ol style="list-style-type: none"> 1. Einzelarbeit: Bearbeite die Aufgabenstellung und formuliere eine Vermutung. 2. Vergleiche dann deine Vermutung mit den anderen Gruppenmitgliedern. 3. Einigt euch auf eine gemeinsame Formulierung und schreibt sie auf. Zeigt diese Formulierung eurem Lehrer / eurer Lehrerin. 	P	Lehrerkontrolle
9	Kongruenz			Schreibe auf, was ein Mathematiker unter <i>kongruenten Dreiecken</i> versteht und was ein <i>Kongruenzsatz</i> ist.	P	Selbstkontrolle
ALLES IST MACHBAR						
10	Auftrag der ÖMGG			Lies dir das Informationsblatt über das Konstruktionsbüro AIM und den Forschungsauftrag der ÖMGG durch! Verwende zur Dokumentation deiner Forschungsarbeit das wissenschaftliche Protokoll.	P	Selbstkontrolle
10A	Aufgabe 1 – SSS?			Bearbeitet den Forschungsauftrag und dokumentiert eure Ergebnisse genau. Verwendet auch das wissenschaftliche Protokoll.	W	Partnerkontrolle
10B	Aufgabe 2 – SWS?			Bearbeitet den Forschungsauftrag und dokumentiert eure Ergebnisse genau. Verwendet auch das wissenschaftliche Protokoll.	P	Partnerkontrolle

Abbildung 7: Arbeitsplan für Schüler/innen - Seite 2



Kongruenz-Spürnasen

Kongruenz – vermuten, erklären, begründen



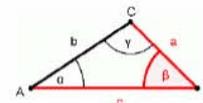
10C	Aufgabe 3 – SsW?			Bearbeitet den Forschungsauftrag und dokumentiert eure Ergebnisse genau. Verwendet auch das wissenschaftliche Protokoll.	P	Partnerkontrolle
10D	Aufgabe 4 – Ssw?			Bearbeitet den Forschungsauftrag und dokumentiert eure Ergebnisse genau. Verwendet auch das wissenschaftliche Protokoll.	P	Partnerkontrolle
10E	Aufgabe 5 – WSW?			Bearbeitet den Forschungsauftrag und dokumentiert eure Ergebnisse genau. Verwendet auch das wissenschaftliche Protokoll.	P	Partnerkontrolle
10F	Aufgabe 6 – SWW?			Bearbeitet den Forschungsauftrag und dokumentiert eure Ergebnisse genau. Verwendet auch das wissenschaftliche Protokoll.	W	Partnerkontrolle
10G	Aufgabe 7 – WWW?	 		Bearbeitet den Forschungsauftrag und dokumentiert eure Ergebnisse genau. Verwendet auch das wissenschaftliche Protokoll.	W	Partnerkontrolle
11	Plenum	 		Vergleicht - nach Anleitung durch eure Lehrerin / euren Lehrer - eure wissenschaftlichen Protokolle und vervollständigt diese. Entwickelt daraus die gültigen Kongruenzsätze .	P	Lehrerkontrolle

Abbildung 8: Arbeitsplan für Schüler/innen - Seite 3



Kongruenz-Spürnasen

Kongruenz – vermuten, erklären, begründen



Erklärung der Abkürzungen und Symbole

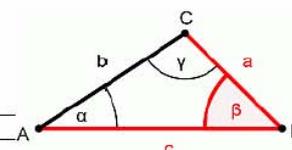
	Schreiben		Sprechen über Mathematik
	GeoGebra		gesamte Klasse
	Dynamisches Arbeitsblatt aufrufen		Einzelarbeit
	schwierig		Partnerarbeit
	Lesen		Gruppenarbeit

Abbildung 9: Arbeitsplan für Schüler/innen - Seite 4

Anleitungen für Lehrer/innen



Zusatzinformationen zu Kongruenz-Spürnasen



Nr.	Titel	Zusatzinformation
1	Drei Seiten – ein Dreieck? Schieberegler	Eventuell ist eine kurze Besprechung zum Umgang mit Schiebereglern nötig. Möglicherweise muss auch die Zoom-Funktion von GeoGebra besprochen werden.
2	Schieberegler?	Wenn die Schülerinnen und Schüler vorher noch nie mit dem Werkzeug <i>Schieberegler</i> in Berührung gekommen sind, wird nach einiger Zeit eine Hilfestellung nötig sein.
3	Drei Seiten – ein Dreieck? Dreiecksungleichung überprüfen	Alternativer Zugang zur Station 1.
4	Dreiecksungleichung - Konstruktion	Konstruieren mit GeoGebra. Nicht alle Angaben führen auf Dreiecke.
5	Dreiecksungleichung – Überprüfe dein Wissen	Es muss darauf geachtet werden, dass die Reihenfolge von Einzelarbeit und anschließender Partnerarbeit eingehalten wird. Der Lehrer / die Lehrerin dient als Anlaufstelle bei Streitfällen am Ende des Arbeitsauftrags.
6	Dreiecksungleichung - Multiple Choice Quiz	Vorzeitige Kontrolle führt zu einer Reduktion der Prozentpunkte (Strafpunkte). ACHTUNG: Viele Schülerinnen und Schüler versuchen, auch negative Prozentzahlen zu erreichen. Dieses Schülerverhalten sollte am besten NICHT thematisiert werden.
7	Vom Vermuten zum Merksatz	Hier sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Vermutungen mit den Informationen im Schulbuch vergleichen und eventuell nötige Korrekturen und Ergänzungen vornehmen.
8	Das Gelbe Dreieck	Die Zusatzinformation „ <i>ziehe den Drehpunkt schnell nach unten</i> “ ersetzt das Spiegeln des gelben Dreiecks. Dies ist eine Eigenheit von GeoGebra, die in den neuesten Versionen von GeoGebra nicht mehr auftritt.
9	Kongruenz	Begriff der Kongruenz wird hier definiert, außerdem steht hier, was ein Kongruenzsatz ist. - nötig für die Aufgaben 10A – 10G!
10	Auftrag der ÖMGG	Eventuell sollte den Schülerinnen und Schülern der Projektauftrag und das wissenschaftliche Protokoll in Papierform zur Verfügung gestellt werden.
10A	Aufgabe 1 – SSS?	Konstruktionsaufgabe in GeoGebra
10B	Aufgabe 2 – SWS?	Konstruktionsaufgabe in GeoGebra
10C	Aufgabe 3 – SsW?	Konstruktionsaufgabe in GeoGebra: Fallunterscheidung!
10D	Aufgabe 4 – Ssw?	Konstruktionsaufgabe in GeoGebra: Fallunterscheidung! Ssw – Satz existiert nicht
10E	Aufgabe 5 – WSW?	Konstruktionsaufgabe in GeoGebra
10F	Aufgabe 6 – Sww?	Konstruktionsaufgabe in GeoGebra Die Lösungsdatei kommt ohne Winkelsumme aus. Die Schülerinnen und Schüler können jedoch auch andere Wege gehen.
10G	Aufgabe 7 – WWW?	Konstruktionsaufgabe in GeoGebra ACHTUNG: WWW – Satz existiert nicht
11	Plenum	Der Lehrer / die Lehrerin entscheidet über die Form der Dokumentation und Präsentation. Im Lernpfad sind keine genauen Anleitungen dazu vorgegeben.

Abbildung10: Zusatzinformation für Lehrer/innen

Weitere Materialien

Das Einführungsskriptum zur Bedienung von GeoGebra aus dem Lernpfad *Einführung – Koordinatensystem und geometrische Grundbegriffe* kann auch hier eingesetzt werden.

5. Ergebnisse der internen Evaluation

Fragestellungen zum didaktischen/methodischen Kommentar:

Der Lernpfad dient dem Erarbeiten neuer Inhalte, aber auch dem Vertiefen und Üben. Die Informationen über den Umgang mit der Software Geogebra sind nicht detailliert genug! Der didaktische Kommentar ist gut und verständlich formuliert.

Es liegt ein Drehbuch in Form eines Stationenbetriebs mit Wahl- und Pflichtstationen vor. Bei jedem Lernschritt wird die Sozialform und eine Kontrollmöglichkeit vorgeschlagen.

Individuelle Veränderungen und Schwerpunktsetzungen durch die Lehrer/innen sind möglich. Es wird betont, dass die neuen Erkenntnisse schriftlich beschrieben und – speziell bei den Hausübungen - durch händisches Konstruieren gefestigt werden sollen. Es finden sich auch Hinweise zur Leistungsmessung und Leistungsbeurteilung.

Fragestellungen zum Lernpfad

Die mathematischen Lernziele werden den Schüler/innen teilweise transparent gemacht. Es gibt heuristisch-experimentelle Phasen in denen die Schüler/innen Vermutungen aufstellen. Durch Diskussionen werden Begründungen gesucht, die zu einer Exaktifizierung der Begriffe und der Konstruktionsverfahren führen. In dieser Phase werden die Schüler/innen dazu aufgefordert, das Schulbuch als Informationsquelle zu verwenden.

Das methodische Vorwissen muss durch den Lehrer/ die Lehrerin geschehen. Der Lernpfad bietet Differenzierungsmöglichkeiten, da nicht alle Aufgabenstellungen aufbauend sind.

Festigung des Wissens – Wissensüberprüfung

Es gibt viele Angebote für die Schüler/innen das neu erworbene Wissen selbst zu überprüfen (z.B. Multiple Choice Quiz, dynamische Konstruktionsbeschreibungen).

6. Äußere Evaluation / Feedback der Schüler/innen

Dieser Abschnitt fasst die Rückmeldungen von 15 Schüler/innen zusammen.

Die evaluierende Klasse ist nicht an Partner- bzw. Gruppenarbeit gewöhnt. Das Arbeiten am Computer ist für die Schüler/innen auch ungewohnt. Trotzdem bewerten sie ihre Computerkenntnisse als hoch.

Das Layout und die Navigation wurden sehr positiv angenommen.

Die Bedienung der Software Geogebra und der dynamischen Arbeitsblätter bereitete den Schüler/innen keine Probleme. 75% waren der Meinung, dass die interaktiven Übungen ihr mathematisches Verständnis unterstützt haben.

Der Lernpfad wurde zu Hause nicht verwendet. Ein weiterer Einsatz von Lernpfaden im Mathematikunterricht wird von den Schüler/innen gewünscht. Alle Schüler/innen glauben, dass sie die wichtigen Inhalte des Lernpfades verstanden haben. Dieses Verstehen wurde von fast allen als wichtig eingestuft.

Der Großteil der Schüler/innen meint, dass sie die Möglichkeit hatten über mathematische Inhalte mit anderen zu sprechen. Auch das Verstehen der mathematischen Inhalte sowie das gegenseitige Helfen wird als wichtig und möglich angesehen. Besonders positiv sind die Rückmeldungen auf die Frage, ob alle mathematischen Inhalte verstanden wurden (siehe Abbildung 1). Alle Schüler/innen geben an, dass sie alle wichtigen Inhalte des Lernpfades verstanden haben. Bei dieser Frage hat kein Schüler/keine Schülerin mit „trifft eher nicht zu“ oder mit „trifft gar nicht zu“ geantwortet. Etwa 90% der Schüler/innen geben an, dass ihnen der Sinn und die Bedeutung der neuen Begriffe klar geworden ist.

90% der Schüler/innen hatten die Gelegenheit über mathematisches Tun nachzudenken. Genau so viele Schüler/innen haben mit Neugier, Engagement sowie Lust am Denken und mathematisches Tun den Lernpfad absolviert (siehe Abbildung 12). Knapp 90% der Schüler/innen geben an, dass sie für ihren Lernfortschritt und den Lernprozess selbst verantwortlich waren.

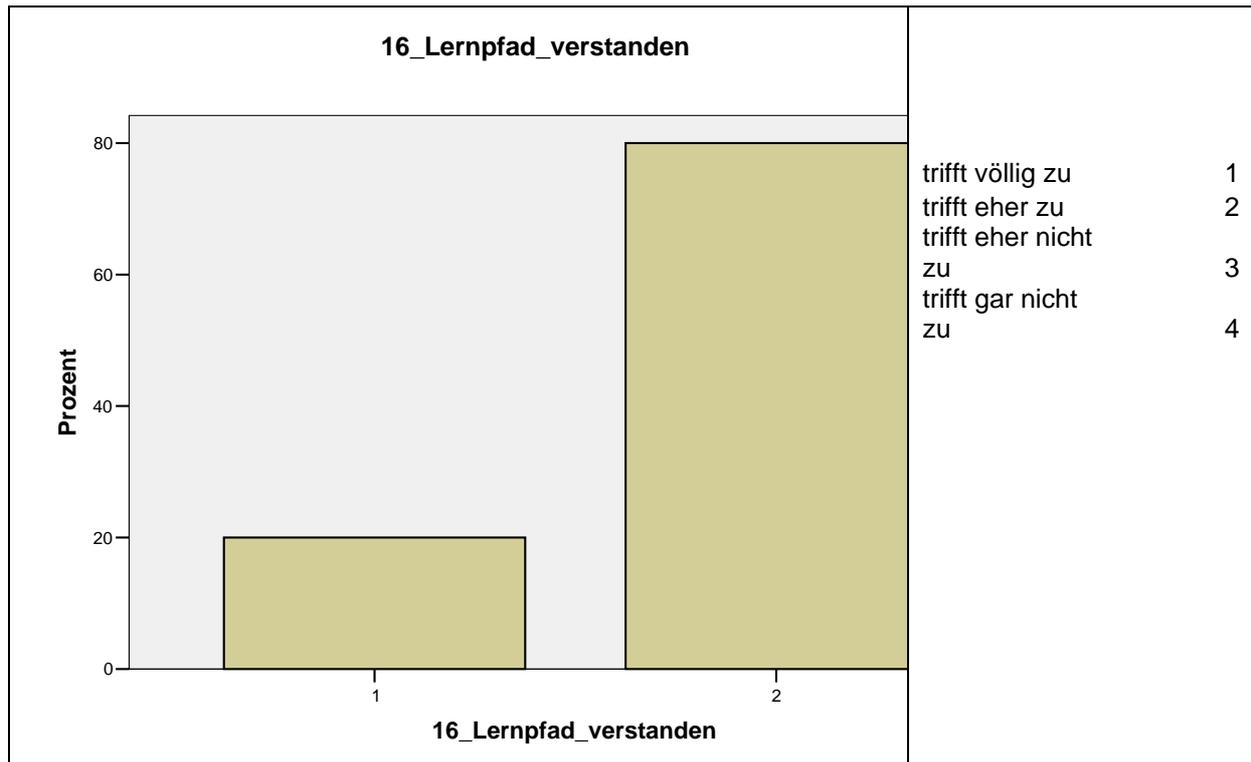


Abbildung 11: Ich habe alle wichtigen mathematischen Inhalte des Lernpfade verstanden.

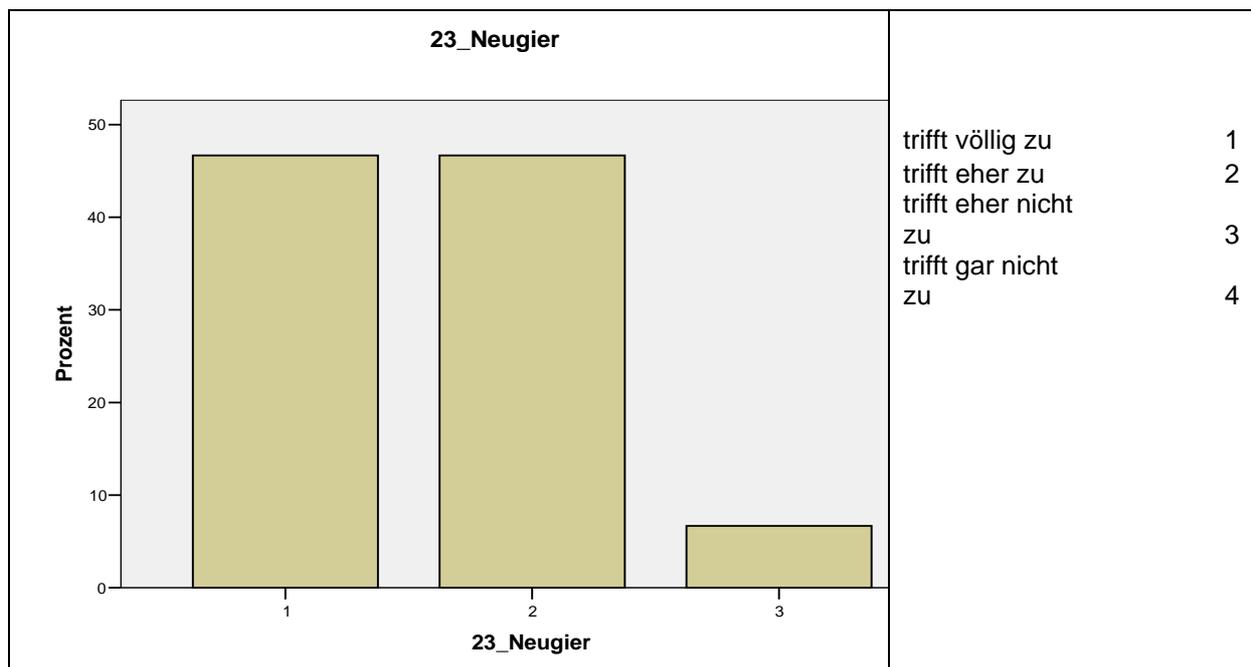


Abbildung 12: Ich habe den Lernpfad mit Neugier, Engagement sowie Lust am Denken und mathematischen Tun absolviert.

Fast alle Schüler/innen sind mit dem Lernpfad sehr zufrieden.

7. Überblick über den Erstellungsprozess

Am Beginn stand die Diskussion möglicher Themen, bei denen der Medieneinsatz besonders vorteilhaft erscheint. Ideen für mögliche Beispiele und Bereiche wurden in einem Mindmap zusammengefasst. Am Beginn lag der Schwerpunkt der Überlegungen darin, Möglichkeiten für die Schulung von Begründen und Beweisen aufzuzeigen. Davon wurde in der Diskussion teilweise abgegangen. Das Augenmerk wurde auf den Bereich Begründen, Argumentieren und exaktes Formulieren gelegt.

Die Grobplanung des Konzeptes für den Lernpfad *Kongruenz – vermuten, erklären, begründen* sowie die didaktische Aufbereitung des Projektes wurde in folgende drei Bereiche eingeteilt:

- Drei Seiten – ein Dreieck?
Ziele:
 - Aufstellen von Vermutungen
 - Schulung des Argumentierens
 - Exakte Formulierung der Dreiecksungleichung
 - Selbsterstellen eines Tests
- Kongruente Dreiecke
Ziel:
 - Exakte Formulierung des Kongruenzbegriffes
- Alles ist machbar – wissenschaftlicher Forschungsauftrag
Ziel:
 - Konstruktion von Dreiecken
 - Umsetzen dynamischer Konstruktionsbeschreibungen und Verfassen von Konstruktionsprotokollen
 - Exakte Formulierung der Kongruenzsätze
 - Erkennen und Begründen, ob aus einer Angabe ein Dreieck eindeutig konstruierbar ist
 - Präsentation von Ergebnissen

Im Internet wurden keine Materialien zu diesem Thema gefunden, wodurch alle Ressourcen selbst erstellt werden mussten. Beispiele zu den einzelnen Bereichen wurden besprochen und arbeitsteilig erstellt. Die Materialienerstellung (Dynamische Arbeitsblätter, Dynamische Konstruktionsbeschreibungen, Anleitungen für Schüler/innen, GeoGebra-Dateien, HotPotatoes - Tests) sowie die technische Implementierung mit Frame-Navigation erwiesen sich als besonders zeitaufwändig. Neben der individuellen Arbeit waren mehr als 10 Treffen notwendig.

Die didaktische Aufbereitung der Materialien, sowie die Erstellung eines Arbeitsplanes (Kongruenzspürnasen) und eines Ergänzungsblattes für Lehrer/innen nahmen nur wenig Zeit in Anspruch.

Die Pilottest-Phase führte nur zu geringfügigen Veränderungen.

Medienvielfalt
im **Mathematikunterricht** 

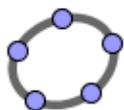
Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

**Medienvielfalt im
Mathematikunterricht**

TEIL 4

**LERNPFAD
MERKWÜRDIGE PUNKTE**

Hollabrunn, Dezember 2006



GeoGebra

Eine Galerie multimedialer Lernhilfen

mathe online



für Schule, Fachhochschule,
Universität und Selbststudium

Lernpfad: Dreiecke – merkwürdige Punkte

6. Schulstufe

Autoren/innen: Edeltraud Schwaiger, Hildegard Urban-Woldron

1. Motivation – Warum wurde das Thema gewählt?

Nachdem die Konstruktion der vier merkwürdigen Punkte (Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt) erlernt wurde, sollten neben dem Wiederholen und Festigen bereits bekannter Inhalte (Symmetralen, Winkelsumme im Dreieck, Satz von Thales) die mögliche Lage der merkwürdigen Punkte im Dreieck durch Arbeitsaufträge erforscht werden.

Die Schüler/innen sollen ihre Forschungsergebnisse übersichtlich dokumentieren, anderen Schüler/innen weitergeben und präsentieren.

2. Didaktischer Kommentar

Am Beispiel der merkwürdigen Punkte im Dreieck sollen die Schüler/innen mit Hilfe fertiger Applets zur dynamischen Geometrie zum genauen Beobachten und Begründen geführt werden. Experimentierfreudigkeit und selbstentdeckendes Lernen stehen im Vordergrund, wenn bei Veränderung der Dreiecke die Lage dieser Punkte erforscht und begründet werden soll. Es stehen Aufgaben getrennt für Höhenschnittpunkt, Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt zur Verfügung, wie auch für alle vier Punkte gemeinsam. Beispielhaft werden auch Beweismöglichkeiten thematisiert

Kurzinformation	
Schulstufe	6. Schulstufe (2. Klasse AHS / HS)
Dauer	4 Unterrichtsstunden
Unterrichtsfächer	Mathematik
Verwendete Medien	Dynamische Arbeitsblätter, Applets
Technische Voraussetzungen	Java, Flash
Autoren	Edeltraud Schwaiger, Hildegard Urban-Woldron

Dieser Lernpfad ist gekennzeichnet durch klare Sprache und prägnante Arbeitsaufträge. Auf Anschaulichkeit, Experimentiermöglichkeit und selbst entdeckendes Lernen wurde durch die Verwendung von dynamischer Geometriesoftware besonders geachtet.

Vorwissen

- Grundlegende Eigenschaften von Dreiecken
- Eigenschaften von Seitensymmetralen und Winkelsymmetralen
- Konstruktion von U, H, S und I

3. Vorteile des Medieneinsatzes – exemplarische Beschreibung der Materialien

Wiederholen und Festigen des Vorwissens

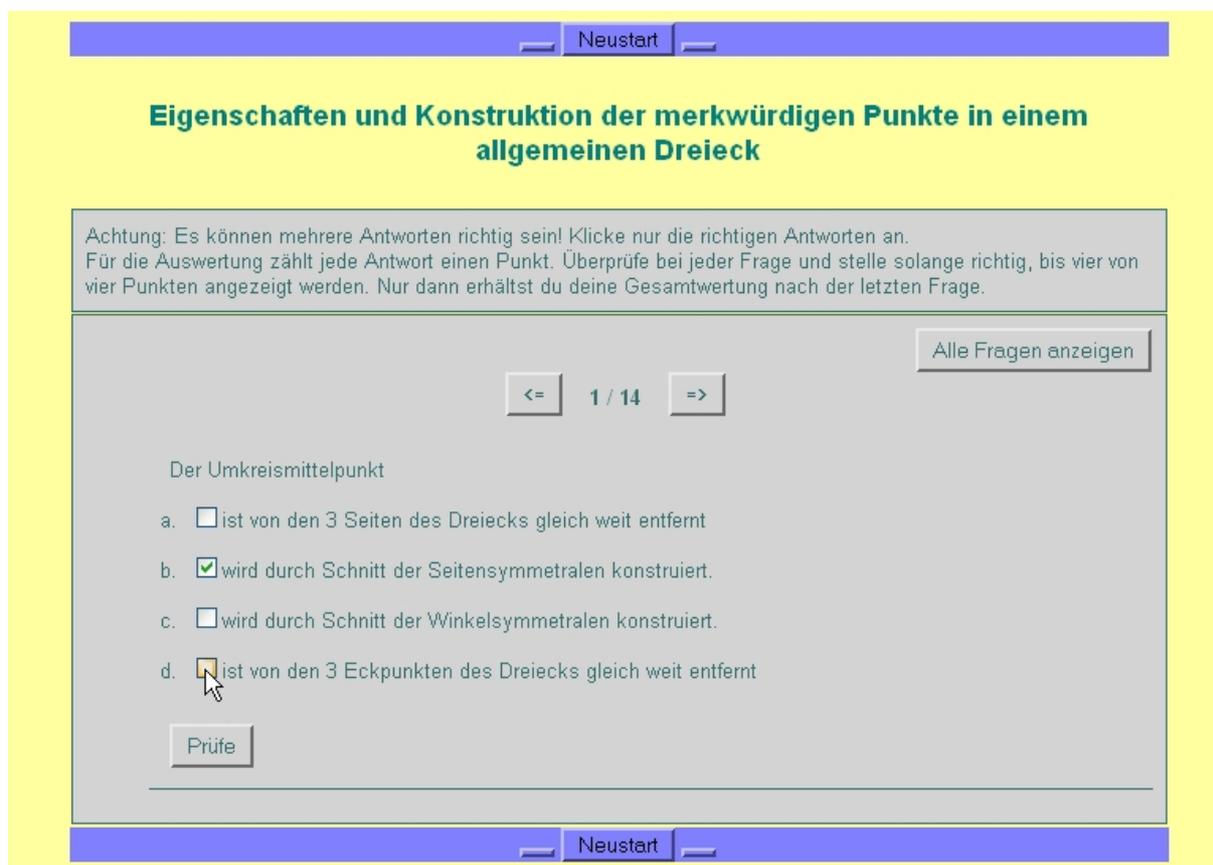


Abbildung 1: Selfchecking - Quiz

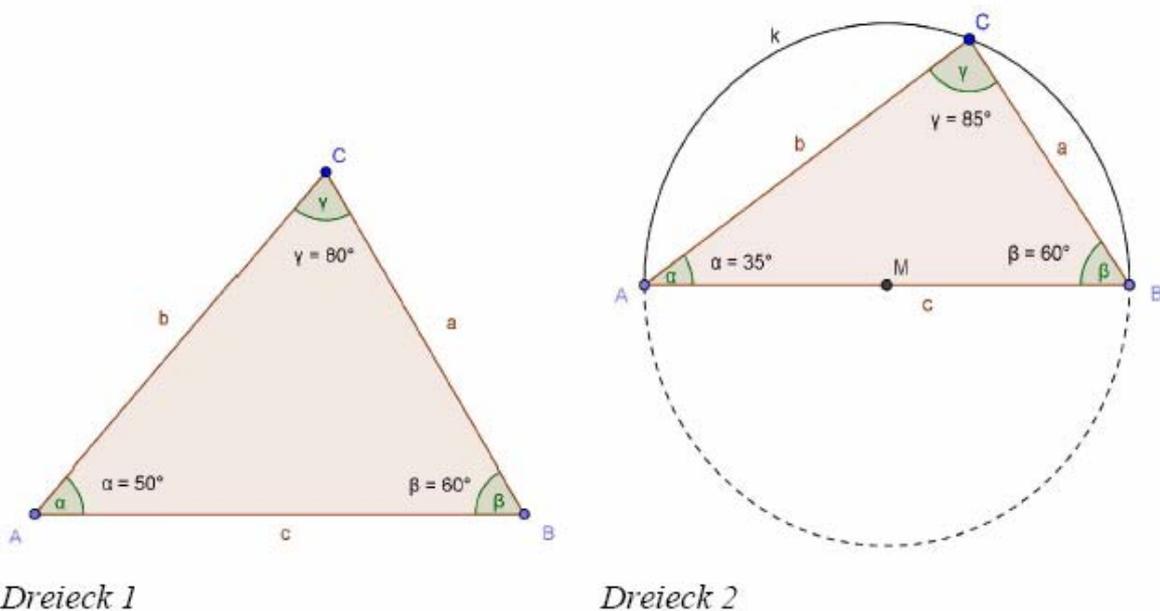
Kritisches Betrachten, Erkennen und Korrigieren von Fehlern

Vermuten, Begründen und Beweisen



Im Weiteren wollen wir uns genauer mit Dreiecken und den merkwürdigen Punkten im Sinne von Vermuten, Begründen und auch Beweisen beschäftigen. Damit du einen kleinen Vorgeschmack auf die Vorgangsweise bekommst, sollst du das Begründen und Beweisen an zwei (vielleicht schon bekannten) Beispielen kennen lernen. Du kannst dir aussuchen, welches Problem du bearbeiten möchtest:

Schau dir die folgenden beiden Abbildungen an. Was fällt dir bei den Dreiecken auf? Ist alles richtig? Was könnte falsch sein? Warum? Notiere deine Vermutung im Heft!



Wähle ein Dreieck aus und bearbeite das Problem weiter. Verwende dazu die Links zu **Dreieck 1** oder **Dreieck 2**.

Abbildung 2: Arbeitsblatt

Exaktifizieren und Beweisen

Dreieck 2: Thaleskreis

Thales von Milet war ein wichtiger griechischer Mathematiker. Er zählt zu den „Sieben Weisen“ des antiken Griechenland und lebte um 600 vor Christus in Milet, einem Ort an der Westküste Kleinasiens.

Quelle Bild: www.anderegg-web.ch/phil/thales-de-milet.jpg



Thales hat einen wichtigen Satz für rechtwinkelige Dreiecke entdeckt: den Satz vom Thales. Kannst du dich noch vom Unterricht her daran erinnern?

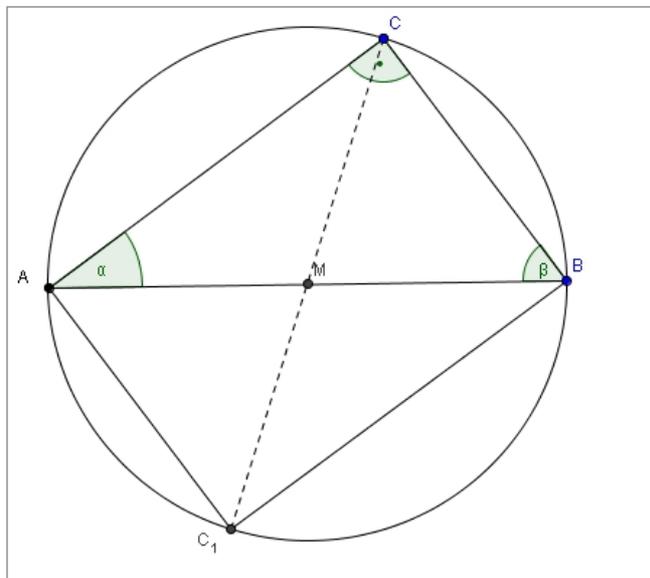
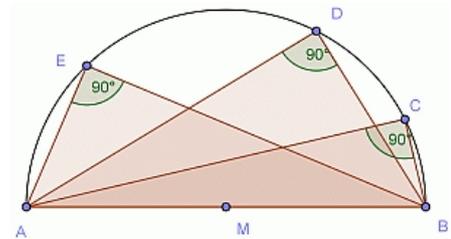
Thales hat herausgefunden:

Liegt eine Ecke eines Dreiecks auf dem Halbkreis über der gegenüber liegenden Seite, so hat der entsprechende Winkel eine Größe von 90° .

Aber: Warum ist das so?

Warum sind alle Winkel über einem Halbkreis (siehe Abbildung) rechte Winkel? Warum funktioniert das in jedem beliebigen Halbkreis?

Thales von Milet wird nicht nur die Entdeckung dieser Eigenschaft – des Satzes von Thales – sondern auch deren Beweis zugeschrieben. Ein Beweis ist nicht die Beschreibung einer Eigenschaft, ein Beweis zeigt die Allgemeingültigkeit eines Satzes durch logisches Argumentieren, Folgern und Schließen.



Vielleicht ist Thales auf seinen Lehrsatz gekommen, indem er sich die Diagonalen des Rechtecks genau angeschaut hat.

Überlege: Welche Eigenschaften haben die Diagonalen eines Rechtecks und wie folgt dann der Satz von Thales?

Verwende das links stehende dynamische Arbeitsblatt und führe folgende Aufgaben aus:

- Fasse mit der Maus den Punkt C an und ziehe ihn mit gedrückter linker Maustaste, beobachte dabei die Größe der Winkel - vor allem des Winkels γ . Der Punkt C bewegt sich nur auf der Kreislinie. Wenn du den Punkt B ziehst kannst du auch den Radius des Kreises verändern.
- Wie ist in diesem dynamischen Arbeitsblatt der Satz von Thales veranschaulicht?

- Diese Beweisidee wird in [diesem Applet](#) verwendet - der Beweis ist aber nicht zu Ende durchgeführt. Notiere im Heft die Weiterführung des Beweises.

Abbildung 3: Ausschnitt aus der Arbeitsanleitung

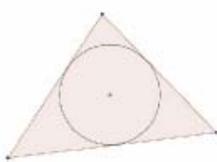
Kritisches Betrachten, Erkennen und Begründen von Fehlern

Arbeitsblatt 3: Was beim Konstruieren des Inkreises zu beachten ist?

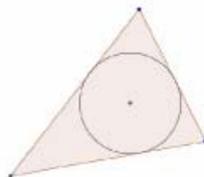
Name(n):

Du weißt, dass der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks als Schnittpunkt der Winkelsymmetralen der drei Winkel des Dreiecks konstruiert wird.

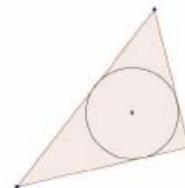
Für deine Untersuchungen stehen dir fünf Dynamische Arbeitsblätter „Inkreis1“ bis „Inkreis5“ zur Verfügung. Beim Erstellen der Dateien sind aber mehrere Fehler passiert – nur eine einzige Darstellung ist fehlerfrei. Welche ist es? Du sollst jeweils herausfinden, ob der Inkreis richtig konstruiert wurde, und wenn nicht, was genau falsch gemacht wurde. Beobachte genau und dokumentiere deine Vermutungen. Fasse zum Schluss deine Erkenntnisse in Form eines freien Aufsatzes mit deinen eigenen Worten möglichst umfassend und strukturiert zusammen.



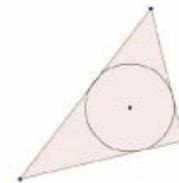
„Inkreis1.html“



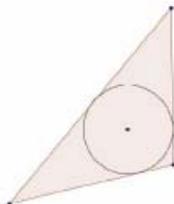
„Inkreis2.html“



„Inkreis3.html“



„Inkreis4.html“



„Inkreis5.html“

Auf den ersten Blick stellst du fest, dass sich die einzelnen Bilder kaum voneinander unterscheiden. Jedes der fünf Bilder zeigt dir ein Dreieck mit seinem Inkreis.

- Aber welche der fünf Dateien zeigt die richtige Konstruktion?
- Wie kannst du das feststellen?
- Wo steckt bei den anderen vier Konstruktionen jeweils der Fehler?
- Gibt es Dreiecke in denen der Inkreismittelpunkt außerhalb des Dreiecks liegt?
- Welche Eigenschaften hat eigentlich der Inkreis?

Beschreibe in einem Kurzaufsatz, was du heute über den Inkreismittelpunkt gelernt hast! Was musst du dabei besonders beachten? Warum?

Abbildung 4: Arbeitsblatt - Inkreismittelpunkt

Inkreis2

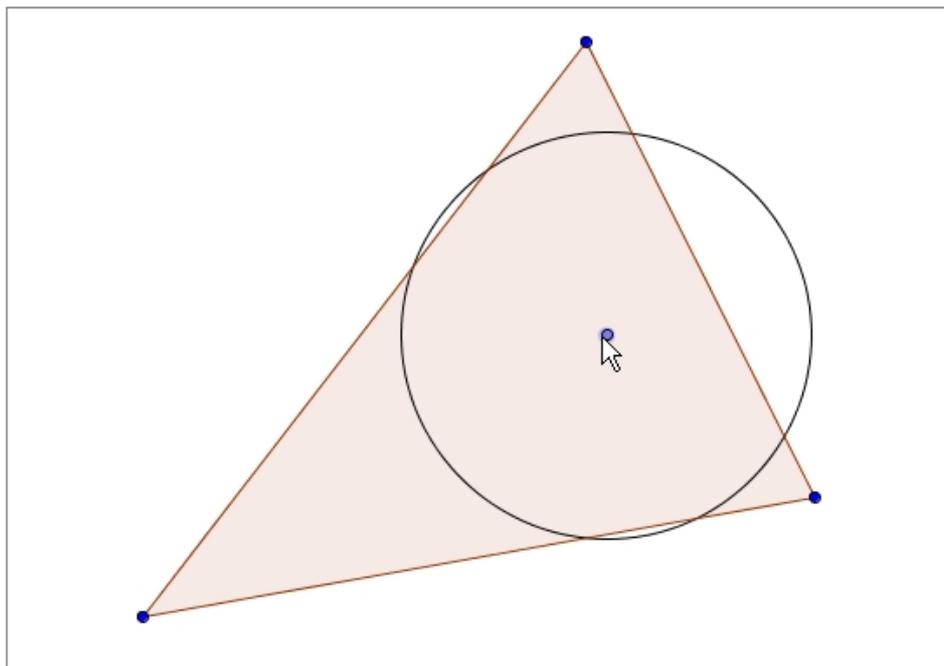


Abbildung 5: Inkreis? - Leider doch nicht!

4. Drehbuch / Drehbücher – Methodisch-didaktische Anleitungen

4.1. Unterrichtsorganisation – Arbeitsanweisungen für Schüler/innen

Die Anleitungen für das Arbeiten mit diesem Lernpfad sind vom Lehrer / der Lehrerin für die Schüler/innen selbst zu formulieren und lassen einen großen Freiraum für selbsttätiges Arbeiten zu.

4.2. Anleitungen für Lehrer/innen

Möglicher Ablauf

1. Stunde

Die erste Stunde ist geteilt in zwei Abschnitte (je nach Schnelligkeit der Schülerinnen und Schüler).

- Der erste Abschnitt (Arbeitsblatt Symmetralen) dient dem „Wiederbewusstmachen“ der Eigenschaften von Winkel- und Seitensymmetralen anhand interaktiver Applets sowie dem Wiederholen der Konstruktion und der Eigenschaften der Merkwürdigen Punkte in einem allgemeinen Dreieck anhand eines interaktiven Quizes.
- Der zweite Abschnitt (Arbeitsblatt Winkelsumme – Thales) soll die Schüler zum kritischen Denken führen, wobei speziell die Winkelsumme im Dreieck als auch der Thaleskreis angesprochen werden. Beide Themen sollten im Unterricht bereits

behandelt worden sein und können hier noch einmal vom Schüler selbständig auf verschiedenen „Verstehensniveaus“ untersucht werden. Es ist dem Schüler freigestellt, welches der beiden Themen er behandeln möchte. Er wird in beiden Fällen zum Vermuten, Begründen und Beweisen mit Hilfe dynamischer Applets geführt.

Hinweis: Natürlich können die einzelnen Abschnitte und Themen auch getrennt voneinander in eigenen Stunden bearbeitet werden.

2. und 3. Stunde

In diesen beiden Stunden sollen die Schüler mit geführten Forschungsaufträgen Fragen zur Lage der einzelnen merkwürdigen Punkte bearbeiten und auch beantworten. Dafür stehen fertige (Geogebra) Applets zur Verfügung, in denen der Schüler Dreiecke durch Ziehen der Eckpunkte dynamisch verändern kann. Dabei soll die Lage der merkwürdigen Punkte genau beobachtet und für Spezialfälle begründet werden. In Einzelfällen und als Erweiterung für sehr gute Schüler wird auch auf eine Beweismöglichkeit eingegangen.

Es stehen jeweils eigene Forschungsaufträge mit Arbeitsblättern getrennt für U, H, S und I zur Verfügung, die unabhängig voneinander zum Beispiel in einer Stunde von verschiedenen Schülergruppen bearbeitet werden können. Es ist aber darauf zu achten, dass sich die Schüler ihr Thema selbst aussuchen, dass aber jedes Thema von zumindest zwei Gruppen bearbeitet wird.

In der nächsten Stunde sollten dann die Ergebnisse präsentiert werden. Hier wäre es günstig, wenn alle Experten für z. B. den Höhenschnittpunkt gemeinsam die Fragestellungen und Ergebnisse der letzten Stunde noch einmal durcharbeiten und dann überlegen was wie am besten präsentiert wird. Die Präsentationen der einzelnen merkwürdigen Punkte könnten unter Verwendung der vorgegebenen Applets über Beamer erfolgen.

So bilden sich in der Klasse Expertengruppen für die einzelnen Punkte, die dann als Tutoren für die anderen wirken. Die Schüler helfen sich gegenseitig.

Als Richtlinie für die Zeiteinteilung könnten etwa 15 Minuten für die Vorbereitung in den vier verschiedenen Expertengruppen und etwa je 5 Minuten für die vier Präsentationen dienen.

(Für das Arbeitsblatt zum Umkreis, könnte auf den zweiten Abschnitt der ersten Stunde – Thaleskreis - zurückgegriffen werden.)

4. Stunde

In diesem Abschnitt wird die Eulersche Gerade behandelt. Dieses Thema könnte wieder von allen Schülern bearbeitet werden. Natürlich setzt dies voraus, dass die merkwürdigen Punkte H, S und U bereits vom Schüler selbst behandelt oder auch von den Expertengruppen präsentiert worden sind.

5. Ergebnisse der internen Evaluation

Fragestellungen zum didaktischen/methodischen Kommentar

Der Lernpfad dient zum Üben und Vertiefen. Die Lernziele und Lerninhalte werden nur überblicksartig angeführt. Nicht alle technischen Voraussetzungen werden angeführt (z.B. Internet).

Ein detaillierter Arbeitsplan für Schüler/innen wird nicht angeboten. Die Anleitungen im möglichen Stundenablauf (der im Lernpfad integriert ist) sind lernzielorientiert formuliert und gut verständlich.

Fragestellungen zum Lernpfad

Bereits vor der Durchführung des Lernpfads eingeführte Begriffe werden präzisiert und die Schüler/innen werden zum Beweisen angeregt.

Die Schüler/innen werden dazu angehalten ihren Lernprozess in Form von Kurzaufsätzen zu dokumentieren und zu präsentieren.

Die notwendigen methodischen Vorkenntnisse sind vielschichtig, werden aber im Lernpfad oder didaktischen Kommentar nicht angeführt bzw. erklärt. Das methodische Vorwissen muss durch den Lehrer/ die Lehrerin geschehen. Der Lernpfad bietet

Differenzierungsmöglichkeiten. Zusatzaufgaben und Erweiterungsmöglichkeiten sind vorhanden.

Die Navigation sollte überarbeitet werden (Nummerierung der Arbeitsblätter, Positionierung der Links, Gliederung der Menüleiste).

Festigung des Wissens – Wissensüberprüfung

Möglichkeiten zur Selbstkontrolle sind spärlich vorhanden. Hinweise zur Leistungsmessung und Leistungsbeurteilung fehlen.

6. Äußere Evaluation / Feedback der Schüler/innen

Dieser Abschnitt fasst die Rückmeldungen von 63 Schüler/innen zusammen.

Die Schüler/innen arbeiten im Mathematikunterricht selten in Gruppen, aber regelmäßig in Partnerarbeit. Das Arbeiten am Computer ist für die Schüler/innen ungewohnt. Trotzdem bewerten sie ihre Computerkenntnisse als hoch.

Mit der Navigation hatten die Schüler/innen keine Probleme. Das Layout gefiel 65%. Die Sprache im Lernpfad empfanden die Schüler/innen nicht zur Gänze aber doch größtenteils verständlich.

Die interaktiven Übungen unterstützen das Verstehen. Fast alle Schüler/innen möchten wieder mit einem Lernpfad arbeiten. Die Schüler/innen haben das Gefühl den Großteil der mathematischen Lerninhalte verstanden zu haben.

Der Großteil der Schüler/innen meint, dass sie die Möglichkeit hatten über mathematische Inhalte mit anderen zu sprechen (auch das Verstehen der mathematischen Inhalte sowie das gegenseitige Helfen wird als wichtig und möglich angesehen).

75% der Schüler/innen hatten die Gelegenheit über mathematisches Tun nachzudenken (siehe Abbildung 6). Allerdings hatte nur die Hälfte der Schüler/innen das Gefühl, dass ihre eigenen Gedanken berücksichtigt wurden (siehe Abbildung 7). 85% der Schüler/innen gaben an, dass sie für ihren Lernfortschritt und den Lernprozess selbst verantwortlich waren.

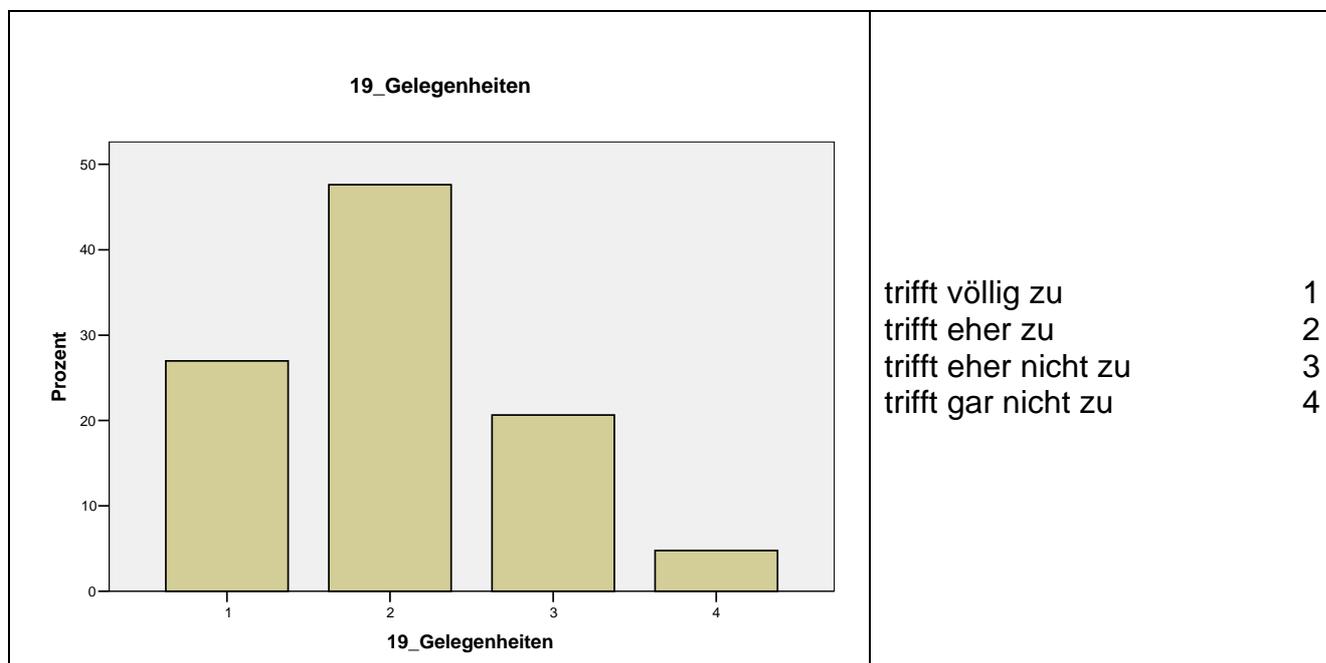


Abbildung 6: Beim Bearbeiten des Lernpfades gab es Gelegenheiten, über das mathematische Tun nachzudenken.

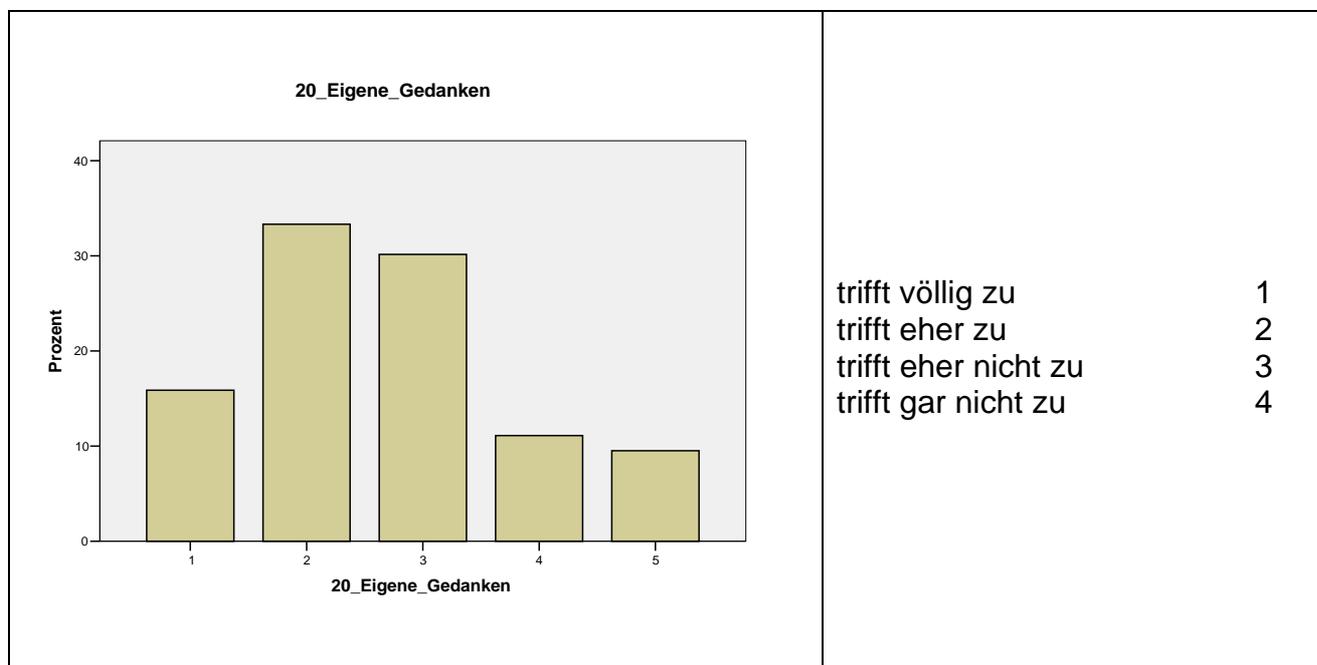


Abbildung 7: Meine eigenen Gedanken wurden beim Erarbeiten der Inhalte dieses Lernpfades berücksichtigt.

65% der Schüler/innen haben mit Neugier, Engagement sowie Lust am Denken und mathematisches Tun den Lernpfad absolviert. Knapp 70% der Schüler/innen sind mit dem Lernpfad zufrieden. Manche Schüler/innen klagten über Zeitnot und komplizierte Texte!

7. Überblick über den Erstellungsprozess

Als Schwerpunkt des Lernpfades wurde nicht die Einführung, sondern die Wiederholung und Vertiefung der Kenntnis der merkwürdigen Punkte und besonderer Eigenschaften des Dreiecks gewählt.

Die Ergebnisse einer Internet-Recherche zum Thema Merkwürdige Punkte waren vielfältig. Einige Materialien konnten geeignet in den Lernpfad eingebunden werden. Daher mussten nur einige Ressourcen neu erstellt werden (z.B. Quiz, Dynamische Arbeitsblätter). Für die Planung des Lernpfades und seine didaktische Aufbereitung waren zwei Treffen notwendig, die Materialienerstellung erfolgte arbeitsteilig. Eine ursprüngliche Navigation wurde auf Grund von Rückmeldung bei der Pilottest-Phase den anderen Lernpfaden angepasst.

Medienvielfalt
im **Mathematikunterricht** 

Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

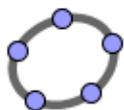
Medienvielfalt im Mathematikunterricht

TEIL 4

LERNPFAD PYTHAGORAS

7. Schulstufe

Hollabrunn, Dezember 2006



GeoGebra



Eine Galerie multimedialer Lernhilfen

mathe online für Schule, Fachhochschule,
Universität und Selbststudium

Lernpfad: Pythagoras

7. Schulstufe

Autoren/innen: Mag. Evelyn Stepancik

1. Motivation – Warum wurde das Thema gewählt?

Zum einen wurde das Thema gewählt, weil es für die dritte Klasse und weitere von großer Bedeutung ist, zum anderen sollten in diesem Lernpfad möglichst viele, gute interaktive Lernhilfen, die bereits im Internet vorhanden waren, zusammengestellt werden. Zudem sollte die Arbeit mit diesem Lernpfad den Schülerinnen und Schülern möglichst viele unterschiedliche Medien, aber auch das haptische Erleben gewährleisten.

2. Didaktischer Kommentar

Der Lernpfad wurde zum selbstständigen Erarbeiten der Inhalte konzipiert. Besonderes Augenmerk wurde auf die Verbindung von interaktiven Lernhilfen / Lernobjekten, Dynamischer Geometrie und traditionellen Medien (Buch, Heft, Papier, Schere, etc.) gelegt. Der Lernpfad gibt die Organisation des Unterrichts nicht genau vor.

Nach Absolvierung des Lernpfades sollen die Schüler/innen den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen nutzen können und eine Begründung für den Lehrsatz des Pythagoras verstehen können.

Kurzinformation	
Schulstufe	7. Schulstufe (3. Klasse AHS / HS)
Dauer	8 - 10 Unterrichtsstunden
Unterrichtsfächer	Mathematik, Informatik, Geschichte
Verwendete Medien	DGS (Geogebra), Internet, eventuell Plattform
Technische Voraussetzungen	Java, eventuell Plattform
Autorin	Evelyn Stepancik

Technische Voraussetzungen:

Umgang mit dem Internet, einer Lernplattform, Geogebra und mit einer Präsentationssoftware

Fachliche Voraussetzungen:

rechtwinkelige Dreiecke, Flächeninhalte von ebenen Figuren, Umgang mit Variablen und Gleichungen

Methodische Voraussetzungen:

- Partnerarbeit, Gruppenarbeit, Rollenspiel, Rollenchat
- Informationen selbstständig schriftlich festhalten können
- Ergebnisse präsentieren können

Verlaufsplan/Prozesshinweise

Einstieg

- Internetrecherche und Präsentation zum Leben des Pythagoras (Einzelarbeit)
- Quiz (Einzelarbeit)
- Rollenchat (Gruppenarbeit): Dieser Schritt war speziell für die Verwendung der Plattform konzipiert und sollte den SchülerInnen eine kreative Auseinandersetzung mit der Zeit und dem Leben von Pythagoras ermöglichen.

Neuigkeiten

- geschichtlicher Zugang: Nachvollziehen des Seilspanner-Problems (Partnerarbeit)
- Herleitung des Satzes von Pythagoras in kleinen Lernschritten mit Anleitung und Videoanimation (Partnerarbeit)
- Anwendung in einfachen Aufgabenstellungen und Einführung der Wurzel (Einzel- oder Partnerarbeit)
- einfache Textaufgaben (Partnerarbeit)
- Quiz zur Festigung der neu erlernten Begriffe (Einzelarbeit)
- Beweise: Hier wurde bewusst die Kombination Internet und Papier gewählt. Die interaktiven Darstellungen sollten den SchülerInnen ein leichteres Nachvollziehen der Beweise ermöglichen. Zudem sind diese Beweise ständig abrufbar und ihr Ablauf ständig nachvollziehbar, dies ist im Heft (am Papier) so nicht möglich, da zum Beispiel die aufgeklebten Dreiecke den Werdegang der Darstellung nicht mehr zeigen. (Partnerarbeit)
- Anwendung des Pythagoras in ebenen Figuren

Herausforderungen

- Pythagoräische Tripel (Wahlaufgabe)
- Pythagorasbäume (Wahlaufgabe)

Lerninhalte, Methoden und Lernziele

Lerninhalt	Lernziel
Geschichte und Leben von Pythagoras	Persönlichkeiten der Mathematikgeschichte kennen lernen
Herleitung des Satzes von Pythagoras	Geometrische Darstellungen deuten können, Vermutungen anstellen und formulieren können
Beweise für den Satz des Pythagoras	eine Begründung für den Lehrsatz des Pythagoras verstehen können, geometrische Darstellungen interpretieren können
Anwendungen in einfachen Aufgabenstellungen	den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren nutzen können, Variablen als Mittel zum Beschreiben von Sachverhalten und zum Lösen von Problemen verwenden können
Pythagoreische Tripel und Pythagorasbäume	Definitionen und Konstruktionsanleitungen verstehen und damit arbeiten können

Kombination der Medien

Im vorliegenden Lernpfad wird versucht, verschiedene Medien (PC, Heft, Buch, ...) zu kombinieren. Gerade grundlegende geometrische Begriffe müssen auch durch ein haptisches Erleben begriffen werden.

Lernmedien der Schüler/innen

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten bei diesem Lernpfad nicht nur mit dem PC, sondern auch mit einem Seil (Seilspanner), mit Arbeitsblättern und dem Buch.

Leistungsbeurteilung

Bei diesem Lernpfad gibt es verschiedenste Möglichkeiten der Leistungsbeurteilung. Das Arbeiten an den einzelnen Aufgabenstellungen kann im Rahmen der Mitarbeit bewertet werden. Die Präsentation (Leben von Pythagoras) kann je nach Bedarf und Durchführung einen unterschiedlich hohen Stellenwert haben.

3. Vorteile des Medieneinsatzes – exemplarische Beschreibung der Materialien

Der Vorteil des Medieneinsatzes liegt bei diesem Lernpfad sicherlich in der Möglichkeit, die Herleitung des Satzes von Pythagoras mit einem Video selbst zu erleben und das, so oft die Schülerin bzw. der Schüler es braucht.

Ferner werden drei interaktive Beweise mit dem haptischen Erleben und dem Nachvollziehen auf Papier vorgestellt. Auch hier können die Schülerinnen und Schüler einzelne Denk- und Lernschritte beliebige oft wiederholen.

Video zur Herleitung des Satzes von Pythagoras – Vermuten – Begründen

Medienvielfalt
im Mathematikunterricht

Medienvielfalt im Mathematikunterricht

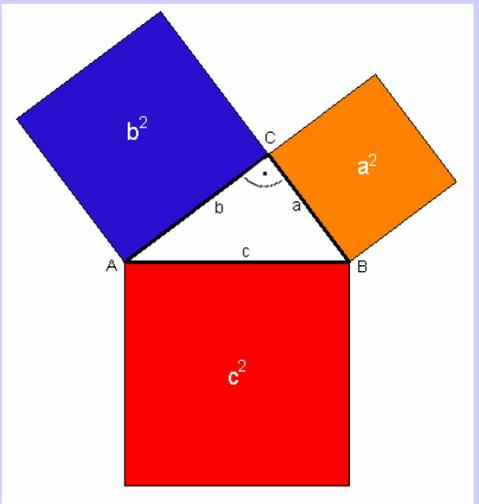
Der Satz von Pythagoras - Idee

Pythagoras
Leben von Pythagoras
Seilspanner
Satz von Pythagoras
Idee
Lösung
Übungen
Beweise
Zahlentripel
Pythagorasbäume
Anwendungen in
ebenen Figuren
Abschluss

Eine Kooperation von
ACDCA
GeoGebra
mathe online

Unterstützt vom
bm.bwk

- Schau dir das **Video** (ACHTUNG 9MB) genau an!
Die Idee dazu stammt von vs-kleinheubach schaarschmidt/seit.
- Schreib auf, was du siehst!
- Versuche den Sachverhalt mithilfe von Variablen zu formulieren, dann hast du bereits den Satz von Pythagoras!



Beweise erleben – verstehen

Medienvielfalt
im Mathematikunterricht >

- Pythagoras
- Leben von Pythagoras
- Seilspanner
- Satz von Pythagoras
- Übungen
- Beweise
 - Beweis 1**
 - Beweis 2
 - Beweis 3
- Zahlentripel
- Pythagorasbäume
- Anwendungen in ebenen Figuren
- Abschluss

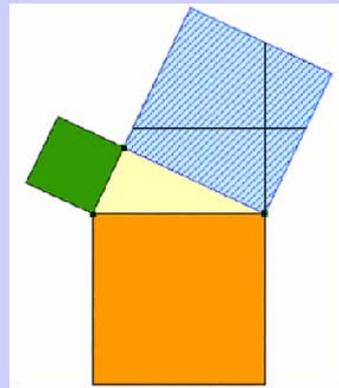
Eine Kooperation von
ACDCA
GeoGebra
mathe online

Unterstützt vom
bm:bwk

Medienvielfalt im Mathematikunterricht

Beweis 1

Bei diesem Beweis musst du die kleineren Quadrate aus- und zerschneiden und danach so ins große Quadrat legen, dass es gefüllt ist.



Drucke dir das **Arbeitsblatt** aus!



Schneide aus der grauen Figur die beiden kleineren Quadrate aus!
Das größere dieser zwei bereits ausgeschnittenen Quadrate zerschneide nun entlang der eingezeichneten Linien!

Lege die vier Teile dieses Quadrats und das kleine Quadrat so in das orange Quadrat, dass es gefüllt ist!

Schreib auf, was du mithilfe dieses „Puzzles“ gezeigt hast!

Formuliere erst mit Worten, dann mit Variablen!

Interaktiv findest du diesen Beweis auf der Website: <http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pytha2/pytha2.html>

Spielerische Anwendungen des Satzes

Medienvielfalt
im Mathematikunterricht >

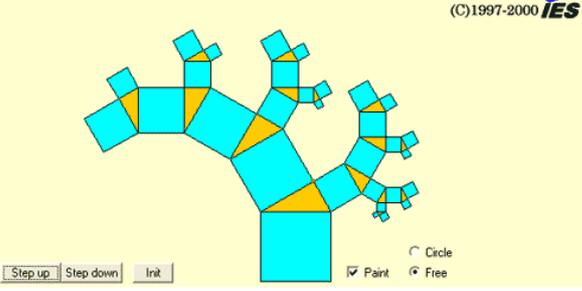
- Pythagoras
- Leben von Pythagoras
- Seilspanner
- Satz von Pythagoras
- Übungen
- Beweise
- Zahlentripel
- Pythagorasbäume
 - Baum 1**
 - Baum 2
- Anwendungen in ebenen Figuren
- Abschluss

Eine Kooperation von
ACDCA
GeoGebra
mathe online

Unterstützt vom
bm:bwk

Medienvielfalt im Mathematikunterricht

Pythagorasbaum 1



(C)1997-2000 IES

Step up Step down Init Paint Free

Auf der Website <http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pytree/pytree.html> siehst du, wie so ein Baum entsteht!
Zeichne selbst auf einem Blatt oder mit einer dynamischen Geometriesoftware so einen Baum!

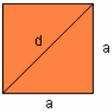
Vom Einfachen zum Komplexen

Medienvielfalt
im Mathematikunterricht >

- Pythagoras
- Leben von Pythagoras
- Seilspanner
- Satz von Pythagoras
- Übungen
- Beweise
- Zahlentripel
- Pythagorasbäume
- Anwendungen in ebenen Figuren
- Rechteck
- Quadrat**
- Gleichschenkeliges Dreieck
- Trapez
- Deltoid
- Abschluss

Medienvielfalt im Mathematikunterricht

Quadrat



Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a !

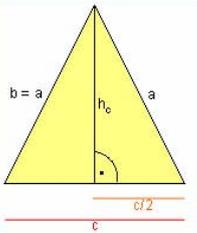
- Gib eine Formel für die Diagonale des Quadrats an!
- Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 7 \text{ cm}$!
- Berechne die Diagonale und vergleiche das Ergebnis mit deiner Zeichnung!

Löse die Aufgabe mithilfe von Geogebra!

Medienvielfalt
im Mathematikunterricht >

- Pythagoras
- Leben von Pythagoras
- Seilspanner
- Satz von Pythagoras
- Übungen
- Beweise
- Zahlentripel
- Pythagorasbäume
- Anwendungen in ebenen Figuren
- Rechteck
- Quadrat
- Gleichschenkeliges Dreieck**
- Trapez

Medienvielfalt im Mathematikunterricht



- Wenn c und h_c gegeben sind, kann a berechnet werden!

$$a^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

- Wenn a und h_c gegeben sind, kann c berechnet werden!

$$a^2 - h_c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

- Wenn a und c gegeben sind, kann h_c berechnet werden!

$$a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = h_c^2$$

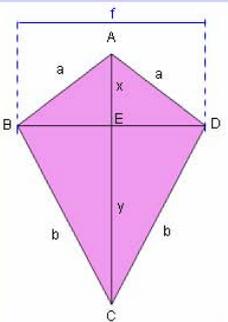
In deinem Schulbuch findest du sicher einige Beispiele zur Anwendung des Pythagoras in gleichschenkeligen Dreiecken.

Medienvielfalt
im Mathematikunterricht >

- Pythagoras
- Leben von Pythagoras
- Seilspanner
- Satz von Pythagoras
- Übungen
- Beweise
- Zahlentripel
- Pythagorasbäume
- Anwendungen in ebenen Figuren
- Rechteck
- Quadrat
- Gleichschenkeliges Dreieck
- Trapez
- Deltoid**
- Abschluss

Medienvielfalt im Mathematikunterricht

Die Diagonalen teilen das Deltoid in 4 rechtwinklige Dreiecke.



- Je zwei Dreiecke sind kongruent.
- $ABE = ADE$
 $BEC = DEC$
- Der Schnittpunkt der Diagonalen halbiert die Diagonale f , jedoch nicht e !
- Überlege, wie du den Satz von Pythagoras in den 4 Dreiecken anwenden kannst!
- Welche Beziehung gilt für x , y und e ?
- Schreib deine Überlegungen mit Worten und Variablen auf!

In den Dreiecken BAE und AED gilt:

- a ist die Hypotenuse
- x und $f/2$ sind die Katheten
- $a^2 = x^2 + (f/2)^2$

In den Dreiecken BEC und DEC gilt:

- b ist die Hypotenuse
- y und $f/2$ sind die Katheten
- $b^2 = y^2 + (f/2)^2$

Übung 1:
Von einem Deltoid sind die Längen der Seiten $a = 10$, $b = 17$ und die Länge der Diagonale $f = 18$ bekannt. Berechne die Länge der Diagonalen e und den Flächeninhalt des Deltoids.

Übung 2:
Von einem Deltoid sind die Länge der Seite $a = 13$ und die Längen der Diagonalen $e = 14$ und $f = 24$ bekannt. Berechne die Länge der Seite b und den Flächeninhalt des Deltoids.

4. Drehbuch / Drehbücher – Methodisch-didaktische Anleitungen

4.1. Unterrichtsorganisation – Arbeitsanweisungen für Schüler/innen

Die Arbeitsanweisungen für die Schülerinnen und Schüler sind direkt in den Lernpfad integriert, wie beispielsweise der folgende Screenshot zeigt.

Medienvielfalt im Mathematikunterricht

Abschluss

Nun hast du viel über den Satz von Pythagoras und seine Anwendungen in ebenen Figuren gelernt.

Erstelle zwei Merkblätter:

- Satz von Pythagoras
- Anwendungen des Satzes von Pythagoras

Suche dir aus deinem Schulbuch drei Textaufgaben zum Satz des Pythagoras.
Löse diese Aufgaben in Partnerarbeit!
Überprüfe deine Lösung mithilfe von Zeichnungen bzw. Skizzen!
Verwende dafür auch Geogebra!

Eigene Aufgaben erfinden

Erfindet in Partnerarbeit selbst zwei Beispiele, bei deren Lösung der Satz von Pythagoras anzuwenden ist.
Löst die Aufgaben!
Präsentiert die Beispiele und den Lösungsweg vor der Klasse!
Veröffentlicht eure Aufgaben und Lösungswege eventuell in eurer Plattform!

Ein letztes **Quiz!**

Pythagoras
Leben von Pythagoras
Seilspanner
Satz von Pythagoras
Übungen
Beweise
Zahlentripel
Pythagorasbäume
Anwendungen in ebenen Figuren
Abschluss

Eine Kooperation von
ACDCA
GeoGebra
mathe online

Unterstützt vom
bm:bwk

4.2. Anleitungen für Lehrer/innen

Der Satz von Pythagoras und seine Anwendung in der Ebene eLearning-Sequenz

Das gesamte **eLearning-Material** ist auf:

<http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/pythagoras3/lernpfad/index.htm> oder <http://www.informatix.at/pythag/> zu finden.

Der Lernpfad kann als Stationenbetrieb oder als „reine“ eLearning-Sequenz, in der die Schüler/innen ihr neu erworbenes Wissen selbstständig dokumentieren (händisch oder mit dem Computer), durchgeführt werden.

Bei Verwendung einer Lernplattform können Schüler/innen ausgewählte Ergebnisse dort veröffentlichen.

Vorschläge für Pflichtaufgaben:

1. Seilspanner (Seil oder Schnur in den Unterricht mitbringen!)
2. Satz von Pythagoras (Herleitung)
3. Übungen
4. Beweis 1
5. Anwendung in ebenen Figuren (Lösungen müssen von den Lehrenden vorbereitet werden)

Vorschläge für Wahlaufgaben:

1. Leben von Pythagoras
2. Beweis 2 und Beweis 3
3. Zahlentripel (eventuell Erweiterung durch CAS oder Tabellenkalkulation)
4. Pythagorasbäume
5. Abschluss (mit Lernplakaten und Quiz)

Zur Dokumentation empfiehlt sich das Anlegen einer Projektmappe, die von den Schüler/innen rechtzeitig abgegeben werden muss und nach folgenden Kriterien beurteilt werden kann:

- Vollständigkeit
- Ausführung
- Anzahl der Wahlaufgaben
- Gegebenenfalls – Präsentation zum Leben von Pythagoras
- Usw.

Bei Verwendung einer Lernplattform empfiehlt sich auch die Beurteilung der Schüler/innenaktivitäten innerhalb der Plattform.

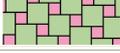
Zum Beispiel:

- Aktivität im Forum
- Hilfestellung für andere Schüler/innen
- Usw.

4.3. Weitere Materialien

Weitere 19 Applets zum Beweis. <http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pythagoras.html>

Pythagorean Theorem

 Pythagorean Theorem (1)	 Pythagoras Theorem(2)
 Pythagorean Theorem (3)	 Pythagorean Theorem (4)
 Pythagoras Theorem(5)	 Pythagorean Theorem(6)
 Pythagorean Theorem(7)	 Pythagoras Theorem(8)
 Pythagorean Theorem (9)	 Hippocrates' lunar
 Minimum Distance	 Shortest Distance

5. Ergebnisse der internen Evaluation

5.1. Zum didaktisch-methodischen Kommentar

Der Lernpfad enthält alles: Erarbeiten neuer Inhalte, üben und vertiefen. Neben heuristischen Phasen ist Beweisen ein Schwerpunkt. Dazu gibt es mehrere Angebote. Der didaktische Kommentar vermittelt den Lehrer/innen eine gute Vorstellung vom Lernpfad. Lehrer/innen werden über das technologische Umfeld informiert, es gibt jedoch keine Anleitungen. Ansatzweise bestehen Verknüpfungen zum Schulbuch.

Es gibt eine rudimentäre Anleitung für einen Stationenbetrieb mit Vorschlägen für Pflicht- und Wahlaufgaben. Für die E-Learning-Sequenz gibt es ein allgemeines Drehbuch für die Lehrerin bzw. den Lehrer. Es gibt Vorschläge für Präsentationen und die Einbindung einer Lernplattform sowie zur Leistungsmessung und -beurteilung.

In den methodischen Vorschlägen werden keine Lernziele formuliert. Die Formulierungen in den methodischen Vorschlägen sind sehr offen, Pläne müssen von den Lehrer/innen selbst erstellt werden. Methodische Hilfestellungen werden immer wieder angeboten, z.B. zur Erstellung einer Präsentation.

5.2. Zum Lernpfad selbst

Begriffe werden konsistent und korrekt verwendet. Der Begriff „Wurzel“ sollte korrekterweise jedoch durch den Begriff „Quadratwurzel“ ersetzt werden. Mathematische Lernziele werden nur indirekt formuliert.

Es gibt vielschichtige Angebote für verschiedene Lerntypen (Ausnahme: hören). Im Abschnitt „Beispiele“ werden nur visuelle Typen angesprochen. Hier sollte mehr Vielfalt und Abwechslung erreicht werden.

Partnerarbeiten werden im Lernpfad angegeben. Bei der vorliegenden Version entscheiden die methodischen Anleitungen der Lehrer/innen, ob und wie über Mathematik gesprochen wird.

Es gibt heuristisch-experimentelle Phasen. Die Exaktifizierung wird im Lernpfad nicht ausreichend angeboten und muss, wenn gewünscht, vom Lehrer / von der Lehrerin methodisch unterstützt werden.

Vorwissen wird eher nicht aktiviert. Es werden verschiedenste Möglichkeiten zur Veranschaulichung genutzt. Wird in einer Aufgabenstellung eine Lernmethode verlangt, so wird das Vorwissen dazu auch aktiviert.

Hilfestellungen zur Bedienung von GeoGebra sollten ergänzt werden. Die Verwendung eines Computeralgebrasystems ist im Lernpfad derzeit noch nicht vorgesehen.

Differenzierungsmöglichkeiten sind vorhanden, die Organisation dieser obliegt jedoch dem Lehrer / der Lehrerin. Informationssuche kommt als Methode vor. Arbeitsauforderungen befinden sich direkt im Lernpfad.

5.3. Zur Festigung und Überprüfung von Wissen und Leistungsmessung

Material für Übungs- und Festigungsphasen ist ausreichend vorhanden. Hinweise für Hausübungen gibt es nicht.

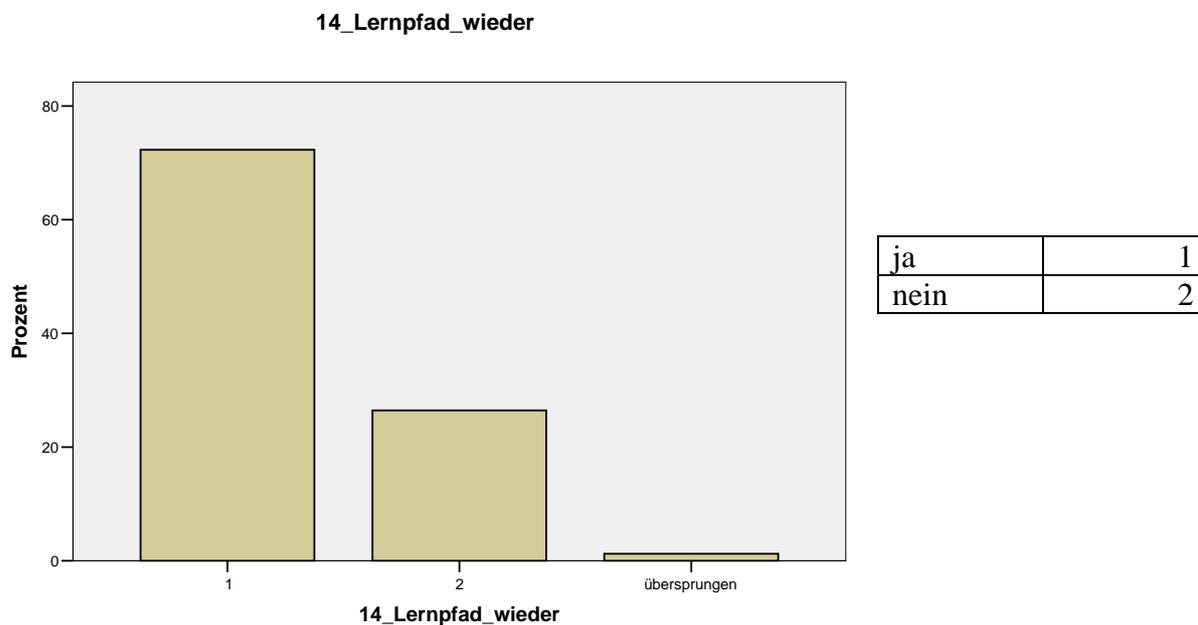
Wissenstests mit Selbstkontrolle sind vorhanden, jedoch ohne Vielfalt (nur 4 Fragen zum Ankreuzen). Zu vielen Aufgaben gibt es keine Lösungen.

6. Äußere Evaluation / Feedback der Schüler/innen

Es gibt 242 Rückmeldungen von Schülerinnen und Schülern aus 9 Klassen.

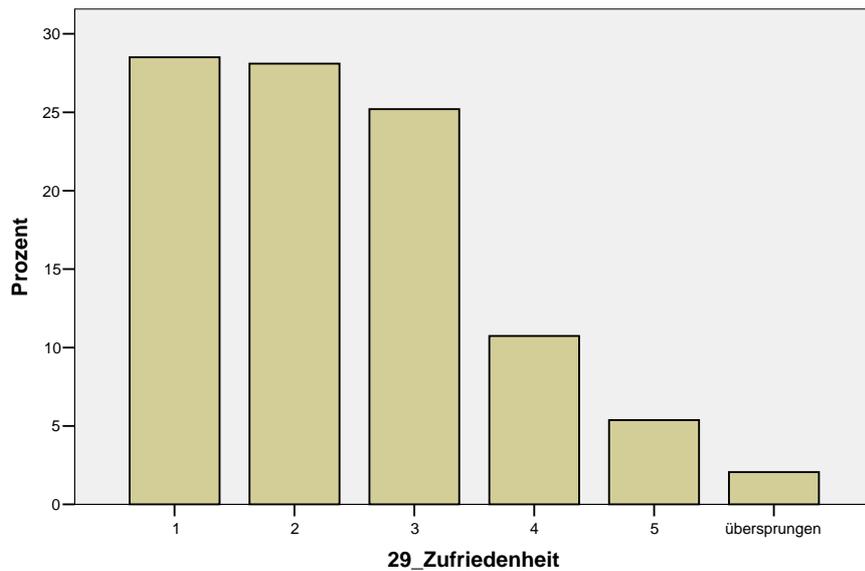
50% der Schülerinnen und Schüler geben an, regelmäßig mit einem programmierbaren Taschenrechner zu arbeiten. Dieses Ergebnis ist überraschend, da in der Unterstufe programmierbare Taschenrechner nur selten eingesetzt werden. Es liegt der Verdacht nahe, dass von den Schülerinnen und Schülern einfache Taschenrechner gemeint wurden (siehe offene Frage zu den Arbeitsmitteln).

75% geben an, dass sie gerne wieder im Mathematikunterricht mit einem Lernpfad arbeiten wollen:



Die Einschätzungen zu mathematischem Tun, Lernen mit Neugier, individuellem Lernen usw. sind überwiegend positiv und entsprechen dem Durchschnitt der gesamten Untersuchung.

Über 50% geben an, mit dem Lernpfad zufrieden gewesen zu sein.



sehr zufrieden	1
eher zufrieden	2
unentschieden	3
eher unzufrieden	4
sehr unzufrieden	5

Zu den interaktiven Übungen werden sehr oft die Beweise (gemeint scheinen die Animationen), der Pythagorasbaum, der Film zum Satz von Pythagoras genannt.

Schüler/innenzitate: „Der Kurzfilm hat mir dabei geholfen den Satz von Pythagoras zu verstehen.“

Positives Feedback:

Unter anderem werden genannt Quiz, Video, Animationen, Beweisen, Spiele, Präsentationen, Seilspanner.

„Mir hat gut gefallen, dass es Spaß macht und man trotzdem etwas dabei lernt.“

Negatives Feedback:

Unter anderem wird angegeben, dass Lösungen fehlen, Beweise werden als negativ empfunden (aber seltener als bei den positiven Rückmeldungen). Außerdem wird erwähnt, dass zu wenig Zeit war. Auch die Erklärungen waren manchen Schüler/innen nicht genau genug.

7. Überblick über den Erstellungsprozess

Für den Erstellungsprozess wurden erst einmal viele bereits im Internet vorhandene Materialien gesichtet und analysiert. Es musste weiters überlegt werden, welche Lernziele erreicht werden sollten. Dabei war vor allem wichtig, dass Schülerinnen und Schüler nach Absolvierung des Lernpfades mehr als das herkömmliche $c^2 = a^2 + b^2$ wissen und behalten sollen.

Im Anschluss an diese Materialsichtung erfolgte eine erste Grobplanung des Lernpfades. Weiters wurde versucht, auch auf die Arbeit mit Lernplattformen Rücksicht zu nehmen und derartige Aufgabenstellungen in den Lernpfad einzubetten. Diese mussten jedoch so allgemein formuliert sein, dass sie auf unterschiedlichen Plattformen realisierbar sind.

Da in diesem Lernpfad auch das Leben von Pythagoras eine Rolle spielt und die Schülerinnen bzw. Schüler auch etwas über ihn in Erfahrung bringen sollte, erfolgte eine Recherche zum benötigten Material. Im Anschluss daran musste das Material gesichtet und unter dem Aspekt – Verständlichkeit für Schülerinnen und Schüler – geordnet werden.

Der nächste Schritt bestand in der ersten Umsetzungsphase des Lernpfades. Danach folgten einige Überarbeitungen – vor allem auch des Layouts – zur Anpassung an das vom Medienvielfaltsprojekt verwendete.

Danach war zu überlegen, an welchen Stellen dynamische Geometrie Systeme einzubauen wären. Derzeit wird in einem Lernschritt GeoGebra verwendet und den Schülerinnen bzw. Schülern eine vorbereitete Datei zur Weiterarbeit zur Verfügung gestellt.

Ferner wurde überlegt CAS im Bereich der pythagoreischen Tripel einzubauen. Was bis dato aber noch nicht erfolgte. Es scheint so, als würde die doch in diesem kleinen Bereich recht aufwendige Handhabung des CAS den Einsatz an dieser Stelle nicht rechtfertigen.

Medienvielfalt
im **Mathematikunterricht** 

Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

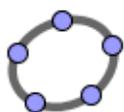
**Medienvielfalt im
Mathematikunterricht**

TEIL 4

**LERNPFAD
PYTHAGORAS IM RAUM**

8. Schulstufe

Hollabrunn, Dezember 2006



GeoGebra



Eine Galerie multimedialer Lernhilfen

mathe online

für Schule, Fachhochschule,
Universität und Selbststudium

Lernpfad: Pythagoras im Raum

8. Schulstufe

Autoren/innen: Anita Dorfmayr, Walter Klinger, Anton Nagl

1. Motivation – Warum wurde das Thema gewählt?

Ausgehend von dem schon vorhandenen Lernpfad *Pythagoras 3. Klasse* und einem Stationenbetrieb zum Thema Pythagoras mit E-Learning – Elementen (ebenfalls für die 3. Klasse) war eine Umsetzung in Form eines Lernpfades wünschenswert.

Der Lernpfad sowie drei didaktische Anleitungen für mögliche Umsetzungen im Unterricht wurden bereits im Rahmen des bm:bwk - Projektes CAV erstellt und erstmals getestet. Es fehlte eine Überarbeitung und Erweiterung, sowie ein didaktischer Kommentar.

2. Didaktischer Kommentar

Im Rahmen dieses Lernpfades sollen folgende Inhalte abgedeckt werden: Kennenlernen und Nachvollziehen verschiedener Beweise, Übungen zum räumlichen Vorstellungsvermögen, Anwendungen des Satzes von Pythagoras in Körpern (Prismen, Pyramiden, Oktaeder und Tetraeder), Herleiten des Katheten- und Höhensatzes

Kurzinformation	
Schulstufe	8. Schulstufe
Dauer	5 - 8 Stunden
Unterrichtsfächer	Mathematik
Verwendete Medien	Dynamische Geometrie Software (z.B. GeoGebra), Applets (Java, Flash), Internet
Technische Voraussetzungen	Java, Flash Player, Internet, eventual Lernplattform
Autoren	Anita Dorfmayr, Walter Klinger

Voraussetzungen

- Technische Voraussetzungen: GeoGebra (kostenlos von www.geogebra.at), Java (kostenlos von www.java.com), Internet, eventuell Lernplattform
- Vorwissen der SchülerInnen: Lehrsatz des Pythagoras und seine Anwendung in ebenen Figuren, Volumen von Prisma und Pyramide
- Technisches Vorwissen der SchülerInnen: elementarer Umgang mit dem Internet und einem DGS (z.B. GeoGebra), eventuell Umgang mit einem Forum in einer Lernplattform

Lerninhalte und Lernziele

Lerninhalt	Lernziel
Herleitung des Satzes von Pythagoras	Geometrische Darstellungen deuten können, Vermutungen anstellen und formulieren können
Beweise für den Satz des Pythagoras	eine Begründung für den Lehrsatz des Pythagoras verstehen können, geometrische Darstellungen interpretieren können
Anwendungen in einfachen Aufgabenstellungen	den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren nutzen können, Variablen als Mittel zum Beschreiben von Sachverhalten und zum Lösen von Problemen verwenden können
Anwendungen in komplexeren Aufgabenstellungen (Prisma, Pyramide, Oktaeder, Tetraeder)	den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in Körpern nutzen können, Variablen als Mittel zum Beschreiben von Sachverhalten und zum Lösen von Problemen verwenden können, eigene Lösungswege entwickeln können
Katheten- und Höhensatz	Vermutungen anstellen und mathematisch exakt formulieren können, mathematische Zusammenhänge begründen können, argumentieren und exaktes Arbeiten, Höhen- und Kathetensatz erklären und einen Beweis präsentieren können
Rechtwinkelige Dreiecke in Körpern	Rechtwinkelige Dreiecke in Prismen und Pyramiden mithilfe eines DGS einzeichnen können, räumliches Vorstellungsvermögen entwickeln
Basteln eines Oktaeder-Skeletts	Räumliches Vorstellungsvermögen entwickeln

Didaktischer Hintergrund

Der Lernpfad wurde zum selbstständigen Erarbeiten der Inhalte konzipiert. Besonderes Augenmerk wurde auf die Verbindung von interaktiven Lernhilfen / Lernobjekten, Dynamischer Geometrie und traditionellen Medien (Buch, Heft, Papier, Schere, etc.) gelegt. Für den Lernpfad wurden drei didaktische Konzepte (E-Learning, Stationenbetrieb, EVA-Lernspirale) entwickelt und erprobt.

Einsatz im Unterricht

Grundsätzlich wäre für ein effizientes Arbeiten pro Schüler/Schülerin ein PC notwendig; allerdings ist auch eine Partnerarbeit an einem Gerät bei entsprechender Abstimmung der Lerngeschwindigkeiten der beiden Partner durchaus möglich. Einzelne Module können auch ohne PC in der Klasse vorbereitet und / oder durchgeführt werden.

Verlaufsplan

Wo nicht anders angegeben, bleibt die Wahl der Sozialform den Schülerinnen und Schülern überlassen.

Die drei Phasen müssen in der angegebenen Reihenfolge absolviert werden. Die einzelnen Module einer Phase können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden.

Einstieg: Vorwissen / Voreinstellungen aktivieren

- Selfchecking Tests (Lückentexte, Zuordnungsübung)
- Lernprogramm zum Schließen individueller Wissenslücken

- Multiple Choice Quiz: Aufgabenstellungen zum Erkennen geometrischer ebener Figuren in räumlichen Situationen

Neuigkeiten: Neue Kenntnisse / Verfahrensweisen erarbeiten

- Katheten- und Höhensatz (Expertenmodell: Einzelarbeit – Partnerarbeit – Gruppenarbeit – Präsentation)
- Lernprogramm zur Anwendung des Satzes des Pythagoras in Pyramiden
- Dynamische Arbeitsblätter in einem DGS zur Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- Basteln eines Oktaeder-Skeletts (haptischer Zugang zur Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens)
- Anwendungsaufgaben mit Text

Herausforderungen: Komplexere Anwendungs- / Transferaufgaben

- DGS-Aufgabe: Errichte über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks gleichseitige Dreiecke. Was fällt dir auf? Formuliere und beweise deine Entdeckung!
- Anwendung des Satzes von Pythagoras auf Tetraeder und Oktaeder: Oberfläche und Volumen
- Beweise: Perigal, Beweis mit Hilfe des Kathetensatzes

Kombination der Medien

Verschiedene interaktive Selfchecking-Tests ermöglichen den SchülerInnen, zu Beginn dieses Teils des Lernpfades den Status ihres Wissens, das Voraussetzung für die weiteren Lernschritte ist, festzustellen. In Kombination mit einem Lernprogramm, das die Inhalte der 7. Schulstufe abdeckt, können sie gegebenenfalls individuelle Wissenslücken schließen. Java-Applets, ein weiterführendes Lernprogramm sowie traditionell zu bearbeitende Arbeitsblätter bieten verschiedene Zugänge zu Erweiterungen des Satzes des Pythagoras und dessen Anwendung in Körpern. Zum Schulen des räumlichen Vorstellungsvermögens werden dynamische Arbeitsblätter in einem DGS mit haptischen Aufgabenstellungen (Herstellung eines Oktaeder-Skeletts kombiniert.

Lernmedien der SchülerInnen

Die Schüler arbeiten mit diesem Lernpfad nicht nur am Computer. Ihre Tätigkeiten und Ergebnisse sollen sie auch auf Arbeitsblättern oder in einem Heft festhalten. Außerdem kann eine Lernplattform sinnvoll eingesetzt werden.

Leistungsbeurteilung

Neben einer Bewertung der Protokolle der Schülerinnen und Schüler im Rahmen der Mitarbeit (nach einem vereinbarten Punktesystem) erfolgt die Leistungsbeurteilung über entsprechende Schularbeitsbeispiele. Bei Verwendung einer Lernplattform sollte auch die Beteiligung der Schülerinnen und Schüler am Forum (z.B. nach einem vereinbarten Punktesystem) beurteilt werden.

3. Vorteile des Medieneinsatzes – exemplarische Beschreibung der Materialien

Selbständiges Erarbeiten mit Hilfe eines interaktiven Programms

Die quadratische Pyramide

Die quadratische Pyramide besteht aus einem Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a als Grundfläche sowie den vier gleichschenkeligen Dreiecken ABS, BCS, CDS und ADS als Seitenflächen.

Die Höhe h der Pyramide geht vom Mittelpunkt F des Quadrats zur Spitze S und steht normal auf die Grundfläche, die Seitenkanten s gehen von den Eckpunkten des Quadrats zur Spitze S. Die Höhe der Seitenflächendreiecke nennt man h_1 .

Zur Berechnung der quadratischen Pyramide braucht man den Lehrsatz des Pythagoras. In einer quadratischen Pyramide gibt es verschiedene rechtwinkelige Dreiecke. Durch das Anklicken (linke bzw. rechte Maustaste) der Schaltflächen unter der Pyramide werden die Dreiecke gezeigt.

Überlege, wo Katheten und Hypotenuse sind und in welchem Punkt der rechte Winkel ist!

Dreieck ABF

Dreieck BSF

Dreieck MSF

Dreieck SBM

Die quadratische Pyramide

Dreieck MSF

Dreieck ABF

Dreieck SBM

Dreieck BSF

Die Seitenfläche BCS der Pyramide bildet ein gleichschenkeliges Dreieck mit der Grundkante a, den beiden Schenkeln s und der Höhe h_1 . Die Hälfte des gleichschenkeligen bildet das rechtwinkelige Dreieck SBM, für das gilt:

$$s^2 = h_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Die quadratische Pyramide

1. Grundaufgabe: Gegeben sind von einer quadratischen Pyramide die Grundkantenlänge $a = 3$ cm und die Höhe $h = 4$ cm. Gesucht sind Seitenkantenlänge s sowie Volumen und Oberfläche!

Berechne zuerst $d/2$! (Runde auf zwei Nachkommastellen, speichere aber den exakten Wert und rechne mit dem exakten Wert weiter!) Gib dein Ergebnis ein:

$d/2 =$ cm

Leider falsch!
Überlege!
Die Formel lautet $d = a \cdot \sqrt{2}$, du musst also $3 \cdot \sqrt{2}$ berechnen und dann durch 2 dividieren!
Vielleicht hast du auch nur falsch gerundet!

Die quadratische Pyramide

1. Grundaufgabe: Gegeben sind von einer quadratischen Pyramide die Grundkantenlänge $a = 3$ cm und die Höhe $h = 4$ cm. Gesucht sind Seitenkantenlänge s sowie Volumen und Oberfläche!

Berechne zuerst $d/2$! (Runde auf zwei Nachkommastellen, speichere aber den exakten Wert und rechne mit dem exakten Wert weiter!) Gib dein Ergebnis ein:

$d/2 =$ cm

Richtig!
Als nächstes kannst du s berechnen:

$s =$ cm Leider falsch! Richtig ist: $s = 4,53$ cm

Um h_1 zu berechnen, gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten:

$h_1 =$ cm Leider falsch! Richtig ist: $h_1 = 4,27$ cm

Zuletzt berechne noch Oberfläche und Volumen. Zur Kontrolle klicke!

Oberfläche

Volumen

$O = 34,63$ cm²

Spezielle Pyramiden

Ein Oktaeder ist eine quadratische Doppelpyramide, bei der alle Seiten gleich lang sind.

Informationen zum Oktaeder

Ein Tetraeder ist eine regelmäßige dreiseitige Pyramide, bei der alle Seiten gleich lang sind.

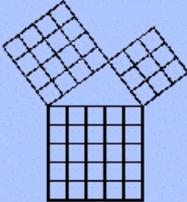
Informationen zum Tetraeder

zurück

Abbildung 1: Mediator - Programm

Selbstständiges Überprüfen von Vorwissen - Quiz

Inhaltneue Aufgaben



Pythagoras - Wirrwarr
Zuordnungsübung

Der Lehrsatz des Pythagoras kann in fast allen ebenen Figuren formuliert werden. Leider ist hier alles durcheinander geraten. Kannst du Ordnung schaffen? [Kontrolliere erst ganz zum Schluss!](#)

© Dorfmayr 2004

rechtwinkeliges Dreieck mit Katheten x und z und Hypotenuse y	$a^2 + b^2 = c^2$
Rechteck mit Seiten a und c und Diagonale b	$a^2 + c^2 = b^2$
Quadrat mit Diagonale x und Seitenlänge y	$2y^2 = x^2$
Quadrat mit Diagonale a und Seitenlänge c	$x^2 + y^2 = z^2$
rechtwinkeliges Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c	$x^2 + z^2 = y^2$
	$2c^2 = a^2$
	$4a^2 = c^2$

Abbildung 2: Selfchecking - Quiz

Händisches Anfertigen eines Oktaeders durch Computeranleitung

Schritt 1

Falte zuerst zwei Bergfalten horizontal durch die Halbierungspunkte der Quadratseiten.

Drehe dann das Papier um und falte entlang der Diagonalen.

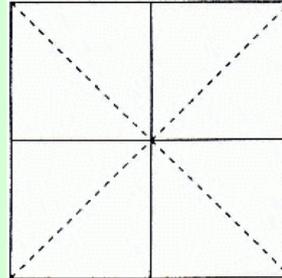


Abb. 1: Vorlage

Falte alle sechs Quadrate in der gleichen Art und Weise. Achte besonders darauf, die Falten stark zu machen!



Abb. 2: So sollen die Skelett-Teile aussehen

[zurück zu Skelett eines Oktaeders](#)

[weiter zu Schritt 2](#)

Abbildung 3: Oktaeder - Skelett - Schritt 1

Und nach mehreren Schritten sieht das Resultat folgendermaßen aus:

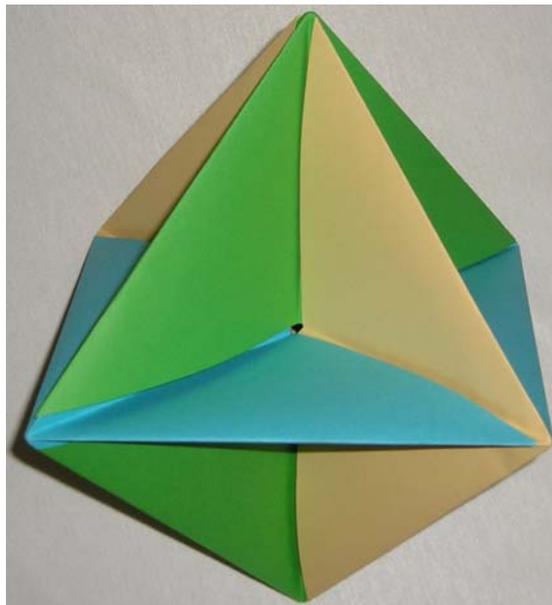


Abbildung 4: Fertiges Skelett eines Oktaeders

Selbstständiges Lösen von Aufgaben – Selbstkontrolle

Arbeitsblatt:

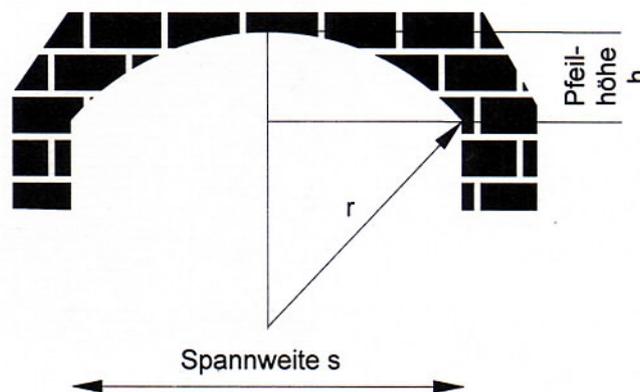
Führe folgende Arbeitsaufträge durch:

1) Lies dir die Angabe genau durch und gib an, welche geometrischen Figuren du bei dieser Aufgabenstellung erkennst!

Wo befindet (befinden) sich (ein) rechtwinkelige(s) Dreieck(e)? Zeichne diese auf dem Arbeitsblatt ein!

Der Flachbogen einer Fensteröffnung soll eine Spannweite s von 1,40 m und einer Pfeilhöhe h von 12 cm haben.

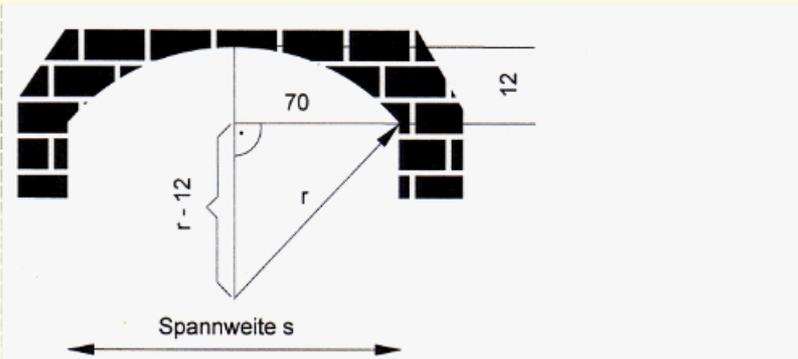
Wie muss der Handwerker Gaffnix den Radius r des Bogens in cm wählen?



2) Versuche eine Lösung dieser Aufgabenstellung – zeichne dir das rechtwinkelige Dreieck auf (runde auf cm!)

3) Kontrolliere deine Lösung!

Lösung Flachbogen



Spannweite s

$$(r - 12)^2 + 70^2 = r^2$$
$$r^2 - 24r + 144 + 4\,900 = r^2$$
$$5\,044 = 24r$$
$$210,2 = r \text{ gerundet}$$

Handwerker Raffnix errechnet einen Bogen mit dem Radius von 210 cm.

Gib die Lösung ein (runde auf die Einerstelle): cm

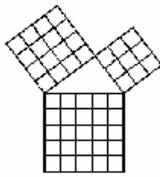
Lösung zeigen

Abbildung 5: Mediator-Programm zum Vergleichen der Lösungen

4. Drehbuch / Drehbücher – Methodisch-didaktische Anleitungen

4.1. Unterrichtsorganisation – Arbeitsanweisungen für Schüler/innen

E-Learning – Sequenz



e-Learning – Sequenz

Pythagoras 3D

Arbeitsplan



Alle **Unterlagen** findest du auf unserer Homepage: www.bgtulln.ac.at/~dorfmayr/web4f/

Die **Projektmappe** ist händisch oder am Computer zu führen und enthält:

- **Arbeitsplan**
- **Zeitplan**, auf dem möglichst genau eingetragen ist, wann du was mit wem machen möchtest / gemacht hast. Das Projekt dauert **5 Unterrichtsstunden**, und dein Zeitplan hat schon folgende **Fixpunkte**:
 - spätestens bis Montag, 13.12.2004: Höhen- und Kathetensatz: 1. Phase
 - am Donnerstag, 16.12.2004: Höhen- und Kathetensatz: 2. und 3. Phase
 - Grund: im Raum C3 ist keine Einzelarbeit möglich!
- Alle deine **Aufzeichnungen**: Rechnungen, Merksätze, Skizzen, Probleme, Hausübungen, ...
Achte besonders darauf, deine Projektmappe übersichtlich zu gestalten! Vergiss nicht auf Überschriften, Beispielangaben, etc.
- **Protokoll** zu jedem Lernschritt mit den folgenden Inhalten:
 - Titel des Lernschritts
 - kurze Beschreibung des Inhaltes
 - Hast du den Lernschritt in Einzelarbeit gemacht? Wenn nein, mit wem hast du ihn bearbeitet?
 - Wie lange hast du für den Lernschritt ungefähr gebraucht?
 - Hattest du Probleme mit dem Lernschritt? Wenn ja, welche?

Es gibt 4 **Hausübungen**, die verschiedenen Themen zugeteilt sind. Die Beispiele findest du in deinem Schulbuch. Überlege selbst, wann du welche Hausübung machen kannst und teile dir die Arbeit gut ein!

Pythagoras in ebenen Figuren: Pflicht: 625 b, 643 a, 651 a, 652 a, 656 a Bonus: 657 a, 658	Höhen- und Kathetensatz: Pflicht: 605 a, b, d, f
Pythagoras im Raum: Pflicht: 659 a, 671, 677 (Prisma) 681, 683 (Pyramide) Bonus: 679 b	Beweis: Führe einen Beweis für den Lehrsatz des Pythagoras. Wähle selbst einen Beweis, den du gut verstehst. Du kannst dazu vorgehen, wie in Beispiel 606 oder 607 oder einen anderen Beweis führen.

Sollten Fragen bzw. Probleme auftauchen: **Hilfe** von Dr. Dorfmayr bekommst du in der Regel erst dann, wenn du deine Frage auch im **Diskussionsforum des Infoportals** gestellt hast.

Zur **Beurteilung** des Projektes zählen

- Projektmappe (Vollständigkeit, Ausführung, ...)
- Arbeitshaltung (Selbständigkeit, Beteiligung am Diskussionsforum am Infoportal, ...)
- Hausübungen. Achte auch auf rechtzeitige Abgabe der Hausübungen!
- Freiwillige Zusatzübungen, wie Bonus-Hausübungen oder ???

Die Projektmappe (mit Hausübungen) muss vor den Weihnachtsferien abgegeben werden.

Viel Vernügen!

Abbildung 6: Informationsblatt für Schüler/innen

EVA - Lernspirale

Makrospirale

Vorwissen /Voreinstellungen aktivieren

A 01	Pythagoras´ Lieblingsdreieck - Lückentext
A 02	Pythagoras Wirrwarr - Zuordnungsübung
A 03	Eigenschaften eines Quaders - Lückentext
A 04	Pythagoras in Ebenen Figuren - Programm
A 05	Karmin á la Pythagoras
A 06	Überall Pythagoras

Neue Kenntnisse/ Verfahrensweisen erarbeiten

A 07	Kathetensatz und Höhensatz
A 08	Pythagoras in Pyramiden - Programm
A 09	Suchen nach rechtwinkligen Dreiecken
A 10	Bastelanleitung Oktaeder
A 11	7 Mal – Überall Pythagoras

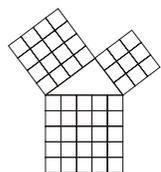
Komplexere Anwendungs-/Transferaufgaben

A 12	Weitere schwierige Beispiel
A 13	Komplexere Körper: Oktaeder und Tetraeder
A 14	Beweis nach Perigal – Applet
A 15	Beweis mit Hilfe des Kathetensatz – Applet

Mikrospirale zu Arbeitsinsel: 7 Mal – Überall Pythagoras - Expertengruppen

Arbeits-schritte	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozial-form	Zeit	Arbeitsmittel/Anlagen	Sonstiges
0	Voraussetzung die Arbeitsinsel 6:“Erkennen der geometrischen Figuren“ wurde bereits vorher gemacht (Museumsrundgang). Wenn nicht, dann kann auch damit erst bei dieser Arbeitsinsel begonnen werden	GA/ Plenum		Arbeitsblätter entweder bereits ausgedruckt oder sie werden jetzt erst verwendet.	
1	Löse ein Beispiel (jede Schülerin/ jeder Schüler erhält ein Arbeitsblatt)	EA	10 Min.	7 Arbeitsblätter vorbereiten	Zufällige Zuteilung (eventuell den Schwierigkeitsgrad bekannt geben, damit die Schüler auswählen können)
2	Alle mit derselben Aufgabenstellung vergleichen den Lösungsweg und das Ergebnis (Expertengruppen) Danach gemeinsame Kontrolle (Computer)	GA	5 Min		
3	Treffen in der Basisgruppe (Mischgruppe). Jeder bekommt die fehlenden Arbeitsblätter und erklärt sein Beispiel und bekommt die anderen erklärt (Danach Kontrolle mit dem Computer möglich!)	GA	30 Min		
4	Vortrag über ein zufällig gewähltes Beispiel vor der Klasse (Skizze, Erklärung und Rechengang und Ergebnisse)	Plenum	15 Min	Ev. Beamer Arbeitsblatt zeigen!	An der Tafel!

Offenes Lernen - Stationenbetrieb

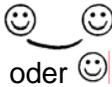


Überall Pythagoras

Name:

In diesem Projekt sind alle Stationen Selbstkontrolle! Du brauchst ein Quadermodell sowie dein Mathematikbuch! Alle Stationen findest du auf der Lernplattform! Zeitplan: 3 Stunden im Informatiksaal, 1 Stunde in der Klasse.

Nr.	Titel	Aktivität	Schüler-	Arbeitsauftrag	P/W	Kontrolle
1	Pythagoras' Lieblingsdreieck			Starte den Lückentext und bearbeite ihn!	Pflicht	
2	Pythagoras Wirrwarr			Starte die Zuordnungsübung und bearbeite sie!	Wahl	
3	Eigenschaften eines Quaders			Starte den Lückentext und bearbeite ihn!	Pflicht	
4	Pythagoras in ebenen Figuren			Starte das Programm und bearbeite die Beispiele! Du brauchst ein Blatt Papier, etwas zum Schreiben und deinen TR!	Pflicht	
5	Kamin á la Pythagoras		oder	Starte die Station und führe die Anweisungen durch! Die ausgedruckten Vorlagen befinden sich in der Mappe! Du brauchst eine Schere!	Wahl	
8	Pythagoras in Pyramiden			Starte das Programm und bearbeite die Beispiele! Du brauchst ein Blatt Papier, etwas zum Schreiben und deinen TR!	Pflicht	
9	Suche nach recht-			Starte die Station und führe die Anweisungen durch! (Wenn du mit dem Programm ZuL nicht zurechtkommst, schaue dir nur die	Wahl	

	winkligen Dreiecken			Lösungen an!)		
11	Überall Pythagoras		 oder 	Hole dir die Arbeitsblätter aus der Mappe aus und löse die gestellten Aufgaben. Zur Kontrolle starte die Station und gehe auf „Lösungen“.	Pflicht	
13	Oktaeder und Tetraeder			Starte die Station und führe die Anweisungen durch! Hilfe im Buch Seite 183 und Seite 184! Voraussetzung: Station 8	Wahl	
14	Beweis nach Perigal			Starte das Applet und führe die Anweisungen durch!	Wahl	

Die Projektmappe muss spätestens am 24.2. abgegeben werden! (Die HÜ kann schon früher abgegeben werden!)

Deine **Projektmappe** enthält:

- o Alle deine **Aufzeichnungen** (Rechnungen, Merksätze, Skizzen, Probleme, Hausübungen, ...) Achte besonders darauf, deine Projektmappe übersichtlich zu gestalten! Vergiss nicht auf Überschriften, Beispielangaben, etc.
- o **Protokoll** zu jeder Station mit den folgenden Inhalten: Titel des Lernschritts, kurze Beschreibung des Inhaltes. Mit wem hast du den Lernschritt bearbeitet? Wie lange hast du für den Lernschritt ungefähr gebraucht? Hattest du Probleme mit dem Lernschritt? Wenn ja, welche?
- o **Hausübung:** 659 a, 671, 676 b (Quader) und 681, 683 a, 686 b, 689 a (Pyramide) sowie 696 b, 700 a (Bonusbeispiele)

Zur **Beurteilung** des Projektes zählen: Projektmappe (Vollständigkeit, Ausführung, ...), Arbeitshaltung, Hausübung (achte auch auf rechtzeitige Abgabe der Hausübung), freiwillige Zusatzübungen (Wahlstationen, Bonus-Hausübung)

Viel Vergnügen!

4.2. Anleitungen für Lehrer/innen

Der Lehrer / die Lehrerin wählt aus den drei angebotenen didaktischen Umsetzungsmöglichkeiten eine aus.

5. Ergebnisse der internen Evaluation

Zum didaktisch-methodischen Kommentar

Der Lernpfad vertieft und übt den Satz von Pythagoras, die räumliche Anwendung ist neu. Lerninhalte und Lernziele werden ausreichend angeführt, notwendiges Vorwissen angeführt und adäquat formuliert. Es gibt keine neuen Begriffsbildungen, aber Präzisierungen. Über das technologische Umfeld wird informiert. Anknüpfungspunkte zu Schulbüchern gibt es in den Arbeitsplänen.

Methodische Vorschläge gibt es als E-Learning-Sequenz, zu Stationenbetrieb und als Lernspirale (für die nur einige Arbeitsinseln ausgeführt sind). Zu Stationenbetrieb und E-Learning-Sequenz sind Arbeitspläne vorhanden. Die Lernspirale ist lernzielorientiert, Stationenplan und E-Learning-Arbeitsblatt handlungsorientiert. Die Vorschläge sind flexibel, darüber hinaus werden den Lehrern und Lehrerinnen sogar Leerformulare für Lernspiralen angeboten.

Zum Lernpfad selbst

Inhalte und Begriffe werden korrekt und konsistent verwendet. Lernziele werden im Lernpfad für Schülerinnen und Schüler nicht transparent gemacht. Es gibt konkret-operative Phasen, bei den Lerntypen werden bildhaft, lesend, schreibend und aktives Tun angesprochen.

Es gibt ausreichend Anleitungen und Möglichkeiten, über Mathematik zu sprechen sowie heuristisch-experimentelle Phasen. Beweise werden darüber hinausgehend eher nicht exaktifiziert. Veranschaulichungen werden sehr intensiv genutzt.

Notwendige methodische Vorkenntnisse und Fertigkeiten werden teilweise aktiviert.

Anleitungen zu Arbeitsformen und Dokumentation sind (vor allem in den Drehbüchern) ausreichend vorhanden. Differenzierung ist möglich, es gibt ausreichend Wahlaufgaben bzw. Zusatzmaterial. Informationssuche wird im Expertenmodell zum Kathetensatz mit Hilfe des Schulbuches verlangt.

Die Gliederung ist übersichtlich. Zusammenfassungen von Wissen gibt es nicht.

Handlungsanweisungen zu Applets und anderen dynamischen Elementen sind vorhanden, in einzelnen Fällen möglicherweise nicht ausreichend. Lernschritte und Tätigkeiten sind sowohl im Lernpfad als auch in den Drehbüchern vorhanden.

Zur Festigung und Überprüfung von Wissen und Leistungsmessung

Hinweise zur Leistungsmessung und Leistungsbeurteilung sind in den Drehbüchern vorhanden. Übungs- und Festigungsphasen sind vorhanden. Fehlerdiagnose und nachträgliche Wissensüberprüfung sind nicht vorgesehen.

6. Äußere Evaluation / Feedback der Schüler/innen

66 Schüler/innen aus 3 Klassen haben teilgenommen.

Die Arbeitsform Partnerarbeit kennen etwa 95% der Schüler/innen aus dem Mathematikunterricht. Dies sind etwa 10 Prozentpunkte mehr als im Durchschnitt.

70% der Schülerinnen und Schüler geben an, mit programmierbarem Taschenrechner zu arbeiten, wobei dieser Wert nicht realistisch erscheint (siehe offene Frage „Andere Arbeitsweise“). Möglicherweise meinen die Schüler/innen numerische Taschenrechner.

Das Layout findet mit 70% Gefallen. Die Sprache des Lernpfads wird als etwas verständlicher empfunden als im Durchschnitt.

Etwa 60% geben an, den Lernpfad auch zu Hause verwendet zu haben. Dies hebt sich deutlich vom Durchschnitt ab (siehe Abbildung 7). Dasselbe gilt auch für die Frage, ob der Lernpfad auch zum Üben für die Schularbeit verwendet wird. Fast 70% der Schüler/innen geben an, dass sie dies getan haben bzw. beabsichtigen (siehe Abbildung 8).

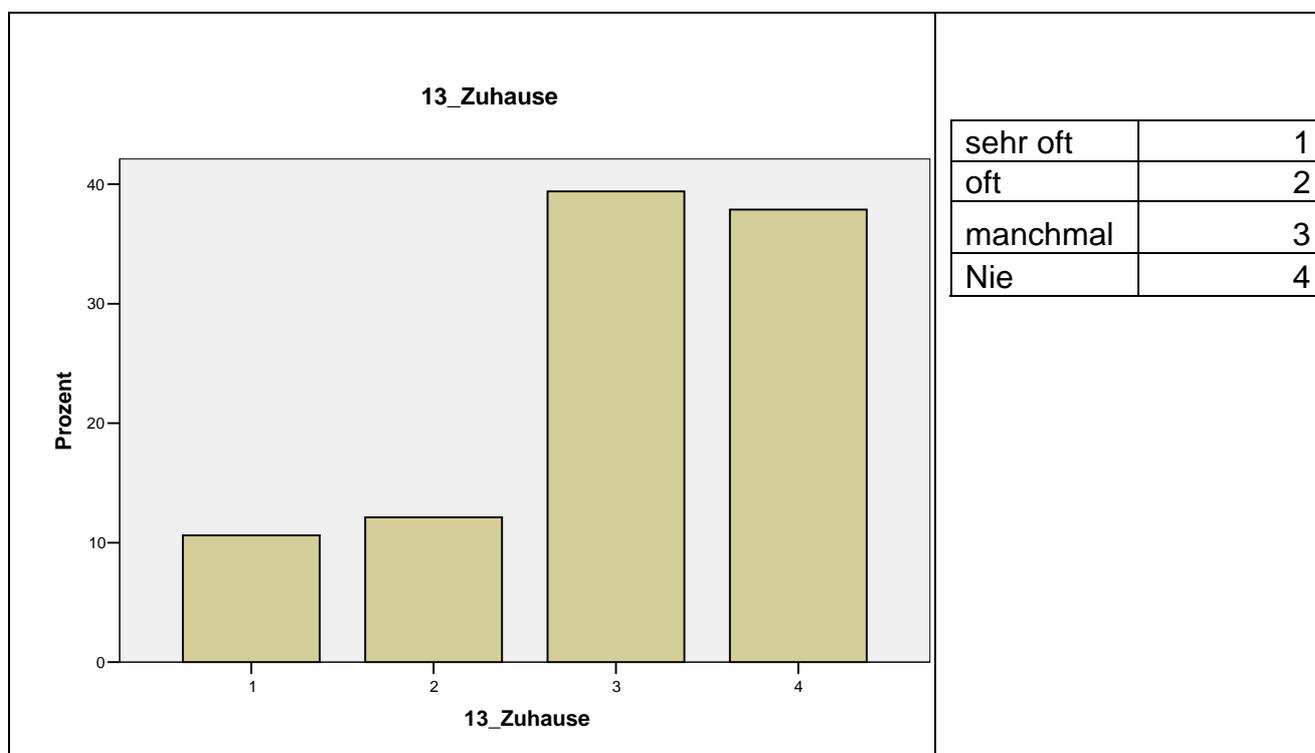


Abbildung 7: Ich habe auch zu Hause mit dem Lernpfad gearbeitet.

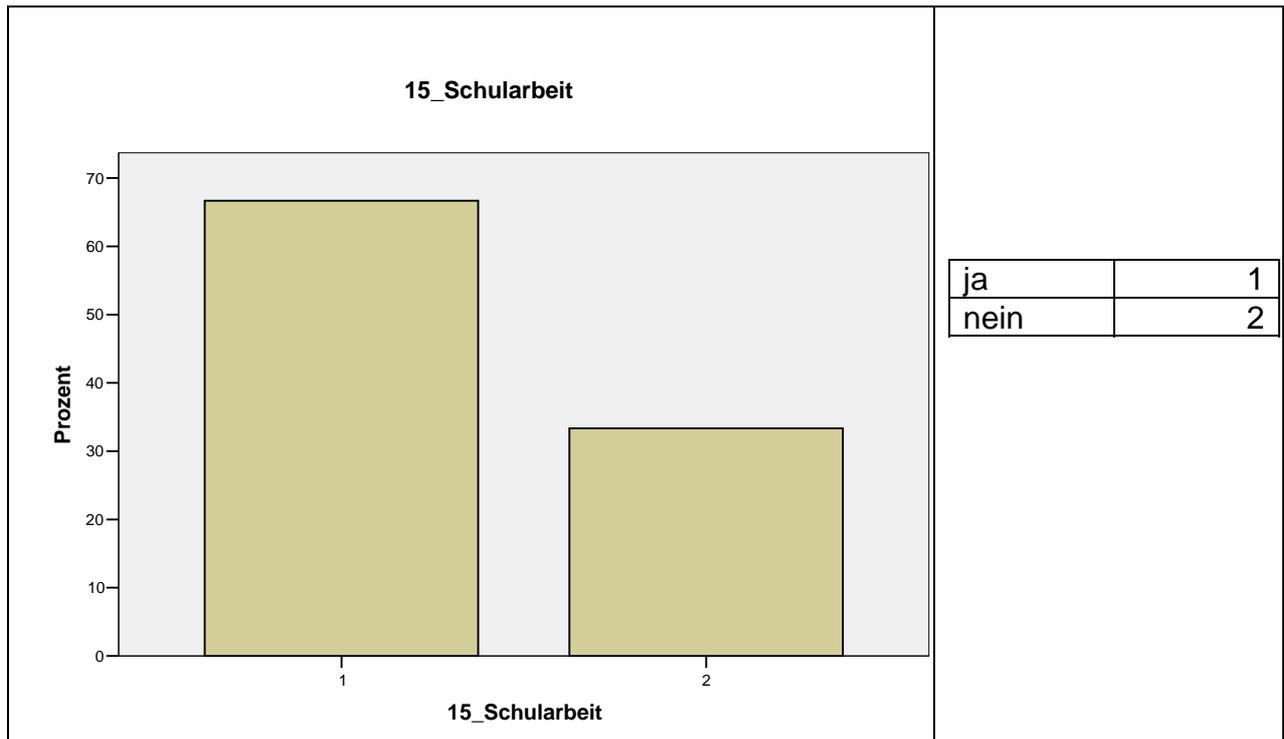


Abbildung 8: Ich habe / werde den Lernpfad zum Üben für die Schularbeit verwenden.

Der Lernpfad wird von allen Schülerinnen und Schülern verstanden. Fast 60% stimmen zu, dass das Verstehen mathematischer Inhalte beim Bearbeiten des Lernpfades wichtig war, dies sind mehr als im Durchschnitt.

Auffällig ist, dass unterdurchschnittlich wenige Schüler/innen mit anderen kommuniziert haben und Austausch an Hilfe erlebt haben (siehe Abbildungen 9 und 10). Als Ursache für diese Rückmeldungen kann vermutet werden, dass zwei Mediator-Programme im Lernpfad auf individuelles Lernen abzielen. Gemeinsames Arbeiten wird von überdurchschnittlich vielen als sehr zutreffend erlebt, von einigen aber als völlig unzutreffend.

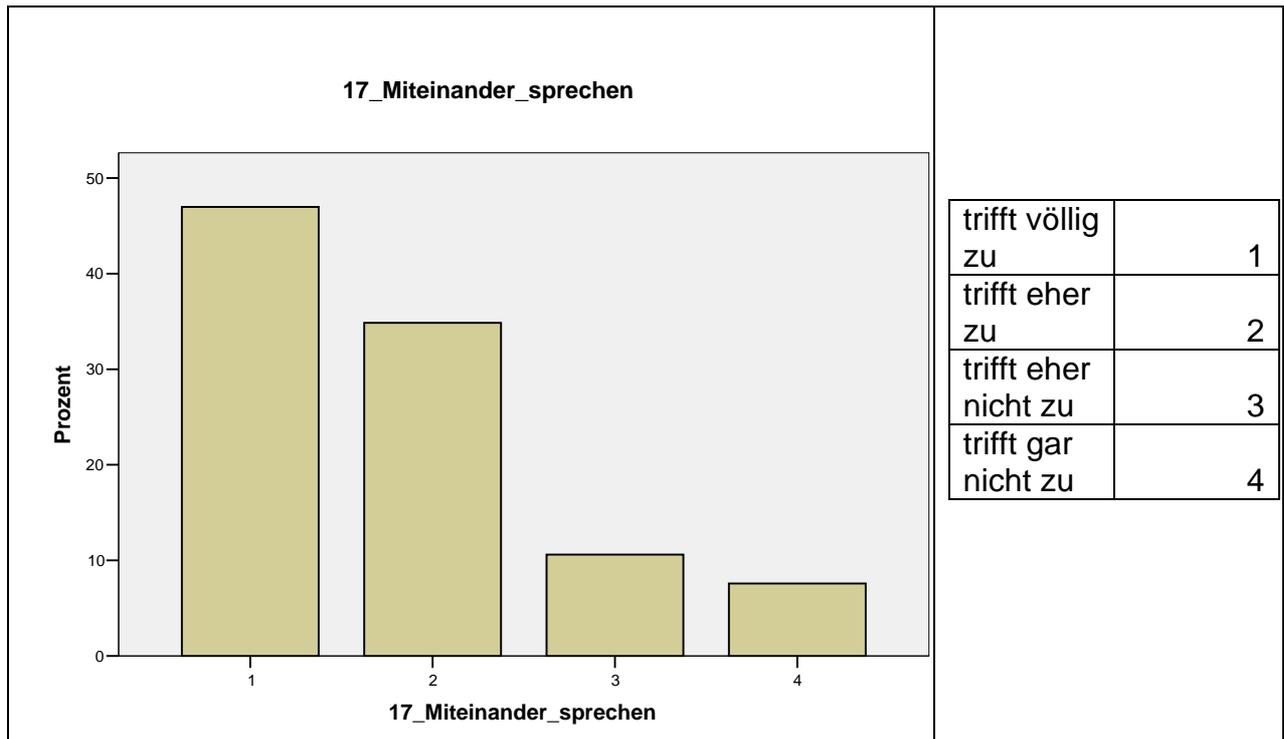


Abbildung 9: Beim Durcharbeiten des Lernpfades war es möglich, mit anderen Schüler/innen über die mathematischen Inhalte zu sprechen.

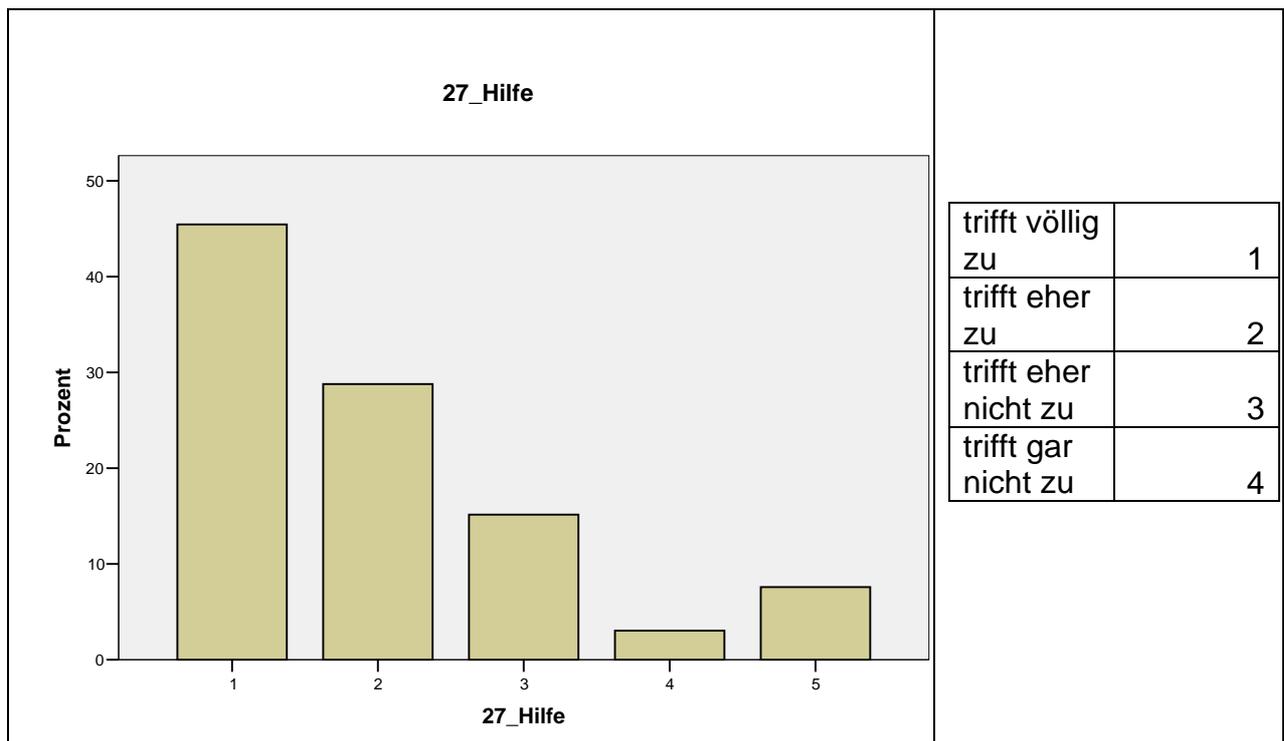


Abbildung 10: Bei der Arbeit mit diesem Lernpfad war es selbstverständlich, Mitschüler/innen beim Verstehen zu helfen und selbst, wenn nötig, Hilfe zu bekommen.

Die Schüler und Schülerinnen sind überwiegend zufrieden mit dem Lernpfad.

Ausgewählte Antworten der Schüler/innen auf offene Fragen:

Interaktive Übungen: „Ein Ergebnis hat nicht gestimmt und ich habe auf meine Rechnung vertraut.“ (Zitat eines Schülers / einer Schülerin im Rückmeldebogen)

Positives Feedback: Zusammenarbeit und Kommunikation werden auffallend oft genannt.

Negatives Feedback: Einige Schüler/innen kritisieren, dass ihre Mappen zu streng korrigiert wurden. Mehrmals wird Lärm als negativ für den Lernprozess genannt.

7. Überblick über den Erstellungsprozess

Wie bereits erwähnt, wurde dieser Lernpfad bereits im Rahmen des Projektes CAV erstellt und getestet. Für das neue Projekt wurden der didaktische Kommentar verfasst und im Bereich der Anwendungs- und Transferaufgaben geeignete Beispiele ergänzt. Diese Tätigkeiten erforderten nur ein Treffen, der zeitliche Aufwand war daher sehr gering.

Medienvielfalt
im **Mathematikunterricht** 

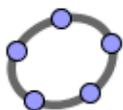
Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

**Medienvielfalt im
Mathematikunterricht**

TEIL 4

**LERNPFAD
ZYLINDER – KEGEL - KUGEL**

Hollabrunn, Dezember 2006



GeoGebra



Eine Galerie multimedialer Lernhilfen

mathe online

für Schule, Fachhochschule,
Universität und Selbststudium

Lernpfad: Zylinder – Kegel – Kugel

8. Schulstufe

Autorin: Mag. Evelyn Stepancik

1. Motivation – Warum wurde das Thema gewählt?

Berechnungen an Körpern und solchen mit kreisförmiger Grundfläche stellen in der gesamten Unterstufe einen wichtigen Bereich dar. Sehr oft wird dabei mit real vorhandenen Modellen gearbeitet. Die Erweiterung eines solchen Unterrichts um virtuelle Modelle, die sich bewegen, scheint eine Bereicherung zu sein.

2. Didaktischer Kommentar

Der Lernpfad wurde zum selbstständigen Erarbeiten der Inhalte konzipiert. Besonderes Augenmerk wurde auf die Verbindung von Visualisierung und haptischer Erfahrung sowie eigenständiger Erarbeitung der Formeln gelegt. Der Lernpfad deckt die wichtigsten Inhalte zum Zylinder, Kegel und der Kugel ab.

Kurzinformation	
Schulstufe	8. Schulstufe (4. Klasse AHS / HS)
Dauer	8 - 10 Unterrichtsstunden
Unterrichtsfächer	Mathematik (eventuell Geometrie)
Verwendete Medien	Internet
Technische Voraussetzungen	Internetexplorer (andere Browser liefern möglicherweise keine optimale Darstellung)
Autorin	Evelyn Stepancik

Technische Voraussetzungen:

Umgang mit dem Internet.

Empfohlene Browser - Internet Explorer bzw. Mozilla Firefox. Bei Netscape kann es gelegentlich zu Darstellungsschwierigkeiten kommen.

Fachliche Voraussetzungen:

Kreis, Kreisfläche, Kreisumfang, Kreisbogen, Kreissektor.

Prismen: Rauminhalts- und Oberflächenformeln.

Methodische Voraussetzungen:

Informationen selbstständig erfassen und schriftlich festhalten können.

Bastelanleitungen folgen können.

Lerninhalte, Methoden und Lernziele

Lerninhalt	Lernziel
Oberflächenformel der Körper herleiten und anwenden können Volumensformel der Körper herleiten und anwenden können Körper eigenständig anfertigen können	Formeln für die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt des Kreises wissen und anwenden können Formeln für die Länge eines Kreisbogens und für die Flächeninhalte von Kreisteilen anwenden können Formeln für die Berechnung der Oberfläche und des Volumens von Drehzylindern und Drehkegeln sowie für die Kugel erarbeiten und nutzen können

Kombination der Medien

Im vorliegenden Lernpfad wird versucht, das selbstständige Herstellen der verschiedenen Körper durch animierte Visualisierungen zu unterstützen.

Lernmedien der Schüler/innen

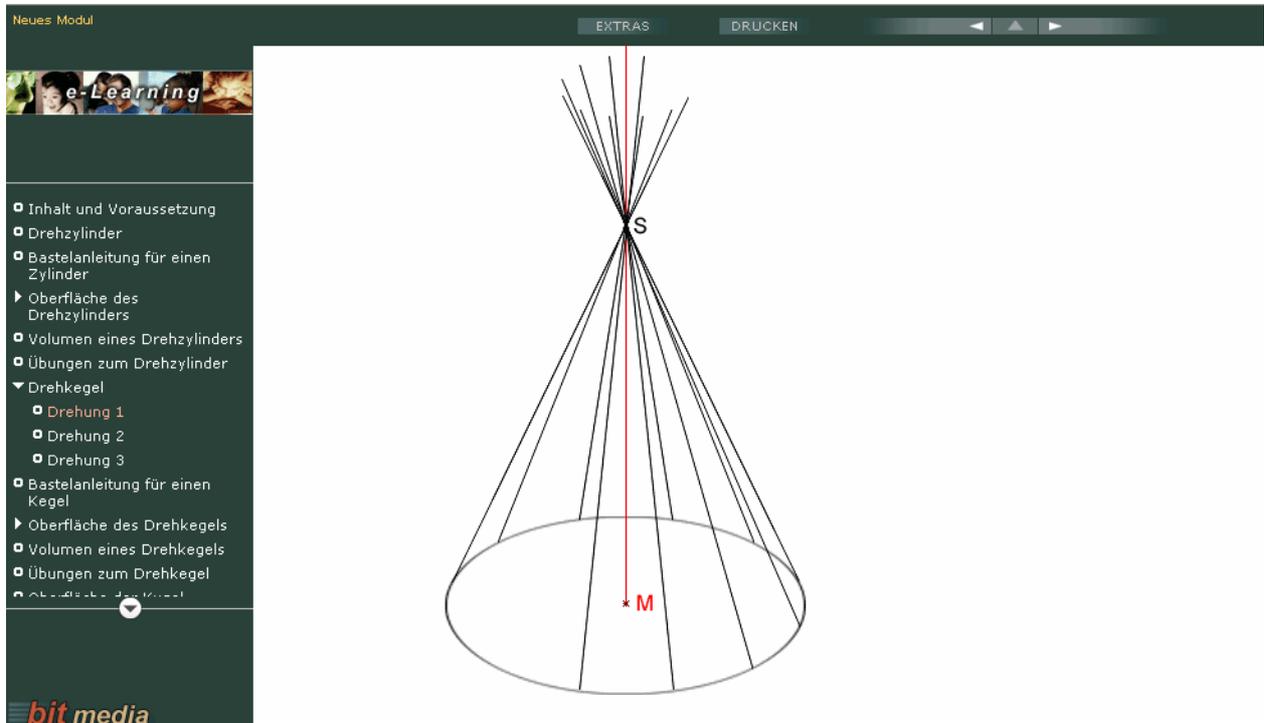
Die Schülerinnen und Schüler arbeiten bei diesem Lernpfad nicht nur mit dem PC, sondern auch mit Bastelanleitungen.

Leistungsbeurteilung

Bei diesem Lernpfad gibt es verschiedenste Möglichkeiten der Leistungsbeurteilung. Das Arbeiten an den einzelnen Aufgabenstellungen kann im Rahmen der Mitarbeit oder mittels einer Projektdokumentation bewertet werden.

3. Vorteile des Medieneinsatzes – exemplarische Beschreibung der Materialien

Animierte Bilder fördern das Verstehen



Individuell einblendbare Lernhilfen

The screenshot shows a software interface for a cylinder construction guide. The main area contains a list of materials, four steps of instructions, and a diagram of a circular sector. The diagram has a 97-degree angle and two radii of 10 cm. The interface includes a sidebar with a table of contents and navigation buttons at the top.

Bastelanleitung für einen Zylinder

Du brauchst:

- Papier (schön wäre bu...)
- Schere
- Klebstoff
- Dreieck
- Zirkel

1. Schritt:

- Zeichne einen Kreis m...

2. Schritt:

- Zeichne nun einen Rec... (beachten!)

3. Schritt:

- Jetzt musst du einige...
- Berechne den Umfang...
- Berechne den Flächen...
- Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks!
- Kontrolliere deine Lösung! Du findest sie im Bereich "Themen" unter Lösung 2!

4. Schritt:

- Klebe den Kreis und das Rechteck zusammen, sodass ein Zylinder entsteht!

Anwendungsorientierte Aufgabenstellungen

Neues Modul
EXTRAS
DRUCKEN

e-Learning

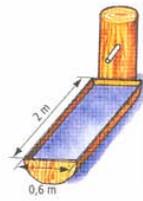
- ▢ Drehzylinder
- ▢ Bastelanleitung für einen Zylinder
- Oberfläche des Drehzylinders
- ▢ Volumen eines Drehzylinders
- ▢ Übungen zum Drehzylinder
- ▾ Drehkegel
 - ▢ Drehung 1
 - ▢ Drehung 2
 - ▢ Drehung 3
- ▢ Bastelanleitung für einen Kegel
- Oberfläche des Drehkegels
- ▢ Volumen eines Drehkegels
- ▢ Übungen zum Drehkegel
- ▢ Oberfläche der Kugel
- ▢ Volumen der Kugel
- ▢ Kommentar für Lehrer/innen

2. Aufgabe: Die Oberfläche eines Drehzylinders beträgt $659,74 \text{ cm}^2$. Der Radius ist 7 cm . Berechne die Höhe dieses Zylinders und das Volumen!

3. Aufgabe: Eine Litfasssäule ist $2,6 \text{ m}$ hoch und hat einen Durchmesser von $1,4 \text{ m}$.
Wie groß ist die Werbefläche, wenn der Sockel bis zu einer Höhe von 40 cm nicht beklebt wird?

4. Aufgabe: Der Wassertrog einer Viehtränke hat die Form eines Halbzylinders.
Wie viel Liter fasst die Tränke, wenn sie randvoll ist?

5. Aufgabe: In einem antiken Tempel sollen 5 zylindrische Säulen (Durchmesser 80 cm , Höhe $5,5 \text{ m}$) durch Kopien ersetzt werden.
Wie viele m^3 Beton sind dazu nötig?
Wie viele kg Farbe wird benötigt, wenn mit $0,6 \text{ kg}$ Farbe pro m^2 gerechnet wird?
Wie schwer ist eine Säule, wenn die Dichte von Beton 2000 kg/m^3 beträgt?


4. Drehbuch / Drehbücher – Methodisch-didaktische Anleitungen

4.1. Unterrichtsorganisation – Arbeitsanweisungen für Schüler/innen

Die Arbeitsanweisungen für die Schülerinnen und Schüler sind im Lernpfad integriert.

Neues Modul
EXTRAS
DRUCKEN

e-Learning

- ▢ Drehzylinder
- ▢ Bastelanleitung für einen Zylinder
- Oberfläche des Drehzylinders
- ▢ Volumen eines Drehzylinders
- ▢ Übungen zum Drehzylinder
- ▾ Drehkegel
 - ▢ Drehung 1
 - ▢ Drehung 2
 - ▢ Drehung 3
- ▢ Bastelanleitung für einen Kegel
- Oberfläche des Drehkegels
- ▢ Volumen eines Drehkegels
- ▢ Übungen zum Drehkegel
- ▢ Oberfläche der Kugel
- ▢ Volumen der Kugel
- ▢ Kommentar für Lehrer/innen

Bastelanleitung für einen Zylinder

Du brauchst:

- ▣ Papier (schön wäre buntes Papier)
- ▣ Schere
- ▣ Klebstoff
- ▣ Dreieck
- ▣ Zirkel

1. Schritt:

- ▣ Zeichne einen Kreis mit Radius $r = 3 \text{ cm}$. (Kleberand beachten!)

2. Schritt:

- ▣ Zeichne nun ein Rechteck mit einer Länge von $18,8 \text{ cm}$ und einer Breite von 5 cm . (Kleberand beachten!)

3. Schritt:

- ▣ Jetzt musst du einige Dinge berechnen, dann erst klebe den Zylinder zusammen!
- ▣ Berechne den Umfang des Kreises mit dem Radius $r = 3 \text{ cm}$!
- ▣ Berechne den Flächeninhalt des Kreises mit dem Radius $r = 3 \text{ cm}$!
- ▣ Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks!
- ▣ Kontrolliere deine Lösung! Du findest sie im Bereich "Themen" unter *Lösung* !

4. Schritt:

- ▣ Klebe den Kreis und das Rechteck zusammen, sodass ein Zylinder entsteht!

4.2. Anleitungen für Lehrer/innen

Offenes Lernen – Drehzylinder, Drehkegel und Kugel

1		Drehzylinder	Selbstständiges Herleiten der Formel für die Oberfläche und das Volumen	PA	SK
2		Drehzylinder	Übungen zum Drehzylinder	PA	SK
3		Drehzylinder	Zusätzliche Übungen	EA	LK
4		Drehkegel	Selbstständiges Herleiten der Formel für die Oberfläche und das Volumen	PA	SK
5		Drehkegel	Übungen zum Drehkegel	PA	SK
6		Drehkegel	Zusätzliche Übungen	EA	LK
7		Kugel	Herleitung der Formeln Lies das Arbeitsblatt genau durch und besprich die Inhalte mit deinem Partner / deiner Partnerin. Versuche, die Herleitung der Formel für das Volumen der Kugel mit eigenen Worten zu formulieren!	PA	SK
8		Kugel	Übungen zur Kugel	EA	LK
9		Zusammenfassung	Erstelle eine Formelsammlung zum Kreis, Zylinder, Kegel und Kugel	EA	LK

4.3. Weitere Materialien

Keine weiterführenden Materialien vorhanden.

5. Ergebnisse der internen Evaluation

5.1. Zum didaktisch-methodischen Kommentar

Es werden neue Inhalte erarbeitet, aber auch vertieft und geübt. Lerninhalte und Lernziele werden angeführt. Vorwissen wird angemessen angeführt und formuliert, es sollten allerdings die Lernziele zum Kreis als Vorwissen ausgewiesen werden.

Die Übungen sind gut gewählt, werden aber nicht dynamisch unterstützt. Begriffe werden präzisiert, den Schülerinnen und Schülern wird jedoch nicht durchgehend die Möglichkeit geboten, die Begriffe selbst zu entdecken.

Der didaktische Kommentar ist kurz, bündig und verständlich.

Bei diesem Lernpfad wird nur das Internet genutzt, daher gibt es keine weiteren technologischen Tipps. Technologisch gibt es die Möglichkeit (roter Button am rechten Rand), Tipps zu Problemen einzufügen. Diese Möglichkeit wurde aber noch nicht verwirklicht.

Anknüpfungspunkte zu Schulbüchern sind vorhanden.

Als methodischen Vorschlag gibt es einen Plan für offenes Lernen, dieser befindet sich im Downloadbereich. Andere methodischen Vorschläge sind direkt im Lernpfad enthalten. Der

Plan für offenes Lernen ist verständlich. Für Neueinsteiger gibt es jedoch keine Anleitung zur Methode „Offenes Lernen“ oder Zeichenerklärung.
Die Anleitungen sind im Allgemeinen handlungsorientiert.

Folgende technologische Tipps könnten noch ergänzt werden:

Falls beim Öffnen das Bild zu klein erscheint, kann durch „Aktualisieren“ das Bild vergrößert werden.

Am rechten Rand befindet sich ein roter Button, mit dem Hilfestellungen zu Vorwissen eingeblendet werden können oder Lösungen angeboten werden. Allerdings muss auch direkt in den Aufgaben auf die angebotene Lösung hingewiesen werden.

Einige Tippfehler auf der Startseite sollten ausgebessert werden.

5.2. Zum Lernpfad selbst

Mathematische Begriffe werden korrekt und durchgängig verwendet. Lernziele werden im Lernpfad für Schülerinnen und Schüler nicht transparent gemacht.

Beim Entwickeln von Formeln werden vor allem visuelle Lerntypen angesprochen, allerdings wird im Kommentar darauf verwiesen, Modellkörper zu verwenden. Bastelaufträge für aktives Tun sind mehrfach vorhanden.

Sprechansätze für Schüler/innen über mathematische Inhalte müssen vom Lehrer bzw. der Lehrerin angeregt werden.

Es gibt ansatzweise heuristisch-experimentelle Phasen, die teilweise nicht dynamisch unterstützt werden. Die hergeleiteten Formeln werden angewendet, eine weitere Verallgemeinerung ist in dieser Phase nicht zielführend.

Vorwissen (Formeln zum Umfang und Flächeninhalt des Kreises und Rechtecks) wird nicht aktiviert, auch wenn es im Lernschritt „Bastelanleitung für Drehzylinder“ leicht ergänzbar ist (z. B. „Schlag im Schulübungsheft nach!“)

Es gibt einige Anleitungen zu Arbeitsformen im Stationenplan.

Differenzierung ist nicht vorgesehen, Zusatzaufgaben sind nicht vorhanden.

Informationssuche wird nicht verlangt.

Die Gliederung ist gut.

Dynamische Übungen oder Applets sind nicht vorhanden.

Arbeitsaufforderungen für Tätigkeiten oder einzelne Lernschritte finden sich teilweise im Lernpfad sowie im Stationenplan.

5.3. Zur Festigung und Überprüfung von Wissen und Leistungsmessung

Übungsphasen und Festigungsphasen sind vorhanden, aber keine Hinweise auf Hausübungsbeispiele.
Möglichkeiten zur Selbstkontrolle und Wissensüberprüfung sind nicht vorhanden.
Es gibt keine Vorschläge zur Leistungsmessung und Leistungsbeurteilung.

6. Äußere Evaluation / Feedback der Testlehrer/innen und Schüler/innen

Entfällt wegen zu geringer Rückmeldungen.

7. Überblick über den Erstellungsprozess

Zu Beginn des Erstellungsprozesses wurde überlegt, was einen virtuellen Lernpfad zum Thema „Zylinder – Kegel – Kugel“ auszeichnen könnte. Bald war klar, dass dies vor allem animierte Darstellungen von kreisförmigen Körpern sein könnten. Die im Unterricht dann mit realen Körpern zu kombinieren wären. Also wurden bereits im Internet vorhandene Materialien analysiert, um festzustellen, ob sie ein anregendes Lernmaterial für Schülerinnen und Schüler darstellen. Da im Internet kaum animierte Darstellungen von kreisförmigen Körpern für den Bereich der Sekundarstufe 1 zu finden waren, wurde es nötig selbst welche zu erstellen. Zudem sollte eine anregende Gestaltung und Gliederung des Lernpfads ein Erarbeiten des Wissens in einzelnen wohl portionierten Lernschritten ermöglichen. Somit entstand eine erste Grobplanung zum vorliegenden Lernpfad.

In weiterer Folge wurden die einzelnen Lernschritte ausgearbeitet und die benötigten Visualisierungen (animierte wie nicht animierte) erstellt. Diese Tätigkeit erwies sich als besonders zeitaufwändig.

Danach galt es noch, den Lernpfad mit interessanten, anwendungsorientierten Aufgaben anzureichern. Hierfür wurden vorhandene Materialien (Schulbücher, Internet) als Inspiration zu Rate gezogen. Diese Orientierungen machten es möglich, den Lernpfad mit ansprechenden Aufgabenstellungen abzurunden.

Medienvielfalt
im *Mathematikunterricht* 

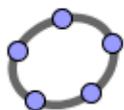
Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

**Medienvielfalt im
Mathematikunterricht**

TEIL 4

**LERNPFAD
BESCHREIBENDE STATISTIK**

Hollabrunn, Dezember 2006



GeoGebra

Eine Galerie multimedialer Lernhilfen

mathe online



für Schule, Fachhochschule,
Universität und Selbststudium

Lernpfad: Beschreibende Statistik

8. Schulstufe

Autoren/innen: Mag. Gabriele Bleier, Dr. Franz Embacher, Mag. Evelyn Stepancik

1. Motivation – Warum wurde das Thema gewählt?

Die beschreibende Statistik ist ein bedeutendes, aber leider oft auch vernachlässigtes Kapitel im Mathematikunterricht der 8. Schulstufe. Interessante statistische Daten bzw. Datenmengen lassen sich kaum händisch bewältigen und regen somit unmittelbar zur Verwendung von Technologien an. Darüber hinaus soll im Bereich der beschreibenden Statistik aber nicht nur eine Schulung zur Handhabung der Software und Bewältigung der Daten erfolgen, sondern auch ein Verstehen der Begriffe und benötigten Formeln erreicht werden. Das interaktive Experimentieren mit Applets, Daten bzw. Datensätzen kann den Schülerinnen und Schülern ein gutes Gefühl für Ausreißer und die Relevanz statistischer Zentralmaße vermitteln. In der 8.Schulstufe soll die Basis für vertiefende Betrachtungen in der Oberstufe gelegt werden.

2. Didaktischer Kommentar

Der Lernpfad baut auf folgenden Vorkenntnissen „Diagramme erstellen, lesen, deuten; intuitive Vorstellung vom Mittelwert“ auf. Die neuen Begriffe „arithmetisches Mittel und seine Eigenschaften; Median und seine Eigenschaften; Quartile; Boxplot; Standardabweichung“ werden von den Schüler/innen eigenständig und in verschiedenen Sozialformen erarbeitet. Flashanimationen sollen einem tieferen Verständnis der oben angeführten Begriffe dienen. Erarbeitungs- und Übungsbeispiele (auch mit großen Datensätzen) können mit verschiedenen Medien (Papier, CAS-Rechner, Excel) gelöst werden und, wo nötig, werden Hilfestellungen zur Handhabung dieser Medien angeboten. Das kritische Betrachten und Vergleichen verschiedenster Kennzahlen soll zum besseren Verständnis dieser beitragen.

Kurzinformation	
Schulstufe	8. Schulstufe
Dauer	6 - 8 Stunden
Unterrichtsfacher	Mathematik, Informatik
Verwendete Medien	Internet, CAS, Excel
Technische Voraussetzungen	Web-Browser, Flash
AutorInnen	Gabriele Bleier, Franz Embacher, Evelyn Stepancik

Voraussetzungen

- Technische Voraussetzungen: Umgang mit dem Internet und Flash-Animationen, geringe Kenntnisse von CAS oder Excel, (eventuell) Lernplattform. Für den Film (im Abschnitt Standardabweichung) ist die Benutzung von Kopfhörern vorzusehen.

- Fachliche Voraussetzungen: Diagramme lesen und deuten, Daten der Größe nach ordnen, Mittelwert (arithmetisches Mittel) intuitiv begreifen, negative Zahlen kennen, Quadratwurzel ermitteln können
- Methodische Voraussetzungen: Informationen selbstständig schriftlich festhalten können, mit Partner und in Gruppe arbeiten können, Methoden zur Partner- und Gruppenfindung kennen, Ergebnisse präsentieren können, (eventuell) das Arbeiten mit Lernplattformen

Lerninhalte und Lernziele

Lerninhalt	Lernziel
Mittelwert	Untersuchen und Darstellen von Datenmengen unter Verwendung statistischer Kennzahlen (zB.: Mittelwert, Median, Quartil)
Median	
Quartile	
Boxplot	
Standardabweichung	
Mittelwert - Aufgabe 6 und 7	Sicherheit beim Arbeiten mit Variablen, Termen, Formeln
In vielen Aufgabenstellungen	planmäßigen Nutzung von elektronischen Hilfen beim Bearbeiten von Fragestellungen der Mathematik
Durchgängig im Lernpfad enthalten	Lesen mathematischer Texte, Fachsprache

Einsatz im Unterricht

Viele Aufgabenstellungen vor allem jene im Erarbeitungsbereich können von den Schülerinnen und Schülern in Partnerarbeit absolviert werden. Die Aufgaben, deren Lösung jedoch die Arbeit am PC erfordern, sind im günstigsten Fall in Einzelarbeit zu erledigen.

Kombination der Medien

Dieser Lernpfad inkludiert die Kombination verschiedenster Medien. Zum einen werden Flash-Animationen mit Aufgabenstellungen kombiniert, um ausgehend von den intuitiven Vorstellungen der Schüler/innen die neuen mathematischen Begriffe zu exaktifizieren, zum anderen werden Aufgabenstellungen gegeben, deren Lösung nur mit einem elektronischen Hilfsmittel sinnvoll machbar ist. Die Notwendigkeit zur Verwendung einer Tabellenkalkulation ist den Aufgabenstellungen also inhärent.

Lernmedien der Schüler/innen

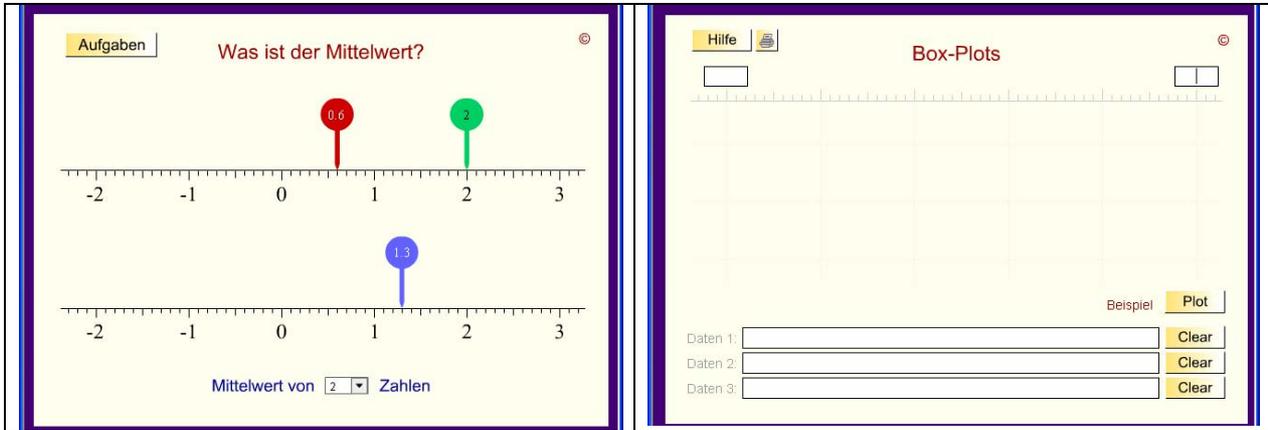
Beim Absolvieren dieses Lernpfads haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, mit unterschiedlichen Lernmedien (Papier, Computer, ...) zu arbeiten.

Leistungsbeurteilung

Für die Beurteilung des Lernprozesses empfiehlt es sich, eine Bewertung der SchülerInnenaktivitäten im Rahmen der Mitarbeit vorzunehmen. Ebenso können die von den Schülerinnen und Schülern erstellten Dokumentation (des Portfolios) und eventuellen Arbeiten auf der Lernplattform Rahmen der Mitarbeit beurteilt werden.

3. Vorteile des Medieneinsatzes – exemplarische Beschreibung der Materialien

Interaktive Lernhilfen helfen beim Verstehen zentraler Begriffe



Realistische Daten vermitteln die Nähe zur Alltags- und Lebenswelt

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		15.05.2001									
2	Mittelburgenland	38096			Die Tabelle enthält die Bevölkerungszahlen von Österreich geordnet nach Regionen. Das Datum zeigt den Stichtag der Zählung an. Die Daten stammen von STATISTIK AUSTRIA. 1.) Sortiere die Daten der Größe nach! 2.) Ermittle die durchschnittliche Einwohnerzahl der Regionen! 3.) Wie viele und welche Regionen weichen vom Durchschnittswert aus 2.) besonders stark ab? 4.) Welche Region liegt am nächsten beim Mittelwert?						
3	Nordburgenland	140976									
4	Südburgenland	98497									
5	Mostviertel-Eisenwurzen	237461									
6	Niederösterreich-Süd	246144									
7	Sankt Pölten	142430									
8	Waldviertel	224402									
9	Weinviertel	123786									
10	Wiener Umland/Nordteil	278246									
11	Wiener Umland/Südteil	293335									
12	Wien	1550123									
13	Klagenfurt-Villach	268727									
14	Oberkärnten	131749									
15	Unterkärnten	158928									
16	Graz	357548									
17	Liezen	82235									
18	Östliche Obersteiermark	175701									
19	Oststeiermark	268054									
20	West- und Südsteiermark	190414									
21	Westliche Obersteiermark	109351									
22	Innviertel	272348									
23	Linz-Wels	524444									
24	Mühlviertel	201933									
25	Steyr-Kirchdorf	152118									
26	Traunviertel	225954									
27	Lungau	21283									
28	Pinzgau-Pongau	161996									
29	Salzburg und Umgebung	332048									
30	Außerfern	31584									
31	Innsbruck	268332									
32	Osttirol	50404									

4. Drehbücher – Methodisch-didaktische Anleitungen

Unterrichtsorganisation – Arbeitsanweisungen für Schüler/innen

Die Arbeitsanweisungen für selbstständiges Arbeiten sind direkt im Lernpfad formuliert. Zu Beginn wird es jedoch notwendig sein, den SchülerInnen einen Überblick über die Inhalte (zum Beispiel in Form einer Mindmap) zu geben und sie in die Handhabung des Browsers, der Navigationsleiste sowie der Scrollleiste, in das Verwenden von Links und in die verwendeten Abkürzungen für Dateiformate einzuführen.

Anleitungen für Lehrer/innen

Für Lehrerinnen und Lehrer gibt es zusätzliche Vorschläge, wie einzelne Lernschritte bzw. Unterrichtseinheiten in Methoden des eigenverantwortlichen Arbeitens eingekleidet werden können. Die Unterrichtsorganisation wird in Lernspiralen genau beschrieben.

Es werden drei ausgearbeitete Vorschläge angeboten:

- Lernspirale zum Thema Beschreibende Statistik, die sich auf den gesamten Lernpfad bezieht (Die Erfahrung zeigt, dass nicht der gesamte Lernpfad als Lernspirale gestaltet werden kann. Es empfiehlt sich, einzelne Einheiten herauszugreifen.)
- E-Learning-Lernspirale zum Thema Mittelwert (verstärkter Einsatz von Informationstechnologie, unter anderem einer Lernplattform, zur Dokumentation und Präsentation)
- Vorschläge für den begleitenden Einsatz einer Lernplattform

**Lernspirale zum Thema
Beschreibende Statistik
4. Klasse
von
Gabriele Bleier, Franz Embacher und Evelyn Stepancik**

Themenbereich/Inhalte:	
Zentral- und Streuungsmaße, Boxplot	
Fachliche Voraussetzungen:	Fachliche Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • Diagramme lesen und deuten • Daten der Größe nach ordnen • Mittelwert(arithmetisches Mittel) intuitiv begreifen • negative Zahlen kennen • Quadratwurzel ermitteln können 	<ul style="list-style-type: none"> • die Zentralmaße arithmetisches Mittel (kurz: Mittelwert) und Median (Zentralwert) ermitteln können • Eigenschaften von Mittelwert und Median anhand von Daten beschreiben können • die Streuungsmaße Minimum, Maximum, unteres und oberes Quartil sowie Standardabweichung ermitteln können • Eigenschaften von Standardabweichung und Interquartilsabstand anhand von Daten beschreiben können • Auswirkung von Ausreißern auf Zentral- und Streuungsmaße beschreiben können • Boxplot zeichnen und deuten können • Zentral- und Streuungsmaße auf verschiedene Sachsituationen anwenden können • große Datensätze auswerten können

Methodische Voraussetzungen:	Methodische Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • Informationen selbstständig schriftlich festhalten können • mit Partner und in Gruppe arbeiten können • Methoden zur Partner- und Gruppenfindung kennen • Ergebnisse präsentieren können • Kugellager • Gruppenrallye 	<ul style="list-style-type: none"> • mathematische Inhalte selbstständig erarbeiten können • über mathematische Inhalte sprechen können • wichtige Informationen filtern und schriftlich festhalten können • Eigenverantwortung beim Lernprozess stärken • elektronische Lernhilfen sinnvoll nutzen können

Technische Voraussetzungen:	Technische Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • PC mit Internetzugang oder PC mit dem installiertem Lernpfad Beschreibende Statistik • Beamer • Bei Verwendung von CAS-Rechnern empfiehlt sich ein Overhead-Display und ein Overhead-Projektor. • Dateien öffnen, schließen und speichern können • auf einer Webseite navigieren können • Berechnungen am numerischen Taschenrechner durchführen können • Tabellenkalkulation Excel öffnen und einfache Eingaben vornehmen können • ggf. auf einem CAS-Rechner Voyage/TI92/TI89 im Algebrafenster arbeiten können: Zahlen eingeben und Berechnungen durchführen können, Wert und Formeln unter einer Variable speichern können, exakte und näherungsweise Berechnung anwenden können 	<ul style="list-style-type: none"> • Zentral- und Streuungsmaße großer Datensätze mit elektronischen Hilfsmitteln ermitteln können • Boxplot mit elektronischen Hilfsmitteln erstellen können • Flash-Animationen zur Visualisierung von Zusammenhängen und Eigenschaften nutzen können • technische Anleitungen (Eingabeanweisungen, Screenshots und Videosequenzen) selbstständig nutzen können

Makrospirale zur beschreibenden Statistik

Arbeitsinseln mit grau hinterlegter Nummer sind ausgearbeitet.

Vorwissen /Voreinstellungen aktivieren

A 00	Einführung: Was ist beschreibende Statistik? Was sind Daten? Wiederholung: einfache Säulendiagramme lesen
------	--

Neue Kenntnisse/ Verfahrensweisen erarbeiten

A 01	Mittelwert ermitteln, darstellen, Eigenschaften erarbeiten und anwenden (2 Unterrichtseinheiten)
A 02	Median ermitteln, darstellen, Eigenschaften erarbeiten und anwenden, mit dem Mittelwert vergleichen – Kugellager (1 Unterrichtseinheit)
A 03	Unteres und oberes Quartil ermitteln, darstellen, Eigenschaften erarbeiten und anwenden – Gruppenrallye (1 Unterrichtseinheit)
A 04	Boxplot zeichnen und deuten (1 Unterrichtseinheit)
A 05	Standardabweichung ermitteln, Eigenschaften erarbeiten und anwenden, mit dem Interquartilsabstand vergleichen (1 Unterrichtseinheit)

Komplexere Anwendungs-/Transferaufgaben

	sind jeweils in den einzelnen Mikrospiralen enthalten
A 06	Variante: Das Beispiel Österreichische Bevölkerung nach Regionen wird erst in einer abschließenden Unterrichtseinheit bearbeitet und entfällt daher in den einzelnen Arbeitsinseln.

Arbeitsmittel für alle Arbeitsinseln sind PC und der Lernpfad Beschreibende Statistik sowie Heft für Mitschriften.

Mikrospirale A1: Mittelwert

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
Beginn der 1.Unterrichtseinheit:				
1	Die Lernschritte <i>Notendurchschnitt</i> und <i>Mittelwert von 2 Zahlen/3 Zahlen/4 Zahlen/5 Zahlen</i> werden in Einzelarbeit durchgeführt und die Ergebnisse im Heft festgehalten.	EA	20'	eventuell Kopien der Angaben zum Mittelwert von 2 Zahlen/3 Zahlen/4 Zahlen/5 Zahlen
2	Die SchülerInnen bilden je nach räumlichen Möglichkeiten im Unterrichtsraum 3er bis 5er Gruppen und vergleichen ihre Ergebnisse. Anschließend werden die Aufgaben zu den Körpergrößen in der Gruppe durchgeführt.	GA	10'	
3	Eine Gruppe präsentiert die Aufgaben zum Mittelwert für 5 Zahlen und wiederholt die allgemeine Formel zur Berechnung.	Plenum	5'	
4	Ausgewählte Aufgaben aus dem Lernschritt Übungsaufgaben (Bsp. 1 bis 5) werden in Einzelarbeit bzw. als Hausübung bearbeitet.	EA		eventuell Kopien der Angaben Übungsaufgaben zum Mittelwert
Beginn der 2.Unterrichtseinheit:				
5	Der Lernschritt <i>Formel: Mittelwert</i> wird selbstständig bearbeitet und die wichtigsten Informationen werden im Heft festgehalten.	EA	10'	
6	Beispiel 6 und 7 aus dem <i>Lernschritt Übungsaufgaben</i> werden in Einzelarbeit bearbeitet.	EA	5'	
7	Zu zweit werden die Aufgaben der Einzelarbeit bzw. der Hausübung besprochen. Das <i>Beispiel Venedig</i> wird mit CAS und/oder Excel berechnet und die Ergebnisse im Heft festgehalten bzw. gespeichert.	PA	5'	eventuell Kopien mit der Angabe zum Venedigbeispiel
8	Die Ergebnisse werden mit einem anderen Paar verglichen. Exceldateien werden gespeichert oder ausgedruckt.	GA	5'	
9	eventuell: Zu zweit wird das <i>Beispiel Österreichische Bevölkerung nach Regionen</i> mit Excel bearbeitet: Dabei soll ein Schüler/eine Schülerin das Jahr 2001, der/die andere das Jahr 2002 bearbeiten. Das Ergebnis wird wieder mit einem anderen Paar verglichen.	PA	10'	Achtung: Daten für 2001 und 2002
	alternativ: als Hausübung oder Arbeitsinsel A 06	EA		
10	Nach dem Zufallsprinzip werden 1 oder 2 SchülerInnen ausgewählt, die das Beispiel Venedig bzw. eventuell Österreichische Bevölkerung präsentieren.	Plenum	5'	

Mikrospirale A2: Median

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Die SchülerInnen bearbeiten die Aufgaben <i>Stirnreihe</i> und <i>Bleistifte</i> und arbeiten die <i>Definition</i> des Medians durch. Im Heft sind ausreichende Aufzeichnungen zu führen.	EA	10'	Bleistifte
2	Zu zweit wird die Vorgangsweise bei den Aufgaben <i>Stirnreihe</i> und <i>Bleistifte</i> verglichen. Außerdem wird beim Partner/bei der Partnerin kontrolliert, ob die Aufzeichnungen zur <i>Definition</i> richtig und vollständig sind.	PA	5'	
3	Zu zweit wird der Lernschritt <i>Ausreißer</i> mithilfe der Flash-Animation bearbeitet. Die Antworten werden im Heft festgehalten.	PA	10'	
4	SchülerInnen mit einer Katalognummer der ersten Klassenhälfte bearbeiten in Partnerarbeit Beispiel 1 von den <i>Übungsaufgaben</i> , die anderen SchülerInnen Beispiel 2 von den <i>Übungsaufgaben</i> . Kontrolle durch Vergleich mit einem anderen Paar.	PA	10'	eventuell Kopien der Übungsaufgaben
5	Kugellager: Austausch der Beispiele <ul style="list-style-type: none"> - Gruppe 1 erklärt Beispiel 1 - Gruppe 2 wiederholt Vorgangsweise für Beispiel 1 - Gruppe 2 erklärt Beispiel 2 - Gruppe 1 wiederholt Beispiel 1 	Plenum	10'	
6	als Hausübung: Das Beispiel der anderen Gruppe wird ausgearbeitet. Beispiel 3 der Übungsaufgaben eventuell Beispiel <i>Österreichische Bevölkerung nach Regionen</i>	EA		

Mikrospirale A3: Quartile

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Informationssuche mit Bewegung zur <i>Definition der Quartile</i> : pro ausgehängter Information eine Gruppe Hinweis: Die Arbeitsblätter der SchülerInnen müssen stets verdeckt hingelegt werden.	EA	10'	Definition der Quartile 2x aufhängen Lückentext kopieren (ist im Worddokument zur Definition enthalten)
2	Die SchülerInnen bearbeiten das <i>Beispiel</i> zu den Quartilen mithilfe der Flash-Animation.	EA	10'	
3	Gruppenrallye: In 4er-Gruppen werden die Beispiele 1 und 3 der <i>Übungsaufgaben</i> zu den Quartilen arbeitsteilig gelöst und die Vorgangsweise besprochen.	GA	10'	Lösung im Heft oder auf Extrablättern; eventuell Kopien der Übungsaufgaben

	Die Ergebnisse werden von einer anderen Gruppe anhand der Lösungen verbessert und bewertet.	GA	5'	Lösungen mit Folie oder Beamer vorbereiten
	Zwei SchülerInnen präsentieren die beiden Beispiele.	Plenum	5'	
4	eventuell: Zu zweit wird das Beispiel <i>Österreichische Bevölkerung nach Regionen</i> für das Jahr 2001 gelöst.	PA	5'	
5	Hausübung: Beispiele 1 und 3 werden im SÜ-Heft vollständig und richtig dokumentiert. Beispiel 2 der Übungsaufgaben eventuell Beispiel <i>Österreichische Bevölkerung nach Regionen</i> für das Jahr 2001 (noch einmal) selbstständig lösen.	EA		

Übungsbeispiele zum Median (Zentralwert) und den Quartilen Lösungen und Bewertung für die Gruppenrallye

	Lösung	Bewertung
1a	Median: 55	1
	Satz	1
1b	Minimum: 25, Maximum: 58, q1: 51, q3: 56	4
1c	Median: 55.5 Minimum: 50, Maximum: 58 q1: 52, q3: 56	5
	Beobachtung	1
	Erklärung	1
3a	3.1 kg	1
3b	1.2 kg und 4.2 kg	2
3c	2.5 kg und 3.5 kg	2
3d	50 Katzen	1
3e	75 Katzen	1
3f	Die leichteste Katze wog 1,2 kg, die schwerste Katze 4,2 kg. 50% der Katzen waren leichter als 3,1 kg und 50% waren schwerer als 3,1 kg. Die mittlere Hälfte der Katzen wog zwischen 2,5 kg und 3,5 kg.	3
	Gesamtpunkte:	maximal 23

Lösung Beispiel 2:

2.	Median: 1.7, Mittelwert: 1.95
	ein beliebiger Wert muss um mehr als 3 verkleinert werden (z.B. -3.0 statt 1.0) neuer Mittelwert, neuer Median
	Mittelwert = Median: z.B. -2 statt 1.0 der gegebenen Liste

Mikrospirale A4: Boxplot

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Die SchülerInnen lernen die Bedeutung und Erstellung eines Boxplots kennen: Lernschritt <i>Boxplot zeichnen</i> .	EA	10'	
2	Anhand der Anleitung wird ein Boxplot am Papier und mit einem elektronischen Hilfsmittel gezeichnet: <i>Beispiel A</i> Kontrolle durch Vergleich der händischen Darstellung mit der elektronischen. Anmerkung zur Partnerwahl – die Summe der Katalognummern muss ungerade sein.	PA	15'	
3	Interpretieren und Erstellen eines Boxplots: SchülerInnen mit gerader Katalognummer bearbeiten Beispiel B, SchülerInnen mit ungerader Katalognummer Beispiel C. Lückentext ausfüllen bzw. auf einen Zettel schreiben.	EA	5'	eventuell Kopien zu Bsp. b und C in halber Klassenstärke oder Zettel
	Die Lückentexte werden mit dem Partner getauscht. Anhand des Lückentextes wird ein Boxplot gezeichnet.	EA	5'	
	Gegenseitige Kontrolle und Besprechung der Darstellungen	PA	2'	
4	Ein zufällig gewähltes Paar erklärt anhand von Beispiel D die Erstellung und die Deutung eines Boxplots.	Plenum	5'	
5	Mithilfe der grafischen Darstellung einer Flash-Animation werden die <i>Interpretations- und Vergleichsaufgaben</i> gelöst und dabei das Interpretieren und Vergleichen von Boxplots gefestigt.	PA	5'	
6	als Hausübung: die <i>Übungsaufgaben</i> zum Boxplot	EA		

Mikrospirale A5: Standardabweichung

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Der Begriff der Standardabweichung wird in einem <i>Film-Clip</i> eingeführt.	EA	10'	Film-Clip
2	Die SchülerInnen erarbeiten anhand der Definition und einer schrittweisen Anleitung die Berechnung der Standardabweichung: <i>Definition Standardabweichung</i>	EA	10'	

3	Die SchülerInnen vergleichen ihre Berechnungen.	PA	2'	
4	Die SchülerInnen erarbeiten die Berechnung der Standardabweichung mit einem elektronischen Hilfsmittel anhand der <i>Werkzeugtipps</i> .	PA	5'	
5	Die SchülerInnen lösen arbeitsteilig mithilfe eines elektronischen Werkzeugs die Übung <i>Routenwahl</i> und interpretieren mithilfe des Mittelwertes und der Standardabweichung die Daten. Verfassen eines Briefes.	PA	10'	
6	Zwei SchülerInnen präsentieren ihren Brief an Herrn Strasser.	Plenum	5'	
7	Hausübung: Überarbeiten der Übung <i>Routenwahl</i> Die SchülerInnen untersuchen in dem Lernschritt <i>Streuung</i> mithilfe einer Flash-Animation die Zusammenhänge zwischen Standardabweichung und Mittelwert bzw. Quartilen bzw. Ausreißern.	EA		

Mikrospirale A6: Österreichische Bevölkerung nach Regionen

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Zu zweit wird das Beispiel <i>Österreichische Bevölkerung nach Regionen</i> im Abschnitt Mittelwert mit Excel bearbeitet: Dabei soll ein Schüler/eine Schülerin das Jahr 2001, der/die andere das Jahr 2002 bearbeiten. Das Ergebnis wird mit einem anderen Paar verglichen.	PA	10'	Achtung: Daten für 2001 und 2002
2	Im Beispiel <i>Österreichische Bevölkerung nach Regionen</i> im Abschnitt Median werden die Daten für das Jahr 2001 von SchülerIn 1 berechnet. Anschließend kann in der ersten Datei (siehe Mittelwert) von SchülerIn 2 ebenfalls der Median für 2002 ermittelt werden. Unterschiede zu 2001 sollen erarbeitet werden.	PA	10'	
3	nach einem Partnerwechsel: Das Beispiel <i>Österreichische Bevölkerung nach Regionen</i> im Abschnitt Quartile wird von SchülerIn 1 für das Jahr 2001 gelöst. Anschließend werden in der ersten Datei (siehe Mittelwert) von SchülerIn 2 ebenfalls die Quartile für 2002 ermittelt. Unterschiede zu 2001 sollen erarbeitet werden.	PA	10'	
4	nach eine Partnerwechsel: Zum Beispiel <i>Österreichische Bevölkerung nach Regionen</i> wird entweder für 2001 oder für 2002 ein Boxplot gezeichnet.	PA	10'	
5	Mit eine weiteren Paar werden die grafischen Darstellungen ausgetauscht. Die SchülerInnen sollen untersuchen, ob die Darstellung den jeweiligen Daten entspricht.	GA	5'	
6	Hausübung: zusammenfassende Ausarbeitung für ein Jahr mit Angabe der Daten, der berechneten Zentral- und Streuungsmaße und einem passenden Boxplot in elektronsicher Form	EA		

**eLearning-Lernspirale zum Thema
Beschreibende Statistik – Mittelwert
4. Klasse**

**von
Gabriele Bleier, Franz Embacher und Evelyn Stepancik**

Themenbereich/Inhalte:

Mittelwert

Fachliche Voraussetzungen:	Fachliche Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • Diagramme lesen und deuten • Daten der Größe nach ordnen • Mittelwert(arithmetisches Mittel) intuitiv begreifen • negative Zahlen kennen • Quadratwurzel ermitteln können 	<ul style="list-style-type: none"> • das arithmetische Mittel (kurz: Mittelwert) ermitteln können • Eigenschaften des Mittelwerts beschreiben können • große Datensätze auswerten können

Methodische Voraussetzungen:	Methodische Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • Informationen selbstständig schriftlich festhalten können • mit Partner und in Gruppe arbeiten können • Methoden zur Partner- und Gruppenfindung kennen • Ergebnisse präsentieren können • Eventuell ein Portfolio anlegen und bearbeiten können • Projektdokumentation mittels PC anfertigen können 	<ul style="list-style-type: none"> • mathematische Inhalte selbstständig erarbeiten können • über mathematische Inhalte sprechen können • wichtige Informationen filtern und schriftlich festhalten können • Eigenverantwortung beim Lernprozess stärken • elektronische Lernhilfen sinnvoll nutzen können

Technische Voraussetzungen:	Technische Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • PC mit Internetzugang oder PC mit dem installiertem Lernpfad Beschreibende Statistik • Beamer • Bei Verwendung von CAS-Rechnern empfehlen sich ein Overhead-Display und ein Overhead-Projektor. • Dateien öffnen, schließen und speichern können • auf einer Webseite navigieren können • Berechnungen am numerischen Taschenrechner durchführen können • Tabellenkalkulation Excel öffnen und einfache Eingaben vornehmen können 	<ul style="list-style-type: none"> • Arithmetisches Mittel großer Datensätze mit elektronischen Hilfsmitteln ermitteln können • Flash-Animationen zur Visualisierung von Zusammenhängen und Eigenschaften nutzen können • technische Anleitungen (Eingabeanweisungen, Screenshots und Videosequenzen) selbstständig nutzen können • Dateien in der Plattform veröffentlichen • Plattformeinträge lesen und kommentieren • Wiki bearbeiten können

<ul style="list-style-type: none"> • ggf. auf einem CAS-Rechner Voyage/TI92/TI89 im Algebrafenster arbeiten können: Zahlen eingeben und Berechnungen durchführen können, Wert und Formeln unter einer Variable speichern können, exakte und näherungsweise Berechnung anwenden können • Forum, Wiki, Abstimmungs- und eventuell Quizmodule in Plattformen nutzen können • Wechsel zwischen Textverarbeitung, Tabellenkalkulation, Lernplattform und Lernpfad vollziehen können 	
---	--

Makrospirale zur beschreibenden Statistik

Arbeitsinseln mit grau hinterlegter Nummer sind ausgearbeitet.

Vorwissen /Voreinstellungen aktivieren

A 00	Einführung: Was ist beschreibende Statistik? Was sind Daten? Wiederholung: einfache Säulendiagramme lesen
------	--

Neue Kenntnisse/ Verfahrensweisen erarbeiten

A 01	Mittelwert ermitteln, darstellen, Eigenschaften erarbeiten und anwenden (2 Unterrichtseinheiten)
A 02	Median ermitteln, darstellen, Eigenschaften erarbeiten und anwenden, mit dem Mittelwert vergleichen (1 Unterrichtseinheit)
A 03	Unteres und oberes Quartil ermitteln, darstellen, Eigenschaften erarbeiten und anwenden (1 Unterrichtseinheit)
A 04	Boxplot zeichnen und deuten (1 Unterrichtseinheit)
A 05	Standardabweichung ermitteln, Eigenschaften erarbeiten und anwenden, mit dem Interquartilsabstand vergleichen (1 Unterrichtseinheit)

Komplexere Anwendungs-/Transferaufgaben

	sind jeweils in den einzelnen Mikrospiralen enthalten
A 06	Variante: Das Beispiel <i>Österreichische Bevölkerung nach Regionen</i> wird erst in einer abschließenden Unterrichtseinheit bearbeitet und entfällt daher in den einzelnen Arbeitsinseln.

Arbeitsmittel für alle Arbeitsinseln sind PC, der Lernpfad Beschreibende Statistik, die verwendete Lernplattform sowie Heft für Mitschriften.

Mikrospirale A1: Mittelwert

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
Beginn der 1.Unterrichtseinheit:				
1	Die Lernschritte <i>Notendurchschnitt</i> und <i>Mittelwert von 2 Zahlen/3 Zahlen/4 Zahlen/5 Zahlen</i> werden in Einzelarbeit durchgeführt, die Ergebnisse mittels PC (Word) festgehalten und in einem Forum veröffentlicht.	EA	20'	PC, Word,
Plattform: Ergebnisse der Einzelarbeit in einem Forum veröffentlichen.				
2	Die SchülerInnen bilden je nach räumlichen Möglichkeiten im Unterrichtsraum 3er bis 5er Gruppen und vergleichen ihre Ergebnisse. Anschließend werden die Aufgaben zu den Körpergrößen in der Gruppe durchgeführt.	GA	10'	
Plattform: Ergebnisse der Aufgabe Körpergröße in einem weiteren Forum veröffentlichen.				
3	Eine Gruppe präsentiert die Aufgaben zum Mittelwert für 5 Zahlen und wiederholt die allgemeine Formel zur Berechnung.	Plenum	5'	
Plattform (+ Beamer): Präsentation erfolgt mittels Beamer und Plattform.				
4	Ausgewählte Aufgaben aus dem Lernschritt Übungsaufgaben (Bsp. 1 bis 5) werden in Einzelarbeit bzw. als Hausübung bearbeitet.	EA		eventuell Kopien der Angaben Übungsaufgaben zum Mittelwert
Plattform: Eventuell die Hausübungen in einem Forum veröffentlichen, damit sie in Schritt 7 allen zur Verfügung stehen.				
Beginn der 2.Unterrichtseinheit:				
5	Der Lernschritt <i>Formel: Mittelwert</i> wird selbstständig bearbeitet und die wichtigsten Informationen werden mittels PC festgehalten.	EA	10'	PC, Word
Plattform: Falls die Plattform ein Glossar zur Verfügung stellt, kann ein Schüler/eine Schülerin im Glossar den Begriff Mittelwert erklären.				

6	Beispiel 6 und 7 aus dem <i>Lernschritt Übungsaufgaben</i> werden in Einzelarbeit bearbeitet.	EA	5'	
Plattform: Ergebnisse der Einzelarbeit in einem Forum veröffentlichen.				
7	Zu zweit werden die Aufgaben der Einzelarbeit bzw. der Hausübung besprochen. Das <i>Beispiel Venedig</i> wird mit CAS und/oder Excel berechnet und die Ergebnisse im Heft festgehalten bzw. gespeichert.	PA	5'	eventuell Kopien mit der Angabe zum Venedigbeispiel
Plattform: Ergebnisse der Partnerarbeit in einem Forum veröffentlichen.				
8	Die Ergebnisse werden mit einem anderen Paar verglichen. Exceldateien werden gespeichert oder ausgedruckt.	GA	5'	
9	eventuell: Zu zweit wird das <i>Beispiel Österreichische Bevölkerung nach Regionen</i> mit Excel bearbeitet: Dabei soll ein Schüler/eine Schülerin das Jahr 2001, der/die andere das Jahr 2002 bearbeiten. Das Ergebnis wird wieder mit einem anderen Paar verglichen.	PA	10'	Achtung: Daten für 2001 und 2002
Plattform: Ergebnisse der Partnerarbeit in einem Forum veröffentlichen.				
	alternativ: als Hausübung oder Arbeitsinsel A 06	EA		
Plattform: Falls ein Wiki vorhanden ist, können die Schüler/innen als Hausübung in Gruppenarbeit einen erklärenden Text zum Mittelwert verfassen. Falls kein Wiki vorhanden ist, kann diese Aufgabe als Kettenposting in einem Forum oder als Kettenmail bearbeitet werden.				
10	Nach dem Zufallsprinzip werden 1 oder 2 SchülerInnen ausgewählt, die das Beispiel Venedig bzw. eventuell Österreichische Bevölkerung präsentieren.	Plenum	5'	

**Begleitender Einsatz von Lernplattformen zur
Beschreibende Statistik
4. Klasse
von
Gabriele Bleier, Franz Embacher und Evelyn Stepancik**

Die ersten vier Arbeitsschritte können bereits vor dem Lernpfad zur beschreibenden Statistik oder auch parallel dazu erledigt werden. Der fünfte Arbeitsschritt kann allerdings erst nach Absolvierung des Lernpfads erfolgen.

Einsatz eines Forums

Erhebung des Evaluationsthemas:

Schon bevor die Schüler/innen die mathematischen Inhalte aus dem Bereich beschreibende Statistik kennen lernen, können die Schüler/innen in einem Forum diskutieren, zu welchem Thema eine Befragung in allen Klassen ihrer Schulstufe durchgeführt werden soll.

Arbeitsaufwand für Schüler/innen: etwa 1 Woche

Lehrer/innenaktivitäten:

- Eröffnung des Forums mit gezielter Fragestellung.
- Mitlesen im Forum, eventuell Einträge von Schüler/innen kommentieren.

- Zusammenfassen der gewünschten Evaluationsthemen am Ende der Woche (kann auch an Schüler/innen übergeben werden).
- Schüler/innenaktivitäten dokumentieren (eventuell direkt in der Plattform, siehe nebenstehende Abbildung).



Einsatz eines Abstimmungsinstruments

Abstimmung über das Evaluationsthema:

Fast jede Plattform verfügt über ein Abstimmungsinstrument. Die Klasse soll über das zu evaluierende Thema abstimmen¹. Diese Aufgabe kann durchaus von den Schüler/innen zuhause erledigt werden.

Falls keine Abstimmungsinstrument in der Plattform zur Verfügung steht, kann die Abstimmung natürlich auf herkömmliche Art geschehen.

Arbeitsaufwand für Schüler/innen: etwa 30 Minuten

Lehrer/innenaktivitäten:

- Zusammenstellung der Abstimmung.
- Zusammenfassen der Ergebnisse der Abstimmung.

Einsatz eines Wikis

Erarbeitung eines Fragebogens mittels Wiki:

Falls die Plattform ein Wiki zur Verfügung stellt, können die Schüler/innen (eventuell in Gruppen) Fragebögen zum ausgewählten Thema erarbeiten.

Richtlinie zur Gestaltung von Fragebögen können an dieser Stelle thematisiert werden.

Die Fragebögen können aber auch in Deutsch oder Informatik erarbeitet werden.

Einen Schüler / eine zum/zur Endredakteur/in ernennen.

Einsatz eines Forums

Erarbeitung eines Fragebogens mittels Forum (Kettenposting):

Falls kein Wiki zur Verfügung steht, können die Schüler/innen in Gruppen Fragebögen erarbeiten.

Zum Beispiel: Ein Schüler / eine Schülerin beginnt mit der Erstellung der ersten Frage.

Nächste/r Schüler/in entwickelt die zweite Frage. Usw.

Es hat sich als praktisch erwiesen, wenn vom Lehrer / von der Lehrerin die Bearbeitungsreihenfolge vorgegeben wird.

Die Fragebögen können aber auch in Deutsch oder Informatik erarbeitet werden.

Einen Schüler / eine zum/zur Endredakteur/in ernennen.

Arbeitsaufwand für Schüler/innen: 1 Woche

Lehrer/innenaktivitäten:

- Initiierung des Wikis, Gruppeneinteilung.
- Eröffnung des Forums, Gruppeneinteilung, Vorgabe der Reihenfolge.
- Mitlesen im Wiki oder im Forum, eventuell Kommentare und Hinweise veröffentlichen.
- Deadline für Fertigstellung des Fragebogens ausgeben, Ergebnisse einsammeln.
- Schüler/innenaktivitäten dokumentieren (eventuell direkt in der Plattform).

¹ Die Daten der Evaluierung können ebenfalls zur Auswertung herangezogen werden. Die meisten Plattformen liefern eine sehr brauchbare Zusammenstellung der Daten.

Einsatz eines Abstimmungs Instruments

4. Durchführung der Befragung:

Wie bereits bei der Abstimmung über das Evaluationsthema ausgeführt, kann der Fragebogen mittels Plattform oder auch auf Papier beantwortet werden.

Arbeitsaufwand für Schüler/innen: 1 Stunde

Lehrer/innenaktivitäten:

- Zusammenstellung des Fragebogens mit dem entsprechenden Instrument oder Kopien (Papier) anfertigen.
- Daten als xls-Datei zur Weiterverwendung aufbereiten.

Einsatz eines Glossars

5. Zusammenfassung und Vertiefung des neuen Wissens:

Falls die Lernplattform auch ein Glossar zur Verfügung stellt, können die Schüler/innen (eventuell in Gruppen) alle neuen Begriffe im Glossar aufschreiben und mit eigenen Worten erklären. Dieses Glossar kann eine wertvolle Nachschlaghilfe beim Lernen sein.

Arbeitsaufwand für Schüler/innen: 1 Woche

Lehrer/innenaktivitäten:

- Eröffnung des Glossars, Beschreibung von Sinn und Zweck, Gruppeneinteilung.
- Einträge im Glossar lesen (eventuell danach erst freischalten), Tipps und Anmerkungen geben.

Weitere Materialien

Als weitere Materialien werden

- ein so genannter Themenplan (als Arbeitsplan für die Schüler und Schülerinnen),
- eine Arbeitsanleitung für die Schüler und Schülerinnen für eine reine E-Learning-Sequenz,
- ein so genannter „advanced organizer“ als Vorbereitung für den Lernpfad zum Anknüpfen an Vorwissen und zur Vorschau auf die Lerninhalte des Lernpfads und
- eine ZIP-Datei mit den Lösungen

zur Verfügung gestellt.

Themenplan mit Pflicht- und Wahlaufgaben

min	q ₁	med	q ₃	max
11	12	13	14	15
16	17	18		

Beschreibende Statistik

Name:

Alle Lernschritte findest du im Lernpfad „Beschreibende Statistik“ auf <http://www.austromath.at/medienvielfalt/>

Zeitplan: 6 Unterrichtsstunden. Die 7. Unterrichtsstunde ist für die Präsentation zu den vorgegebenen Themen (siehe Extraeinteilung) vorgesehen (max. 5 Minuten pro Gruppe). Siehe auch Anmerkungen am Ende des Plans!

Du brauchst:  

Nr.	Titel		Arbeitsauftrag	P/W	✓
Mittelwert					
1	Notendurchschnitt	😊	 : Antwort	P	
2	Mittelwert von 2 Zahlen	😊	 : Zusammenfassung	W	
3	Mittelwert von 3 Zahlen	😊😊	 : Zusammenfassung	W	
4	Mittelwert von 4 Zahlen	😊😊😊	 : Zusammenfassung	P	
5	Mittelwert von 5 Zahlen	😊😊😊😊	 : Zusammenfassung	P	
6	Formel	😊	 : Formeln	P	
7	Übungsaufgaben	😊	HÜ: 	P	
8	Venedig	😊😊	<input checked="" type="checkbox"/> mit Excel berechnen; Antwort 	P	
9	Österreich. Bevölkerung	😊😊	<input checked="" type="checkbox"/> mit Excel berechnen; Ergebnis 	W	
Median					
10	Stirnreihe	😊	 : Antwort	P	
11	Bleistifte	😊😊	 : Antworten	P	
12	Definition	😊	 : wichtigste Informationen	P	
13	Ausreißer	😊😊	 : Zusammenfassung, Erklärung	P	
14	Übungsaufgaben	😊	HÜ: 	P	
15	Österreich. Bevölkerung	😊😊	<input checked="" type="checkbox"/> mit Excel berechnen; Ergebnis 	W	
Quartile					
16	Definition	😊	 : neue Begriffe und Bedeutung	P	
17	Beispiel	😊😊	 : Beispiel 5	P	

18	Übungsaufgaben		HÜ: 	P	
19	Österreich. Bevölkerung		 mit Excel berechnen; Ergebnis 	W	
BoxPlots					
20	BoxPlot zeichnen		 : Zeichnung	P	
21	Beispiel A		 : Zeichnung	P	
22	Beispiel B oder C		 : Text zum BoxPlot	P	
23	Beispiel C oder B		mit Partner/in tauschen  : BoxPlot zum Text zeichnen	P	
24	Beispiel D		Dialog mit Partner/in	P	
25	Übungsaufgaben		HÜ: 	P	
26	Interpretations- und Vergleichsaufgaben		 : Antworten	P	
Standardabweichung					
27	Film		Du kannst das Video anhalten, zurückspulen etc.	P	
28	Definition		 : Erklärung der Standardabweichung, Formel, Beispiel für die für gegebenen Zahlen berechnen	P	
29	Streuung		 : Zusammenfassung	P	
30	Routenwahl		HÜ: 	P	

P/W Pflicht/Wahl  Antworten in der Projektmappe aufschreiben
 ✓ Kontrolliert von ...  ausdrucken

Die Projektmappe muss spätestens am abgegeben werden!

Deine **Projektmappe** enthält:

- o alle deine **Aufzeichnungen** (Definitionen, Merksätze, Skizzen, Rechnungen, ...) - Achte besonders darauf, deine Projektmappe übersichtlich zu gestalten! Vergiss nicht auf Lernschrittnummer, Überschriften, Beispielangaben, etc. !
- o alle Hausübungsbeispiele

Zur **Beurteilung** des Projektes zählen: Projektmappe (Vollständigkeit, Ausführung, ...), Arbeitshaltung, Hausübung, freiwillige Zusatzübungen (Wahlstationen, Bonus-Hausübung) .
 Viel Vergnügen!

E-Learning-Sequenz Beschreibende Statistik

Arbeitsauftrag

Den **Lernpfad** findest auf www.austromath.at/medienvielfalt.

Das Projekt dauert **6 Unterrichtsstunden**: vom 16. bis 28. November 2006

In den folgenden 6 Unterrichtseinheiten arbeitest du eigenverantwortlich und selbstständig zum Thema Beschreibende Statistik. Du lernst wichtige Maße für den Durchschnitt und die Abweichung vom Durchschnitt kennen. Außerdem erfährst du, wie Daten mithilfe eines Boxplots dargestellt werden können. Animationen und Videos unterstützen dich beim Lernen. Halte dich an die Angaben, ob du alleine, mit Partner/in oder in einer Gruppe arbeiten sollst. Das Gleiche gilt für Anweisungen, ob du etwas aufschreiben sollst.

Bevor du beginnst, lege eine Übersicht und einen Zeitplan in deiner Projektmappe an (siehe unten).

Als **Hausübung** sind folgende Lernschritte zu erledigen und auf Einlageblättern zum jeweiligen Termin abzugeben:

- Mittelwert: Übungsaufgaben bis 21.11.
- Median: Übungsaufgaben bis 23.11.
- Quartile: Übungsaufgaben bis 25.11.
- Boxplot: Übungsaufgaben bis 28.11.
- Standardabweichung: Beispiel Routenwahl bis 30.11.

Auf unserer Lernplattform sind Themenvorschläge für abschließende Kurzpräsentationen am 2.12. zu finden. Die Zuordnung erfolgt per Zufall. Die Präsentation hat gemeinsam zu erfolgen und dauert maximal 5 Minuten. Die Art der Präsentation (Plakat, Handout, PowerPoint, Excel, Overheadfolie) kann frei gewählt werden.

Die **Projektmappe** ist händisch oder am Computer zu führen und enthält

- eine **Übersicht** über die **Inhalte** des Lernpfades (MindMap o.Ä.),
- eine **Zeitplanung**, in der genau eingetragen ist, wann du was machen möchtest bzw. wann du was mit wem gemacht hast (sie könnte etwa so aussehen),

Was?	Wann geplant?	Wann durchgeführt?	Dauer	Mit wem?

- alle deine **Aufzeichnungen**: Rechnungen, Merksätze, Skizzen, Probleme usw.,
- sämtliche **Übungen**, die du zuhause erledigst,
- **Arbeitsblätter**, die du ausgedruckt hast.

Achte besonders darauf, deine Projektmappe übersichtlich zu gestalten! Vergiss nicht auf Überschriften, Angaben etc. Die Materialien sollten in der richtigen Reihenfolge festgehalten und gesammelt werden.

Das **Protokoll** zu jedem Lernschritt sollte Folgendes mindestens in deiner Projektmappe stehen:

- Titel des Lernschritts
- kurze Beschreibung des Inhaltes
- Hattest du Probleme mit dem Lernschritt? Wenn ja, welche?

Sollten Fragen bzw. Probleme auftauchen, dann stelle sie auf unserer Plattform ins Netz. Beteilige dich am Austausch über die Plattform. Dort erhältst du auch Hilfe von deinem Lehrer.

Zur **Beurteilung** des Projektes zählen

- Projektmappe (Vollständigkeit, Ausführung der Arbeitsaufträge, Sorgfalt ...)
- Arbeitshaltung (Selbstständigkeit, Beteiligung am Diskussionsforum am Infoportal, ...)
- Einhaltung von Terminen
- Freiwillige Zusatzübungen
- Leistung bei der Präsentation

Die Projektmappe (mit Hausübungen) muss bis 30. November abgegeben werden.

Advanced Organizer

Beschreibende Statistik

www.austromath.at/medienvielfalt/

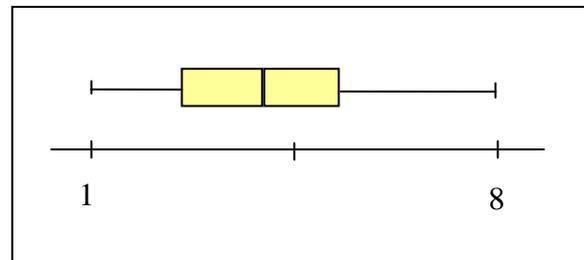
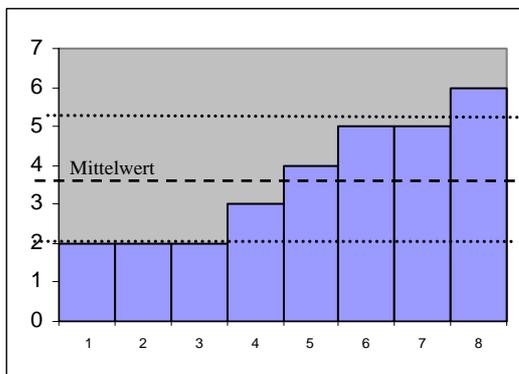
Mittelwert m , μ , \bar{x}

Median $med.$, z

Standardabweichung s , σ

Quartilsabstand q_1 , q_3

Boxplot



Animationen
Video
Taschenrechner
Excel

Beispiele:
Venedig
Österreichische
Bevölkerung

Lern- und Arbeitsphase: 14.November bis 26.November 2005

Aufzeichnungen im SÜ-Heft

Hausübungen im HÜ-Heft

Beurteilung:

- Übersichtlichkeit (Gliederung, Überschriften – Thema, Beispiel)
- alle Formeln und Definitionen
- Aufzeichnungen zu Beispielen
- Erklärungen
- Angabeblätter (eingeklebt)
- Vollständigkeit
- sinnvolle Reihenfolge

Abgabe des SÜ-Heftes: 28.November 2005

5. Ergebnisse der internen Evaluation

Zum didaktisch-methodischen Kommentar

Der Lernpfad weist viele hilfreiche methodische Hinweise (Lernspirale, E-Learning-Lernspirale, E-Learning-Projekt mit/ohne Lernplattform, Themenplan, Anleitung für selbstständige Zeiteinteilung, Übersichtsblatt) auf.

Zum Lernpfad selbst

Die Flash-Applets helfen vielen Schüler/innen, eine bessere Vorstellung der verwendeten Begriffe zu bekommen. Der Lernpfad geht weg von der „trockenen“ Statistik. Die Übungen sind zahlreich und gut gelungen. Die vorgesehenen Arbeitszeiten sind realistisch gewählt. Die Lernspirale ist stark lernzielorientiert, die anderen methodischen Formen zeigen keine direkte Lernzielorientierung. Aus der Strukturierung werden aber die Lernziele auch für Schüler/innen sehr deutlich. Die Unterstützung durch Applets und auch Videos unterstützt unterschiedliche Lerntypen.

Mängel:

Hinweise für das Vorhandensein von Ton sind vorhanden, waren aber nicht deutlich genug. Weitere Hinweise im didaktischen Kommentar zur Notwendigkeit von Kopfhörern oder Headsets wären notwendig.

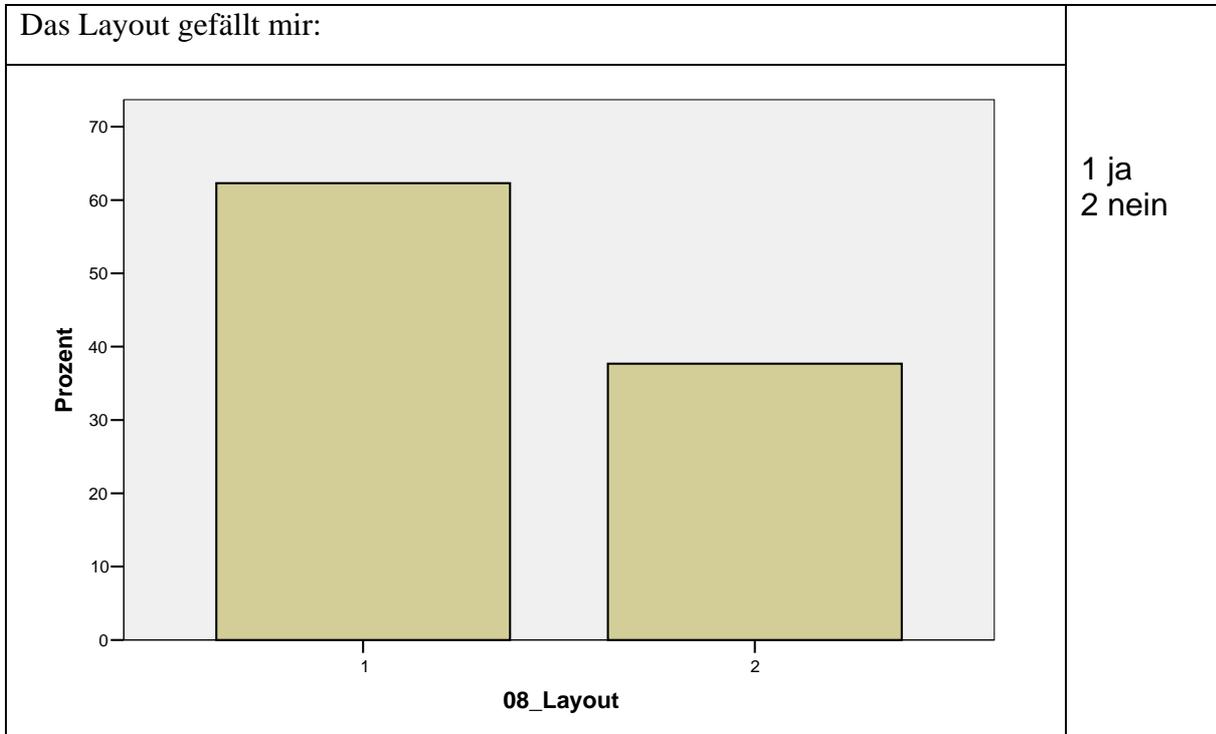
Excel und die TI-Rechner bzw. die händische Berechnung führen zu verschiedenen Ergebnissen. Die Systeme arbeiten bei der Berechnung von Median, Quartile etc. unterschiedlich – abweichende statistische Methoden und Gewichtungen bei Excel erschweren hier die Arbeit. Auch bei der Berechnung der Standardabweichung (Division durch n , Division durch $n-1$) werden manchmal unterschiedliche Methoden / Begriffe angewandt. Dies sollte im didaktischen Kommentar und auch im Lernpfad ergänzt werden.

Zur Wissensüberprüfung und Leistungsmessung

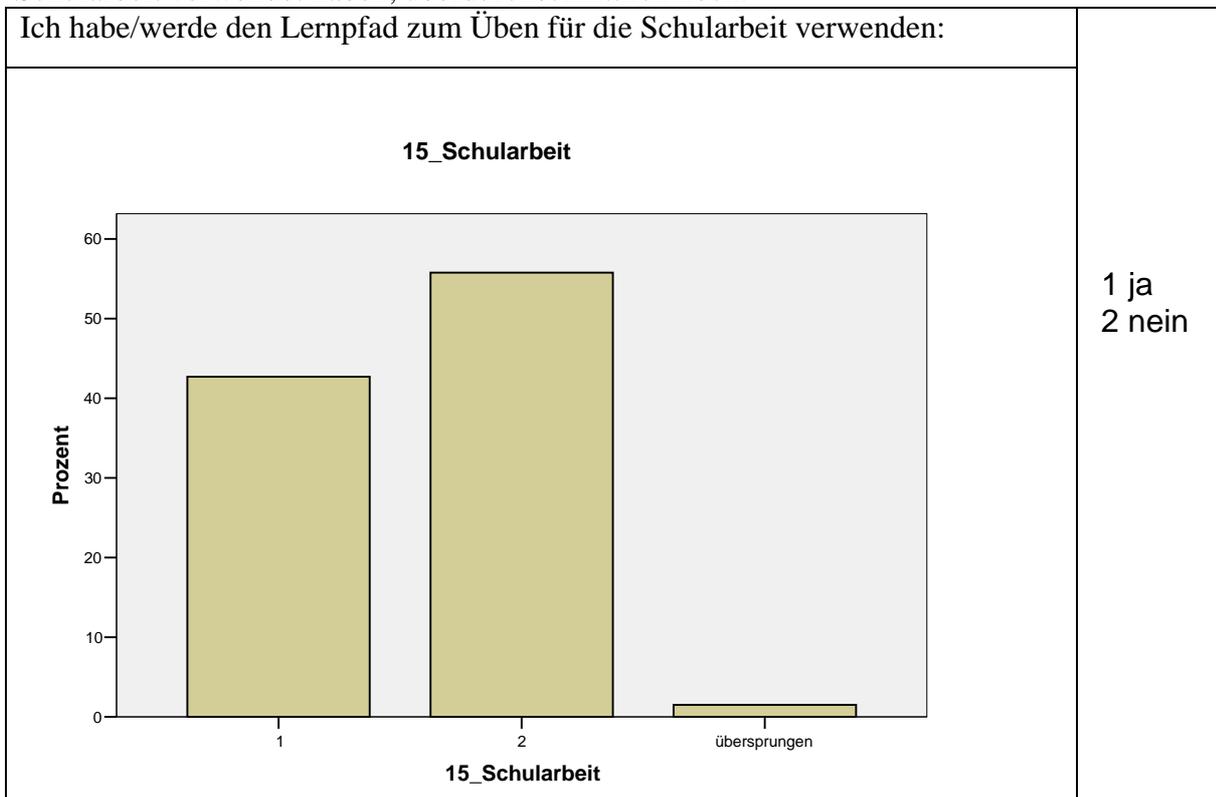
Eigene Übungen zur Wissensüberprüfung werden nicht angeboten. Übungsmaterial für Hausübungen ist ausreichend vorhanden. Vorschläge zur Leistungsmessung und Leistungsbeurteilung sind im didaktischen Kommentar vorhanden.

6. Äußere Evaluation / Feedback der Schüler/-innen

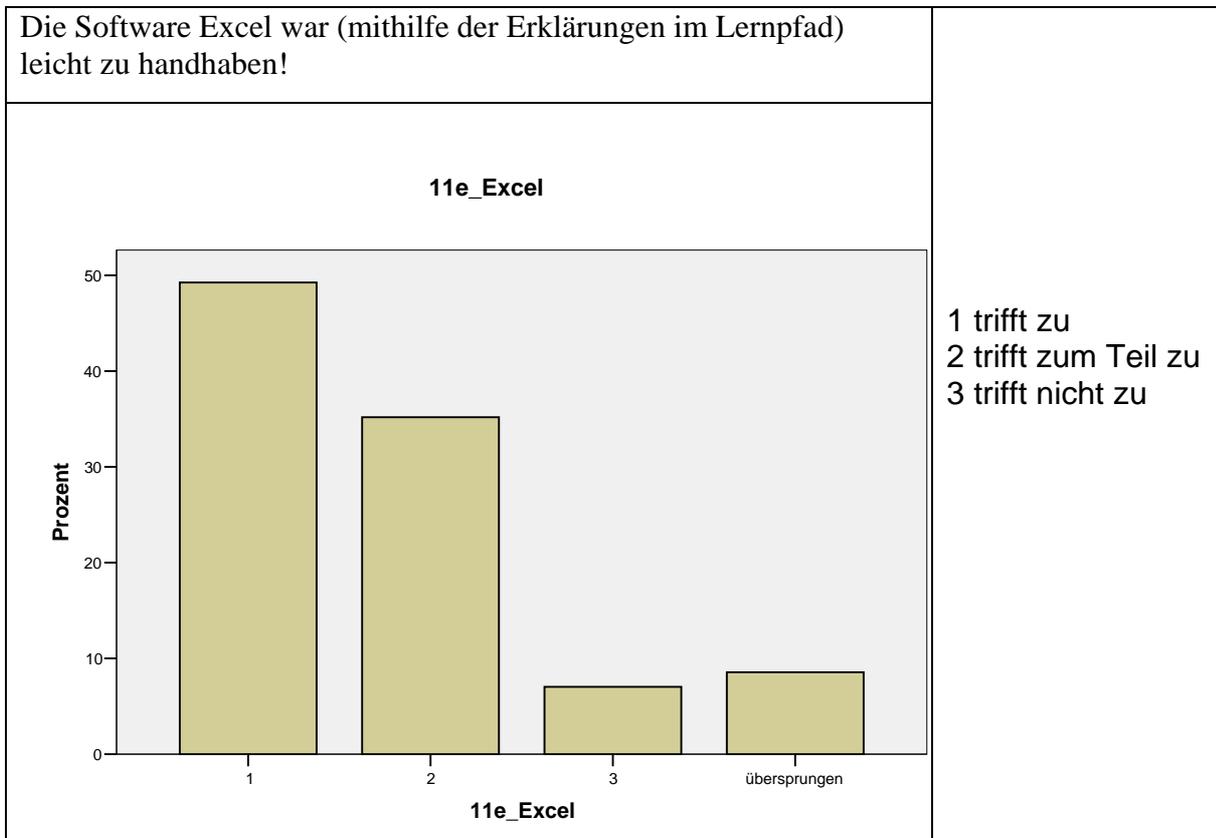
Von 199 Schülerinnen und Schülern aus 9 Klassen liegen Rückmeldungen vor.
Überdurchschnittlich viele Schülerinnen und Schüler finden keinen Gefallen am Layout.



Zuhause wurde wenig gearbeitet. Trotzdem ist der Anteil jener, die den Lernfad als Übung für Schularbeit verwendet haben, überdurchschnittlich hoch.



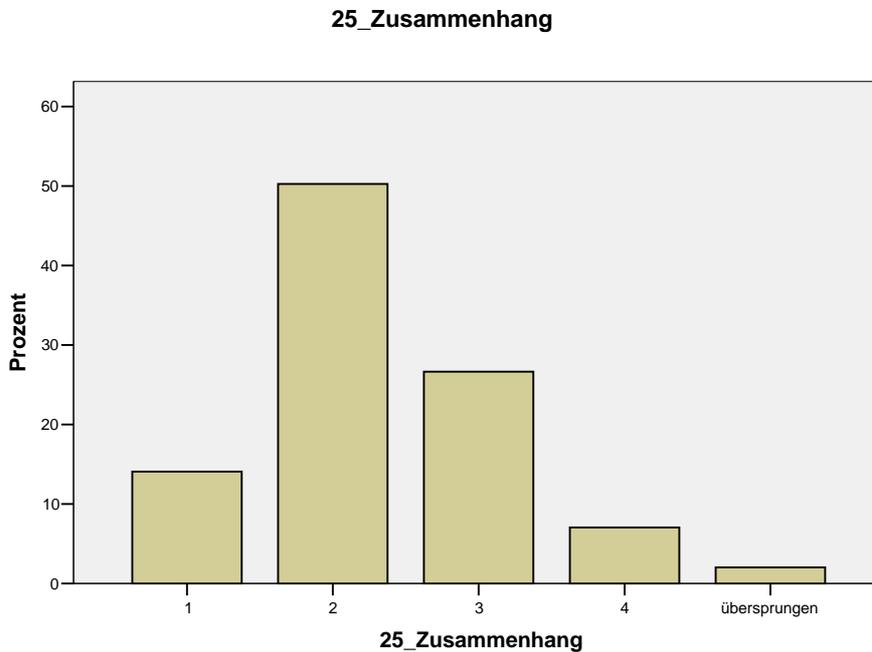
Excel wird als leicht handhabbar empfunden, die Zustimmung ist sehr groß. Videos und Flashanimationen werden in den offenen Fragen von Schülern und Schülerinnen oft positiv genannt.



Selbstständigkeit und Gruppenarbeit wird oft genannt.

Ein überdurchschnittlich hoher Anteil sagt, dass dieses neue mathematische Teilgebiet in Zusammenhang mit anderen mathematischen Gebieten steht (Möglicherweise werden Bruchrechnen, Prozentrechnung, relativer Anteil, Mittelwert und Diagramme erstellen als Querverbindungen erkannt.)

Mit Hilfe dieses Lernpfades konnte ich erkennen, dass dieses neue mathematische Teilgebiet einen Zusammenhang mit anderen mathematischen Gebieten hat:



1 trifft völlig zu
2 trifft eher zu
3 trifft eher nicht zu
4 trifft gar nicht zu

Unter den negativen Rückmeldungen werden mehrmals genannt:

Der Lernpfad wird als zu lang empfunden.

Es war zu wenig Zeit.

Es gab zu wenig Erklärungen vom Lehrer bzw. von der Lehrerin.

Erklärungen waren unverständlich.

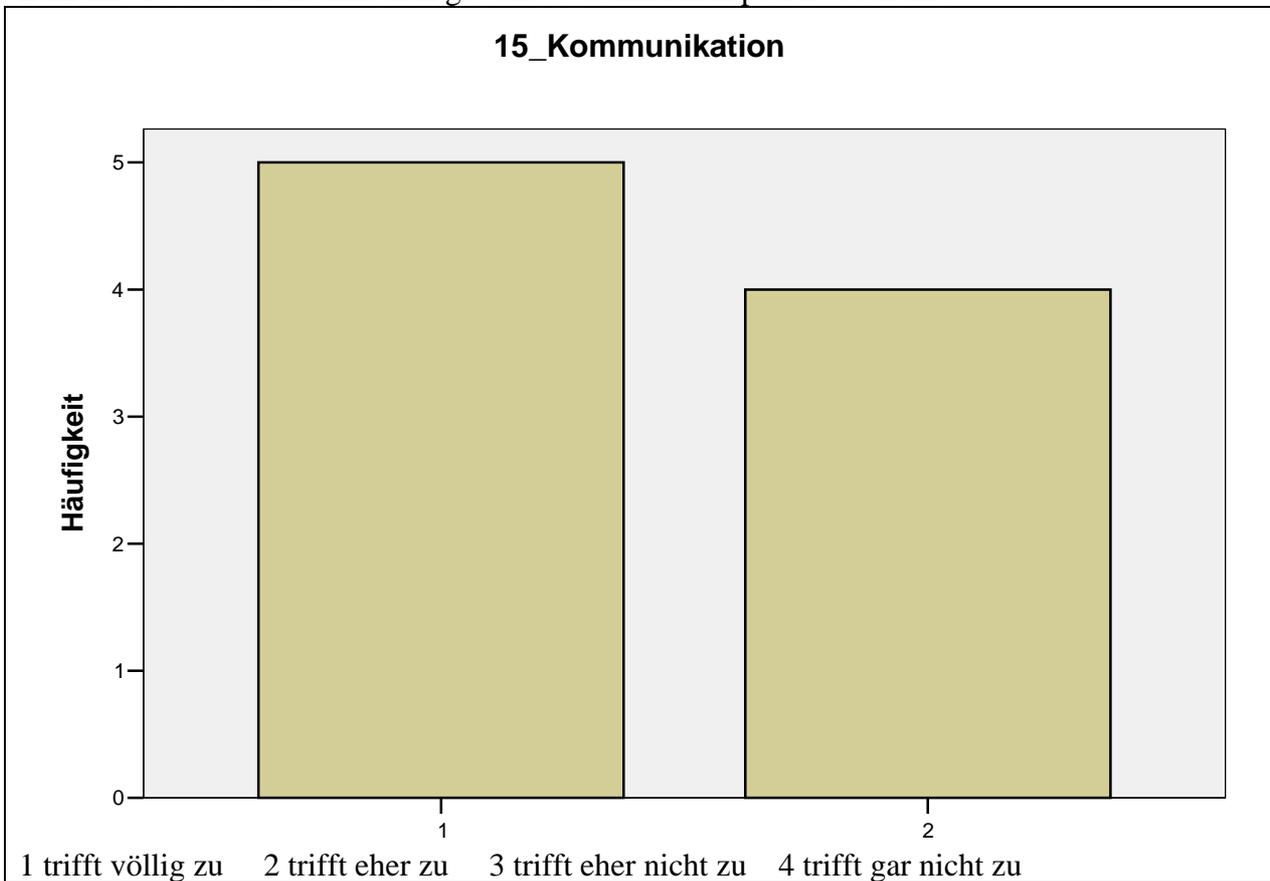
Der Boxplot war zu kompliziert.

Die Installation von Zusatzmodulen machte Schwierigkeiten.

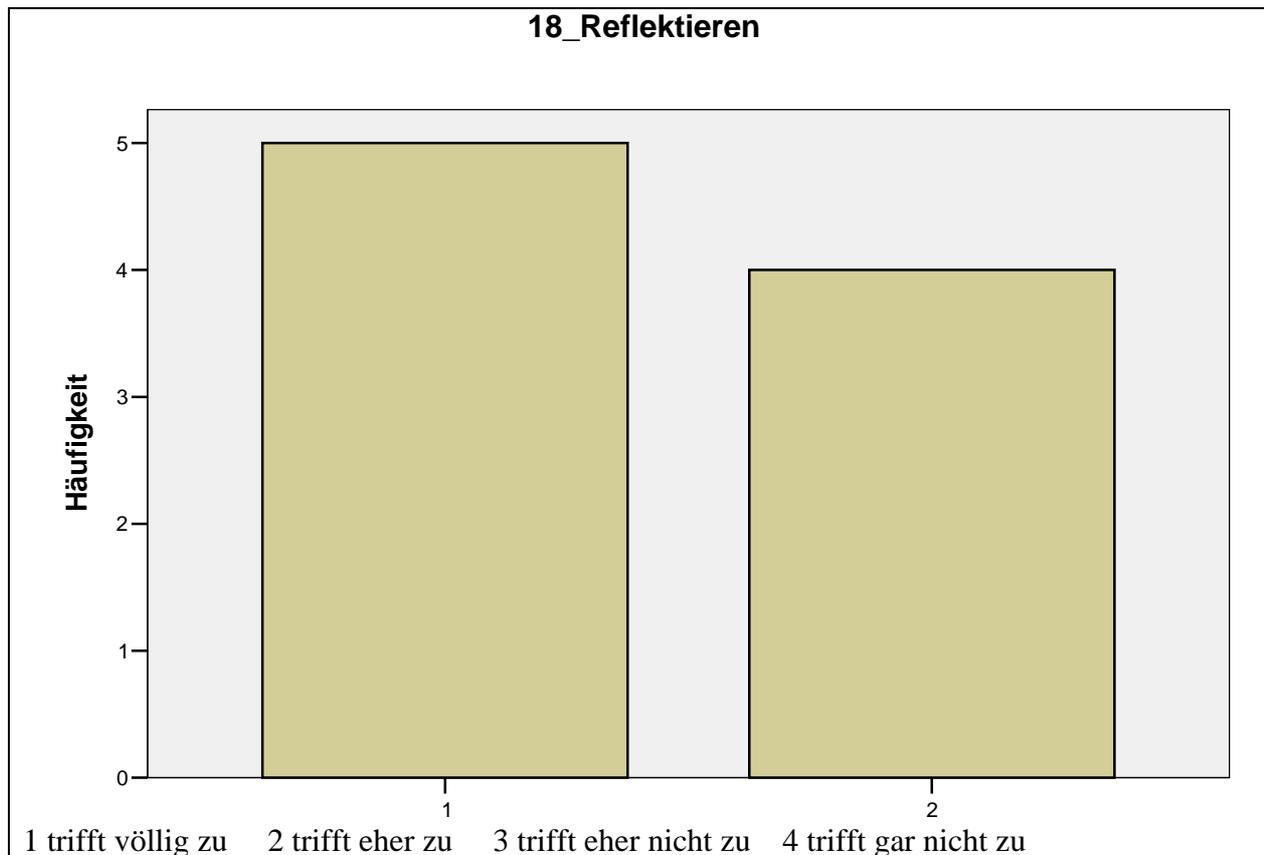
7. Äußere Evaluation / Feedback der Lehrer/-innen

9 Lehrerinnen bzw. Lehrer gaben Rückmeldung zum Lernpfad.

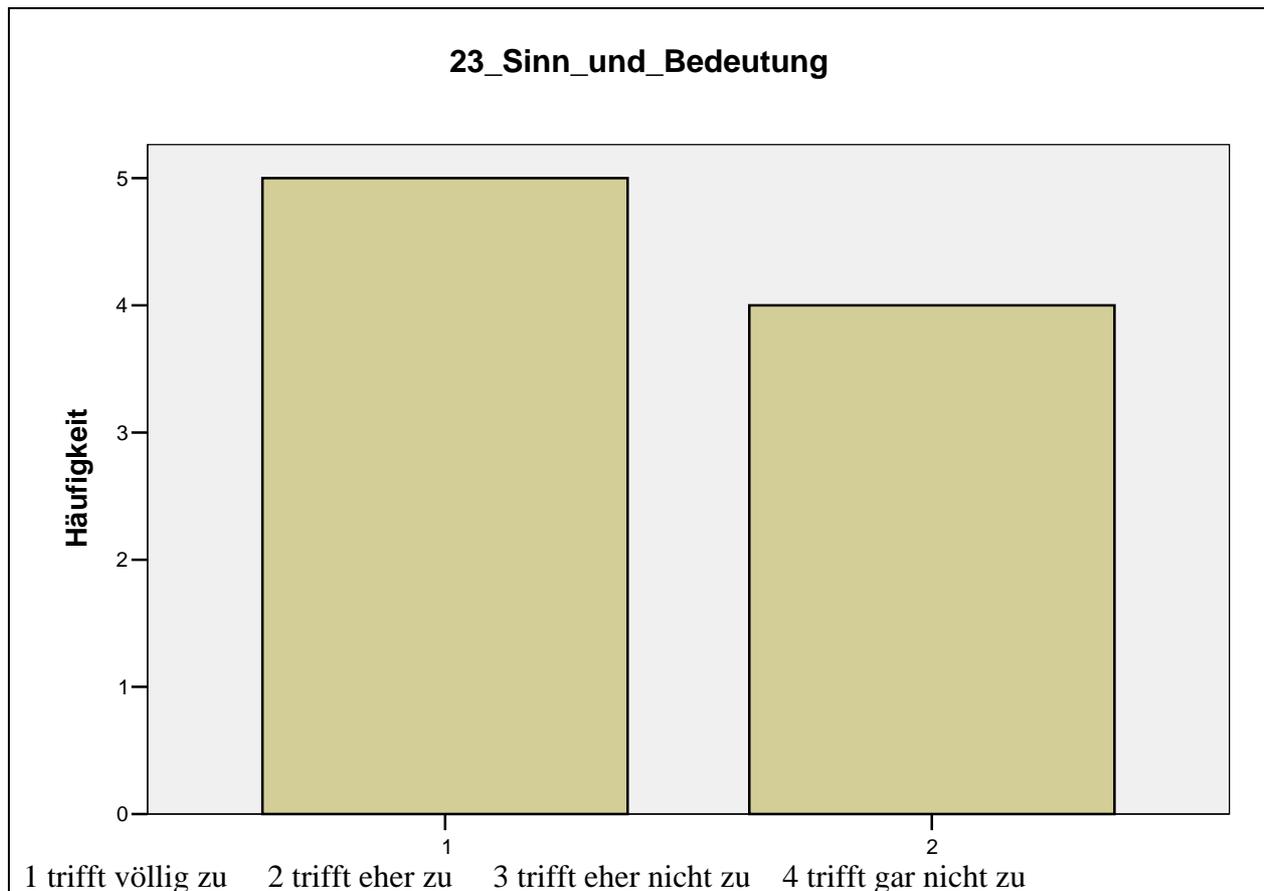
Die Kommunikation unter den Schülerinnen und Schülern wird von den Lehrerinnen und Lehrern als überdurchschnittlich gut und ausschließlich positiv beurteilt.



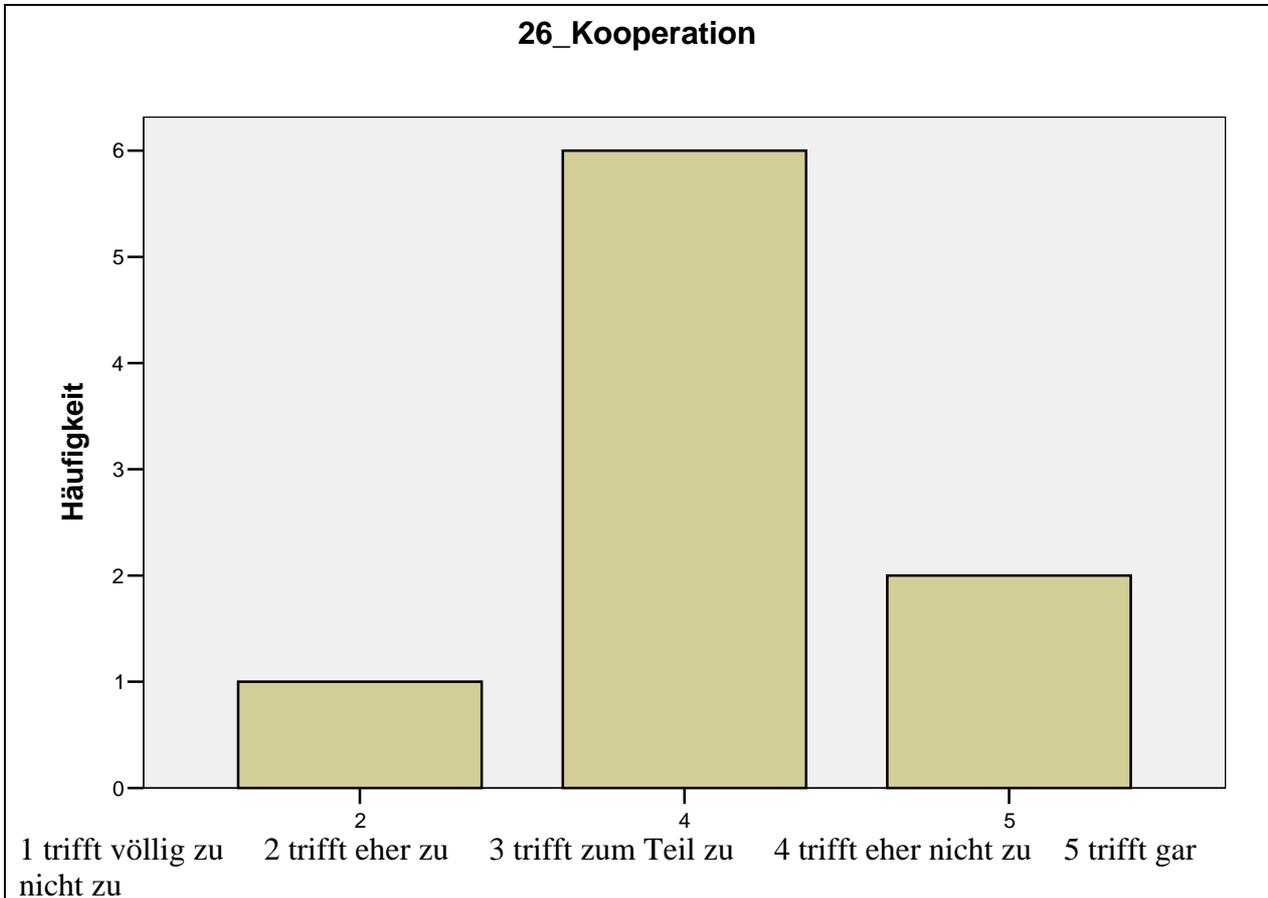
Es gibt ausschließlich Zustimmung zur Feststellung, dass der Lernpfad den Schülerinnen und Schülern das Reflektieren über mathematisches Tun ermöglicht.



Ungeteilte Zustimmung gibt es zur Feststellung, dass Sinn und Bedeutung der mathematischen Inhalte für die Schüler und Schülerinnen nachvollziehbar waren.



Die Aussage „Beim Absolvieren des Lernpfades erleben sich die SchülerInnen als Einzelkämpfer. Kooperation findet lediglich auf der informellen Ebene des Unterrichts (z. B. Mogeln) statt“ erfährt mehrheitlich Ablehnung. Daraus lässt sich ableiten, dass Kooperation zum Thema unter Schülerinnen und Schülern von Lehrerinnen und Lehrern in überdurchschnittlichem Ausmaß beobachtet wurde.



8. Überblick über den Erstellungsprozess

Am Beginn des Erstellungsprozesses standen eine genaue Analyse des Lehrplans und der im Bereich der Statistik zu erreichenden Lehr- und Lernziele. Es galt abzuwägen, wie viel theoretischer Input für die Schülerinnen und Schüler nötig und verträglich sei. Im Anschluss an diese Überlegungen wurde der gewünschte Lernprozess in verschiedene Lernschritte unterteilt sowie das von den SchülerInnen benötigte Vorwissen zusammengefasst. Aufgrund dieser Überlegungen entstand eine erste Grobplanung des Lernpfades. Die einzelnen Lernschritte wurden danach von den ErstellerInnen detaillierter ausgearbeitet. Bei einem weiteren Treffen fand eine Besprechung und Redigierung der bereits vorhandenen Materialien statt und eine nochmalige Erörterung des gesamten Lernprozesses, um sicher zu stellen, dass der Lernprozess konsistent und die Reihenfolge der Lernschritte sinnvoll war. In weitere Folge wurden die vorliegenden Arbeiten zu den einzelnen Lernschritten verfeinert und fast vollständig ausgeführt. Beim darauf folgenden Treffen wurden die nun schon fast fertigen Ergebnisse abermals einer kritischen Sichtweise unterzogen und an einigen Stellen korrigiert. Hernach folgte die individuelle Fertigstellung der Lernschritte. Weiters wurden zur Erlernung der Handhabung von Excel kleine Videos erstellt, die den SchülerInnen den Erwerb dieser Fertigkeiten erleichtern sollten. Das Erstellen dieser Videosequenzen stellte sich als überaus aufwendige Angelegenheit heraus.

Nachdem die Webrealisierung des Lernpfades komplett fertig gestellt war, wurden drei unterschiedliche Methoden zur Umsetzung des Lernpfades entwickelt, deren Erstellung sehr viel Zeit in Anspruch nahm.

Medienvielfalt
im **Mathematikunterricht** 

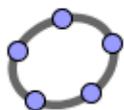
Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

Medienvielfalt im Mathematikunterricht

TEIL 4

LERNPFAD FUNKTIONEN

Hollabrunn, Dezember 2006



GeoGebra



Eine Galerie multimedialer Lernhilfen

mathe online

für Schule, Fachhochschule,
Universität und Selbststudium

Lernpfad: Funktionen - Einstieg

9. Schulstufe

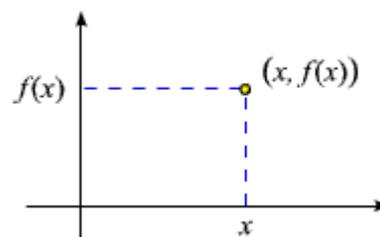
Autoren/innen: Mag. Irma Bierbaumer, Dr. Franz Embacher, Dr. Helmut Heugl

1. Motivation (Vorwort):

Das Thema Funktionen wurde gewählt, da sich unserer Meinung nach die Funktionenlehre besonders gut für den Einsatz von elektronischen Medien eignet. Wir haben die gängigen (den Schüler/innen zugänglichen) elektronischen Medien in Hinblick auf einen möglichen Einsatz zum Einstieg in das Thema Funktionen angesehen, und dann die entsprechende Verwendung der geeigneten Medien in die Lernsequenz eingebaut.

2. Didaktischer Kommentar

Der Lernpfad "Funktionen - Einstieg" kann zum Einstieg in das Thema Funktionen in der 5. Klasse AHS (9. Schulstufe) eingesetzt werden. Anhand konkreter Aufgabenstellungen soll mit Hilfe des Einsatzes elektronischer Medien Vorwissen aus der Unterstufe aktiviert und vertieft (verschiedene Darstellungsformen für Funktionen wie Formel, Wertetabelle, Graph) sowie neue Kenntnisse zum Funktionsbegriff (Präzisierung der Funktionsdefinition, Bezeichnungen wie Definitionsmenge, Zielmenge, Argument, Funktionswert,...) erarbeitet und an komplexeren Aufgabenstellungen angewendet werden.



Kurzinformation	
Schulstufe	5. Klasse AHS (9. Schulstufe)
Dauer	ca. 6 UE (mehr bei geringen Vorkenntnissen der Schüler/innen in der Handhabung des elektronischen Werkzeugs)
Verwendete Medien	CAS, Derive, Excel, Applets, Animationen
Technische Voraussetzungen	Flash, Java, Web-Anbindung
Autor/innen	Irma Bierbaumer, Franz Embacher, Helmut Heugl

Lerninhalt	Lernziel
Funktionsgleichungen, Wertetabellen	<ul style="list-style-type: none"> • Aufstellen von Formeln anhand von Wertetabellen • Erstellen von Wertetabellen mit einem elektronischen Medium • Ablesen von Werten aus der Wertetabelle - Tabellen zum Problemlösen verwenden.
Definition einer Funktion	<ul style="list-style-type: none"> • Kennen und anwenden können der Definition einer

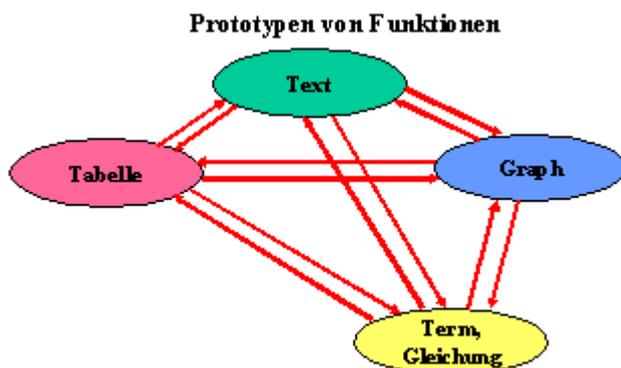
	Funktion.
Bezeichnungen bei Funktionen bzw. Eigenschaften von Funktionen	<ul style="list-style-type: none"> • Bezeichnungen wie Definitionsmenge, Zielmenge, Argument, Funktionswert, abhängige und unabhängige Variable kennen und anwenden können • Aus dem Text bzw. der Funktionsgleichung und der Wertetabelle Eigenschaften der jeweiligen Funktion ableiten können.
Funktionsgraphen	<ul style="list-style-type: none"> • Definition eines Funktionsgraphen formulieren und anwenden können • Erstellen von Funktionsgraphen mit einem elektronischen Medium • Skizzen von Funktionsgraphen anfertigen können • Ablesen von Werten aus dem Funktionsgraphen - den Funktionsgraph zum Problemlösen verwenden • Beschreiben der Abhängigkeit anhand des Funktionsgraphen.
Funktionsgraphen, Definition einer Funktion	<ul style="list-style-type: none"> • Erkennen, ob eine Kurve ein Funktionsgraph ist.

2.1. Didaktische Grundlagen

2.1.1 Zur fundamentalen Idee der "Funktion"

Allgemeinbegriffe erwirbt man in der Regel durch die Erfahrung und Begegnung mit prototypischen Repräsentanten (den Begriff "Tisch" verinnerlicht man nicht, indem man eine exakte Definition gibt, sondern weil man verschiedene Prototypen des Tisches erlebt). So verinnerlichen Lernende die fundamentale Idee der Funktion auch nicht durch eine "saubere" Definition am Beginn des Lernprozesses, sondern indem sie verschiedene Prototypen dieses Begriffes möglichst anhand von Beispielen aus seiner Erfahrungswelt erleben [Dörfler, 1991].

Im Laufe des "Funktionenlernens" erleben Lernende verschieden Prototypen des Funktionsbegriffes:



"Funktionenlernen" besteht im Wesentlichen darin, einen Prototypen zu finden, Beziehungen zwischen Prototypen herzustellen oder bestimmte Prototypen für das Problemlösen zu nutzen.

Funktionenlernen an "Prototypen" in diesem Lernpfad	
Text \leftrightarrow Tabelle \leftrightarrow Formel (=Funktionsgleichung) \leftrightarrow Tabelle \leftrightarrow Graf	
Handybeispiel (1)	Aus einem Text eine Tabelle, eine Gleichung finden.
Handybeispiel (2)	Mit einem geeigneten elektronischen Werkzeug eine Tabelle erstellen.
Handybeispiel (3)	Die Tabelle zum Problemlösen nutzen.
Schachtelbeispiel (1)	Aus einem Text, einer Skizze, einer Flashanimation eine Formel (Funktionsgleichung) finden.
Schachtelbeispiel (2)	Aus einer Formel eine Tabelle mit variabler Schrittweite erstellen.
Handybeispiel (4) und Schachtelbeispiel (3)	Aus dem Text bzw. der Funktionsgleichung Eigenschaften der jeweiligen Funktionen ableiten können.
Schachtelbeispiel (5), Handybeispiel (4) und (5)	Aus Gleichungen und Tabellen Graphen mit Hilfe geeigneter elektronischer Werkzeuge ermitteln können.

2.1.2 Zum genetischen Konzept

1. **Anschluss an das Vorverständnis der Adressaten.**
Probleme, wie z.B. Handytarife, kommen aus der Erfahrungswelt der Schüler/innen.
2. **Zulässigkeit einer informellen Einführung.**
Eine "saubere" Definition des Funktionsbegriffes erfolgt erst, wenn die Schüler/innen schon längst mit verschiedenen Funktionsprototypen Bekanntschaft gemacht haben.
3. **Hinführen zu strengeren Überlegungen; Erweiterung des Gesichtskreises, Standpunktsverlagerung.**
Die Aufgabensequenz soll den Schüler/innen die Notwendigkeit einer exakteren Fassung des Funktionsbegriffes klar machen (Definitions- und Zielmenge, usw.)
4. **Durchgehende Motivation, Kontinuität.**
Die Schüler/innen sollten auch das Gemeinsame in dieser Aufgabensequenz erkennen und den Zusammenhang der einzelnen Phasen verstehen.

2.1.3 Drei Phasen des Mathematiklernens

- **Die experimentelle, heuristische Phase:**
Durch experimentieren mit verschiedenen Funktionsprototypen (Tabelle, Graf, usw.) erfahren die Schüler/innen die wichtigsten Kennzeichen funktionaler Abhängigkeiten.
- **Die exaktifizierende Phase:**
Sie besteht in diesem Lernpfad in der Definition der Funktion und des Funktionsgraphen. Beweise im engeren Sinn findet man erst in späteren Teilen des Kapitels "Funktion".
- **Die Anwendungsphase:**
Anwendungen begleiten den ganzen Lernprozess. Aus den Anwendungen wird auch der Funktionsbegriff erarbeitet. Im letzten Teil werden dann noch Aufgaben zur Festigung des Gelernten und eventuell zur Selbstevaluation und als Übungsaufgaben angeboten.

2.2. Grundvorstellungen - Grundfähigkeiten

2.2.1 Grundvorstellungen zu Funktionen

- **Grundvorstellung 1:**
Einen naiven Funktionsbegriff verinnerlichen: "Abhängigkeiten zwischen Größen"
- **Grundvorstellung 2:**
Beziehungen zwischen verschiedenen "Prototypen" des Funktionsbegriffes herstellen und nutzen können:
 - Text \leftrightarrow Tabelle
 - Text \leftrightarrow Term
 - Term \leftrightarrow Tabelle
 - Tabelle \leftrightarrow Graph
 - Term \leftrightarrow Graph
- **Grundvorstellung 3:**
Einen exakteren Funktionsbegriff verinnerlichen

2.2.2 Grundfähigkeiten zu Funktionen

- **Grundfähigkeit 1:**
Mit Informationen aus einem Text eine Tabelle erstellen können
- **Grundfähigkeit 2:**
Tabelle zum Interpretieren, zum Problemlösen nutzen können
- **Grundfähigkeit 3:**
Aus einem Text, einer Tabelle einen Funktionsterm entwickeln können
- **Grundfähigkeit 4:**
Aus einem Text, einer Tabelle, einem Term einen sinnvollen Definitionsbereich ableiten können
- **Grundfähigkeit 5:**
Aus einer Tabelle, einem Funktionsterm einen Graphen zeichnen können
- **Grundfähigkeit 6:**
Graphen interpretieren können
- **Grundfähigkeit 7:**
Für alle diese Grundfähigkeiten technologische Hilfsmittel nutzen können

2.2.3 Was steht im Lehrplan?

In allen Schularten ist die **Nutzung von informationstechnologischen Medien** verpflichtend vorgeschrieben.

Allgemein bildende höhere Schule (AHS)

5. Klasse - Funktionen

- Beschreiben von Abhängigkeiten, die durch reelle Funktionen in einer Variablen erfassbar sind (mittels Termen, Tabellen und Graphen), Reflektieren über den Modellcharakter von Funktionen
- Beschreiben und Untersuchen von linearen und einfachen nichtlinearen Funktionen
- Untersuchen von Formeln im Hinblick auf funktionale Aspekte, Beschreiben von direkten und indirekten Proportionalitäten mit Hilfe von Funktionen
- Arbeiten mit Funktionen in anwendungsorientierten Bereichen

Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten (HTL)

1. Jahrgang - Funktionen

- Begriff, Darstellung im Koordinatensystem; lineare Funktion; Interpretieren von Tabellen, ...

Handelsakademien (HAK)

II. Jahrgang - Funktionen, Umkehrfunktionen, ...

Höhere Lehranstalten für wirtschaftliche Berufe (HLW)

Lehrplan ist nicht jahrgangsbezogen - Funktionenlehre

- Lineare Funktionen und dazugehörige Gleichungen
- Potenz- und Wurzelfunktionen, ...
- Anwendungsbeispiele und Projekte zu funktionalen Zusammenhängen

Bildungsanstalt für Kindergartenpädagogik (BAKIP)

2. Klasse - Funktionen

- Lineare Funktionen, Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen

2.3. Literatur

Dörfler, Willi. (1991): "Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium" in Computer – Mensch – Mathematik. Verlag Holder-Pichler-Tempsky, Wien, 1991, S. 51. ISBN3-209-01452-3.

3. Drehbücher

- Einsatz des Lernpfades als **Lernsequenz**. Der verbindende Text soll als Leitfaden für das selbst gesteuerte Lernen dienen.
- Einsatz im Rahmen einer **Lernspirale** (Lernspirale befindet sich im Anhang).
- Der modulartige Aufbau erlaubt einen **Einsatz nach individuellen methodischen Vorstellungen** (nach eigenem "Drehbuch"). Die in diesem Kapitel angesprochenen Grundfähigkeiten und Grundfertigkeiten sollten aber auf jeden Fall vermittelt werden. Dabei kann die im Folgenden angebotene Übersicht eine Art Leitlinie sein.

4. Vorteile des Medieneinsatzes bei diesem Lernpfad

Das Erstellen von Tabellen und Graphen von Funktionen ist ohne elektronisches Medium sehr mühsam. Haben die Schüler/innen verstanden, wie eine Tabelle oder ein Graph angefertigt wird, so kann diese Arbeit nun das elektronische Medium übernehmen und es bleibt mehr Zeit zum Herstellen von Beziehungen zwischen den einzelnen Prototypen von Funktionen bzw. für das Finden von Prototypen von Funktionen zum Problemlösen.

Elektronische Medien eignen sich beim Thema Funktionen hervorragend um mit den einzelnen Prototypen zu Experimentieren und dadurch Erkenntnisse über die vorliegende Funktion zu erhalten. Sie können auch dazu beitragen, dass die Schüler/innen eine bessere Vorstellung vom Begriff „Abhängigkeit“ erwerben (Interaktive Applets).

5. Interne Evaluation

5.1 Zum didaktisch-methodischen Kommentar

Der Lernpfad greift Wissen aus der Unterstufe auf und aktiviert sie. Die intuitive Begriffsbildung der Unterstufe wird exaktifiziert. Im didaktischen Kommentar wird Vorwissen nicht explizit angeführt. Die Beziehungen zwischen Graph-Text-Term-Tabelle-Gleichung werden zwar ausführlich dargestellt, es wird aber nicht festgehalten, dass nicht alle im Lernpfad abdeckt werden. Hinweise zur Leistungsbeurteilung fehlen. Die Bedeutung der Begriffe „Grundvorstellungen“ und „Grundfähigkeiten“ sollte genauer erklärt werden.

Unter „Verwendete Medien“ muss GeoGebra ergänzt werden. Außerdem sollte angeführt werden, dass CAS-Rechner, Derive und Excel wahlweise verwendet werden können, da in der aktuellen Fassung der Eindruck erweckt wird, dass alle drei Technologien parallel zu verwenden sind.

Die methodische Umsetzung als Lernspirale ist detailliert mit Lernzielen angegeben, allerdings im Lernpfad schwer auffindbar. Für die Umsetzung als Lernsequenz fehlen Zusatzinformationen für Lehrer/innen sowie ein Verlaufsplan für Schüler/innen mit verbindenden Texten.

Die Farbgebung (Aufgabe, Werkzeug, Theorie) ist im didaktischen Kommentar nicht erklärt.

5.2 Zum Lernpfad selbst

Die ausgewählten Beispiele erscheinen für den Einstieg in das Thema sehr geeignet. Bei einigen Aufgabenstellungen passt jedoch die Art der Lösung nicht zur Fragestellung. Z.B. beim Einstiegsbeispiel Handy(1): Die Art der Lösung (Funktionsgleichung) passt nicht zur Aufgabenstellung (lediglich der Term in der Tabelle ist gefragt). Besser: In der Lösung die gesamte Tabelle anführen und als zusätzliche Aufgabenstellung: Kannst du eine geeignete Funktionsgleichung angeben? Analog bei weiteren Beispielen.

Lernziele werden am Beginn jedes Beispiels angeführt, auch wenn sich die Formulierung nicht direkt an den Schüler / die Schülerin richtet.

Es werden verschiedene Lerntypen angesprochen: bildhaft (Darstellungen, Animationen), lesend, schreibend (konkrete Aufträge), aktives Tun (Graphen händisch zeichnen).

Einige im Lernpfad verwendete Begriffe (z.B. reelle Größe) sollten genauer erklärt werden, um das Verständnis zu unterstützen. Änderungsvorschlag: Übung zum aktiven Lernen dieser Begriffe sowie eventuell Pop-up-Fenster mit Definition oder Erklärung, wenn diese Begriffe im Text auftreten.

Begriffe werden exaktifiziert (Definition und Abhängigkeiten). Bei der Umsetzung als Lernsequenz fehlen allerdings konkrete Handlungsanweisungen für die Schüler/innen (z.B. ausdrucken und wichtige Begriffe markieren oder Glossar anlegen). Zusätzlich könnte im Anschluss an die Exaktifizierung ein Hot-Potatoe-Test zur Wissensüberprüfung eingefügt werden.

Die Veranschaulichung mathematischer Inhalte steht im Zentrum der Betrachtungen. Verschiedene Schreibweisen werden sehr exakt angegeben und sind mit den Schulbüchern verträglich.

In der Lernspirale werden Methoden, Arbeitsform und Dokumentation sehr genau beschrieben, fehlen in der Lernsequenz jedoch meistens.

Die Werkzeughinweise sind sehr ausführlich und genau (mit Screenshots, Menüführung etc.). Die Screenshots der Excel-Grafiken sollten etwas vergrößert werden.

Differenzierungsmöglichkeiten fehlen. Einige Lernschritte können als Wahlmöglichkeit gekennzeichnet werden (z.B. Punktgraphen zeichnen). Bei den abschließenden Beispielen bietet sich eine Differenzierung an, indem der Schwierigkeitsgrad des Beispiels angegeben wird.

Informationssuche wird nicht explizit als Lernmethode verwendet. Der Lernpfad ist in sich abgeschlossen. Als Differenzierung lassen sich eventuell Arbeitsaufträge mit Internetrecherche ergänzen.

Durch die tabellarische Auflistung der einzelnen Lernschritte, fehlen verbindende Elemente. Dies unterstützt aber andererseits eine Modularisierung des Lernpfads. Lernobjekte sind dadurch einzeln verwendbar. Die Evaluator/innen haben den Eindruck, dass die tabellarische Gestaltung nicht zu lustvollem Lernen beiträgt. Zusammenfassungen sind vorhanden und leicht auffindbar.

Handlungsanweisungen werden in der Lernspirale im Begleitmaterial ausführlich beschrieben. Für die Lernsequenz befinden sich die Arbeitsaufforderungen teilweise bei den einzelnen Objekten, wobei eine Verbindung der einzelnen Lernobjekte wünschenswert wäre. An manchen Stellen folgt einer Fragestellung keine Anweisung, was die Schüler/innen damit tun sollen.

5.3 Zur Wissensüberprüfung und Leistungsmessung

Es gibt Übungsphasen, zur Festigung müssen jedoch zusätzliche Übungen vom Lehrer / der Lehrerin bereitgestellt werden. Teile der Selbstkontrolle sind dynamisch, andere statisch (die Lösungen werden vorgegeben). Ein möglicher Vorschlag: Schüler/innen wird die Möglichkeit zur selbstständigen Eingabe geboten und dann erst die Lösung präsentiert.

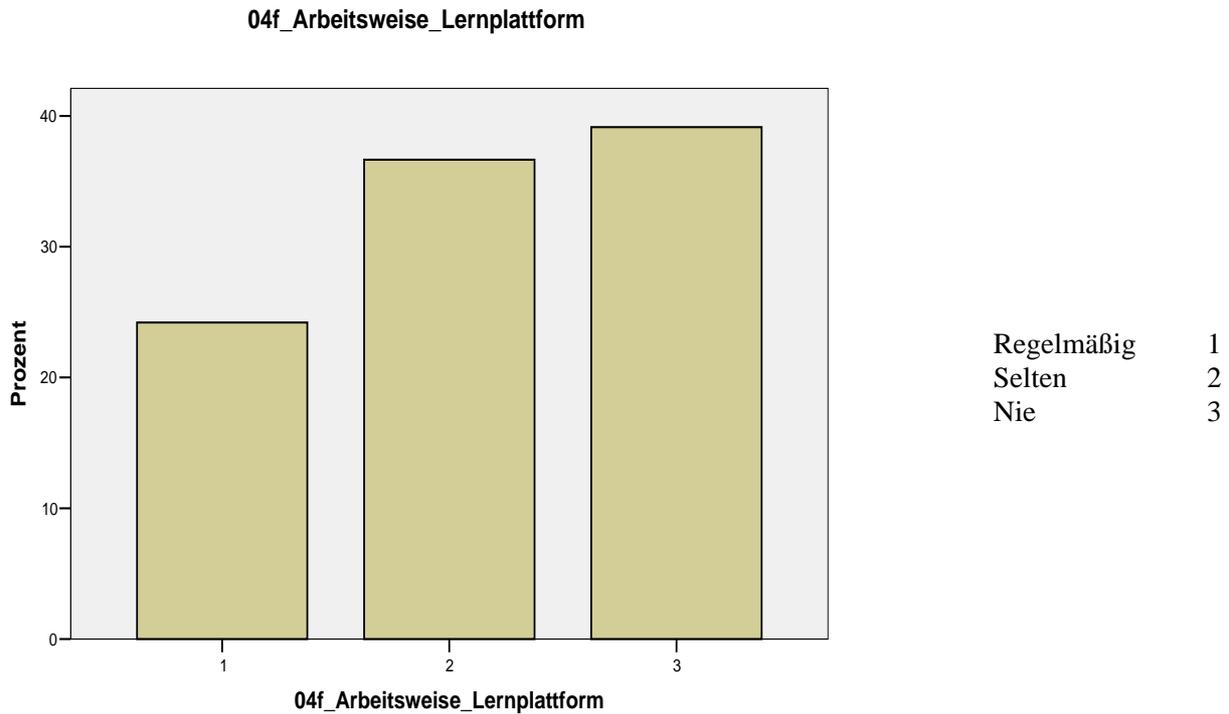
6. Externe Evaluation

6.1 Schüler/innen-Rückmeldungen

Es haben 281 Schüler/innen an der externen Evaluation teilgenommen.

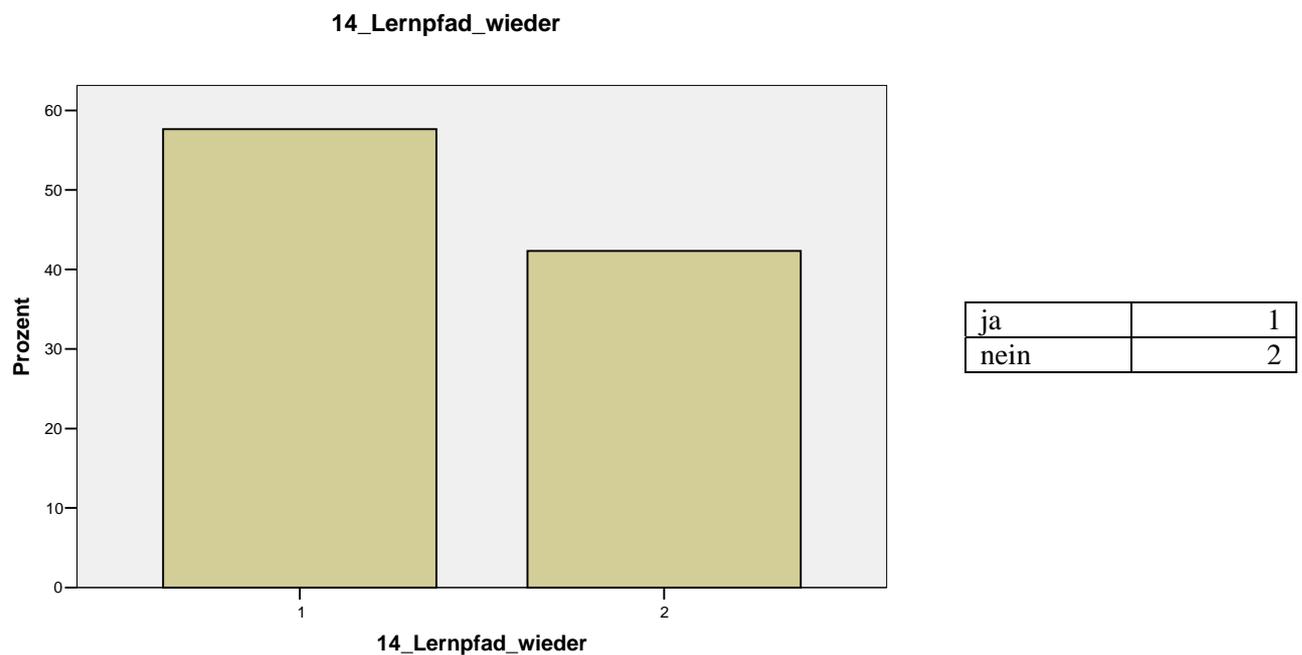
Über 20% geben an, regelmäßig im Unterricht in Gruppen zu arbeiten. Partnerarbeit und Einzelarbeit entsprechen dem Durchschnitt der Untersuchung. 40% arbeiten regelmäßig am Computer.

Lernplattformen werden überdurchschnittlich oft verwendet:



Die Schüler/innen finden sich zu 70% mit den Links zurecht. Das Layout findet etwas weniger Zustimmung als im Durchschnitt (Rückmeldungen: „Das Layout schaut [...] komisch aus.“). Die Sprache wird als etwas weniger verständlich empfunden als im Durchschnitt. Fragestellungen, Erklärungen, Anleitungen werden von den Schüler/innen als unklar/unverständlich empfunden, Texte (vor allem der Text im Theorieteil) als zu kompliziert.

Ebenso werden interaktive Übungen als weniger hilfreich im Vergleich zum Durchschnitt empfunden. Fast 60% der Schüler/innen möchten wieder mit einem Lernpfad arbeiten:



Entsprechend dem Durchschnitt verwenden über 30% den Lernpfad zum Üben für die Schularbeit.

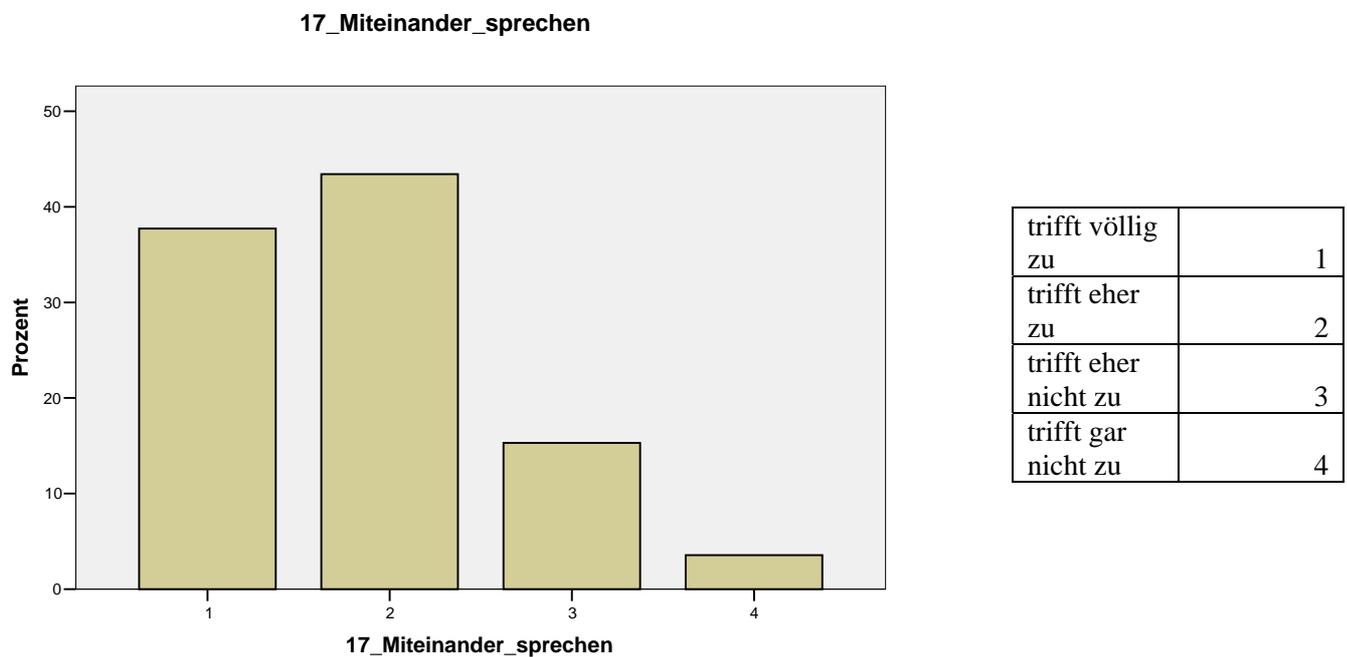
Über 60% haben die mathematischen Inhalte völlig oder eher verstanden.

Neugier und Lust am mathematischen Tun wird geringfügig seltener empfunden als im Durchschnitt.

Sinn und Bedeutung der neu erlernten Inhalte wird deutlich weniger oft erkannt als im Durchschnitt.

Gegenseitige Hilfe beim Lernen, das Sprechen über mathematische Inhalte und das Übernehmen von Eigenverantwortung entsprechen dem Durchschnitt:

Beim Durcharbeiten dieses Lernpfades war es möglich, mit anderen Schüler/innen über die mathematischen Inhalte zu sprechen:



Schüler/innenzitate: „Die Gruppenarbeit und die Kommunikation, es war eine gute Abwechslung zum "normalen" Unterricht!“

„Mir hat gefallen, dass man mit den Mitschülern/innen viel reden konnte und alle sehr hilfsbereit waren jemand etwas nicht gleich kapiert hat! Hat die Gemeinschaft gestärkt!“

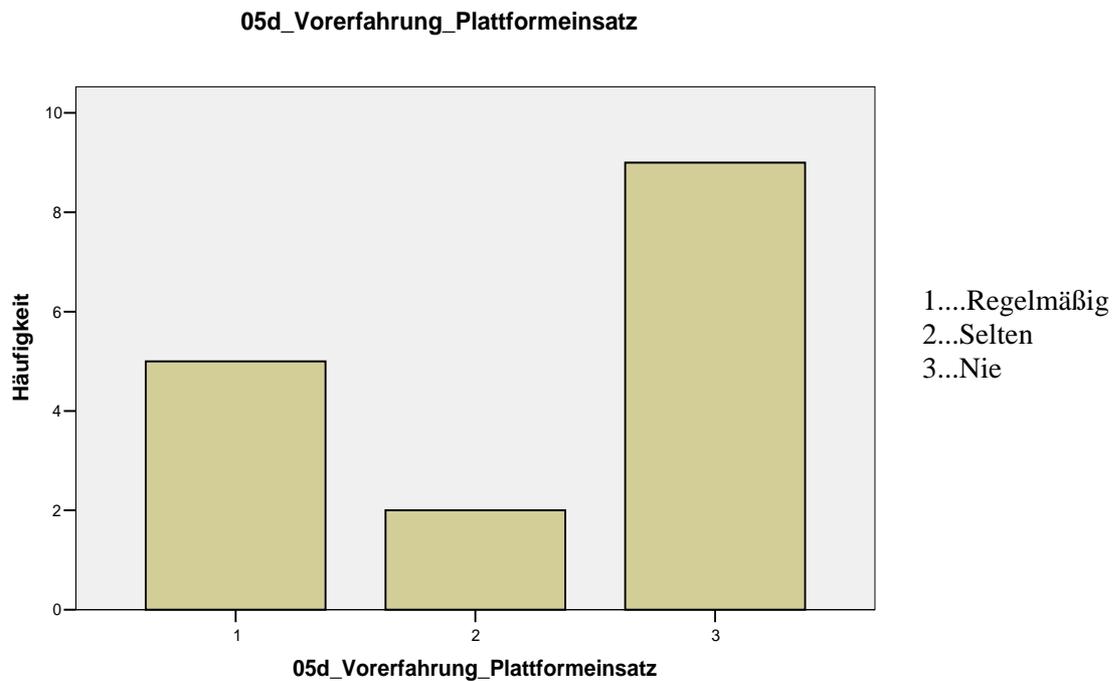
Mit großer Begeisterung wird die Schachtel-Animation aufgenommen: Animation, Farben und Zerlegung in Schritten tragen zum Verständnis bei. Schüler/innenzitat: „Durch die schrittweise Animation beim Schachtelbeispiel konnte ich mir gut vorstellen, wie das Beispiel zu lösen ist.“ Auch die Temperaturkurve mit Schieberegeln wird mehrmals ausdrücklich als hilfreich genannt.

In vielen Rückmeldungen wünschen sich die Schüler/innen Lösungen und Möglichkeiten zur Selbstkontrolle.

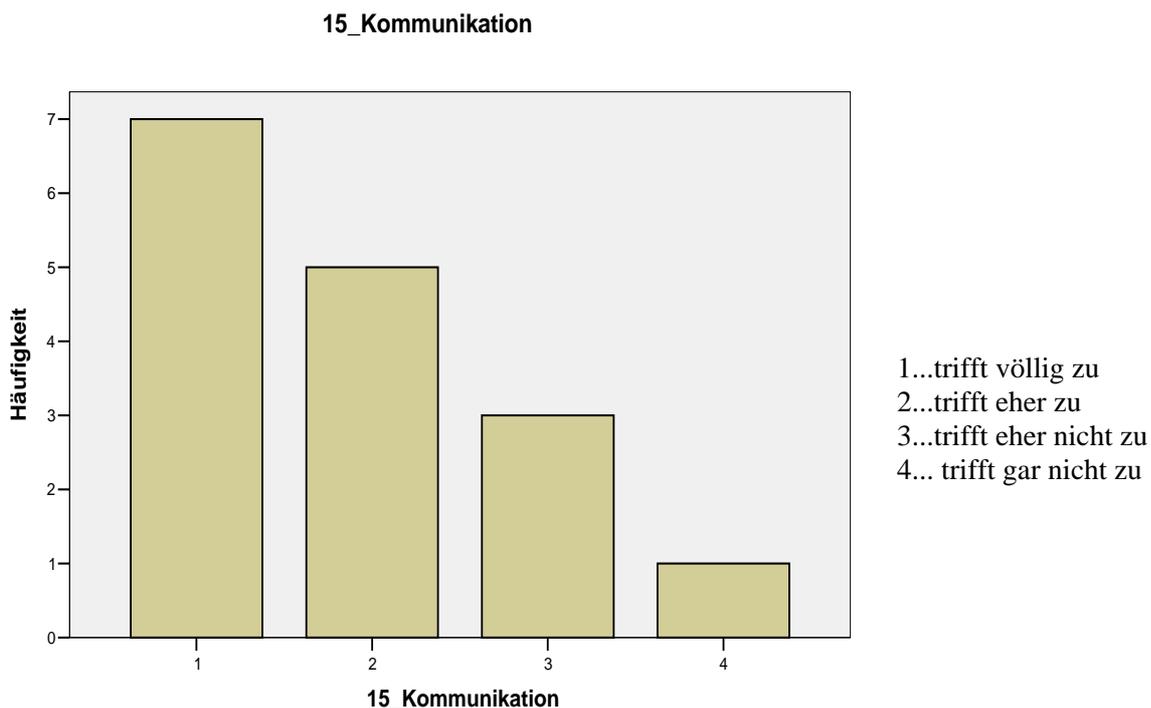
6.2 Lehrer/innenrückmeldungen

Es haben 16 Lehrer/innen an der externen Evaluation teilgenommen. Darunter waren 3 eLSA-Lehrer/innen, 3 eLC-Lehrer/innen und 4 IMST-Lehrer/innen.

Auffallend war, dass fast die Hälfte der Lehrer/innen im Unterricht bereits mit einer Lernplattform gearbeitet hat.

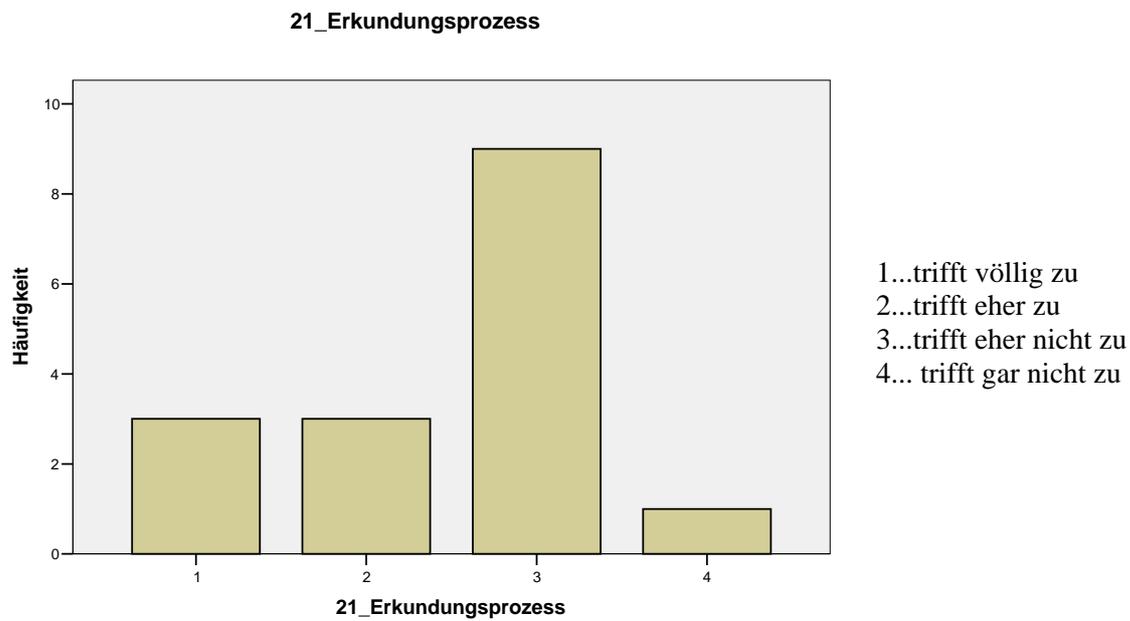


12 von 16 Lehrer/innen sind der Meinung, dass die vorgeschlagene Unterrichtsmethode die Kommunikation der Schüler/innen untereinander über Mathematik fördert:



8 von 16 Lehrer/innen meinen, dass der Lernpfad den Schüler/innen eher keine unterschiedlichen und individuellen Lösungswege ermöglicht.

Nur 6 Lehrer/innen glauben, dass mit diesem Lernpfad die Schüler/innen Mathematiklernen als Erkundungsprozess erleben, der allein oder gemeinsam mit anderen in intensiven Austausch von Ideen und Argumenten vollzogen werden kann.



7. Erstellungsprozess

5.4.2005 Treffen Wien (10 – 17Uhr)

Besprechen der bereits vorhandenen Ressourcen zum Thema „Funktionen“ im Internet. Abgrenzen der möglichen Inhalte des Lernpfads. Lehrplanstudium. Beginn der Erstellung eines Lernzielkatalogs.

16./17.4 Treffen Salzburg (10 -17Uhr) mit Markus Hohenwarter
Einsatz von GeoGebra zum Thema Funktionen

25.4 Treffen Wien (10 – 17Uhr)

Besprechung des erstellten Lernzielkatalogs zum Thema „Funktionen“. Aufgabenverteilung zur Erstellung von Lernobjekten zum Thema „Funktionen – Einstieg“.

19.5 Treffen Wien (10-17Uhr)

Besprechen der erstellten Lernobjekte bzw. Überarbeitung der erstellten Lernobjekte

28.5/28.5 Arbeitstagung Medienvielfalt in Stockerau (14 – 16Uhr)

Besprechung der erstellten Lernobjekte. Aufgabenverteilung: technische Umsetzung, methodische Anleitungen, didaktischer Kommentar, Werkzeughandling

13.7 Treffen Wien (10-17Uhr) mit Markus Hohenwarter

Möglicher Einsatz von GeoGebra bei „Funktionen – Einstieg“. Besprechen der methodischen Anleitungen, Werkzeughandling,...

13.9. Treffen Wien (10 -17Uhr)

Besprechen des didaktischen Kommentars, Design des Lernpfads,...

14.10/15.10 Arbeitstagung Salzburg

Besprechen der letzten Überarbeitungen, Übersichtsseite des Lernpfads

10.11/11.11

Einarbeiten von Anregungen zum Lernpfad vom Bundesseminar „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ in Rankweil, Fertigstellen des Didaktischen Kommentars.

22. 6. 2006 Treffen Hollabrunn (10 – 17 Uhr)

Besprechen des Rechenschaftsberichtsteils über den Lernpfad „Funktionen – Einstieg“, Aufgabenverteilung.

31. 8. 2006 Treffen Hollabrunn (9 - 15 Uhr)

Besprechen und Überarbeiten der einzelnen Teile für den Rechenschaftsbericht.

26. 9. 2006 Treffen Hollabrunn (11 - 18 Uhr)

Fertigstellen des Rechenschaftsberichts.

Zwischen allen Treffen wurde das erstellte Material per E-mail ausgetauscht und Änderungsvorschläge eingebracht bzw. eingearbeitet.

8. Anhang

8.1 Lernspirale zum Lernpfad

Lernspirale zum Thema „Einstieg Funktionen“

5. Klasse

von

Bierbaumer Irma (irma.bierbaumer@utanet.at)

Embacher Franz (franz.embacher@univie.ac.at)

Heugl Helmut (hheugl@aon.at)

Themenbereich/Inhalte:	
Einstieg Funktionen	
Fachliche	
Voraussetzungen:	Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> Lehrinhalte über Funktionen aus der 4.Klasse. 	<ul style="list-style-type: none"> Finden von Formeln anhand von Wertetabellen. Erstellen von Wertetabellen mit einem elektronischen Medium. AbleSEN von Werten aus der Wertetabelle. Kennen und anwenden können der Definition einer Funktion. Bezeichnungen wie Definitionsmenge, Zielmenge, Argument, Funktionswert, abhängige und unabhängige Variable kennen und anwenden können. Definition eines Funktionsgraphen formulieren und anwenden können. Erstellen von Funktionsgraphen mit einem elektronischen Medium. Skizzen von Funktionsgraphen anfertigen können. AbleSEN von Werten aus dem Funktionsgraphen. Beschreiben der Abhängigkeit anhand des Funktionsgraphen. Erkennen, ob eine Kurve ein Funktionsgraph ist.
Methodische	
Voraussetzungen:	Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> Arbeitsblätter bearbeiten Gruppen – und Partnerarbeit Präsentation von Lösungen Informationsbeschaffung aus Arbeitsblättern 	<ul style="list-style-type: none"> Erweiterung und Festigung des Lernmethodenrepertoires der Schüler/innen

Makrospirale zum Thema

Einstieg Funktionen (5.Klasse)

Vorwissen /Voreinstellungen aktivieren

A1	Anhand einer Tabelle eine Formel entwickeln, Tabelle mit elektronischem Medium erzeugen, anhand der Tabelle Fragestellungen beantworten.
A2	Anhand von geometrischen Überlegungen eine Formel entwickeln, Tabelle mit elektronischem Medium erzeugen, anhand der Tabelle Fragestellungen beantworten.

Neue Kenntnisse/ Verfahrensweisen erarbeiten

A3	Definition einer Funktion, Bezeichnungen bei Funktionen wie Definitionsmenge, Zielmenge, Argument, Funktionswert, abhängige und unabhängige Variable.
A4	Definition des Graphen einer Funktion, erstellen von Graphen von Funktionen mit einem elektronischen Medium, beantworten von Fragestellungen mit Hilfe des Graphen einer Funktion

Komplexere Anwendungs-/Transferaufgaben

A5	Beantworten von Fragestellungen mit Hilfe von erstellten Wertetabellen und Graphen, angeben von Ziel- und Definitionsmengen von Funktionen, ablesen von Werten aus dem Funktionsgraph.
A6	Erkennen, ob eine Kurve ein Funktionsgraph ist oder nicht.

Mikrospirale zu Arbeitsinsel A1: Handyrechnung

Arbeits- schritte	<i>Lernaktivitäten der Schüle/innen</i>	Sozial- form	Zeit	Arbeitsmittel/Anlagen	Sonstiges
1	Jeder Schüler, jede Schülerin bearbeitet die Aufgabenstellung zum Handybeispiel (1).	EA	10 min	Arbeitsblatt entweder ausgedruckt oder elektronisch, Schulübungsheft.	
2	Besprechen und Vergleichen der gefundenen Lösungen zu Handybeispiel (1). Danach wird in Partnerarbeit Handybeispiel (2) bearbeitet.	PA	10 min ¹	Arbeitsblatt entweder ausgedruckt oder elektronisch, Schulübungsheft und elektronisches Werkzeug.	
3	Bearbeiten von Handybeispiel (3).	PA	10 min	Arbeitsblatt entweder ausgedruckt oder elektronisch, Schulübungsheft und elektronisches Werkzeug.	
4	Diskutieren der gefundenen Antworten und Einigung auf eine Gruppenlösung.	GA	5 min		Aufteilung der Klasse in 4 Gruppen.
5	Jede Gruppe präsentiert die Antwort auf eine Anfrage an die Hotline. Diskussion der gefundenen Lösungen.	Plenum	10 min	Beamer, elektronisches Werkzeug	

¹ Sind die Schüler/innen mit dem elektronischen Werkzeug noch nicht vertraut, so muss hier mehr Zeit eingeplant werden.

Mikrospirale zu Arbeitsinsel A2: Volumen einer Schachtel

Arbeits-schritte	<i>Lernaktivitäten der Schüler/innen</i>	Sozial-form	Zeit	Arbeitsmittel/Anlagen	Sonstiges
1	Jeder Schüler, jede Schülerin bearbeitet Schachtelbeispiel (1).	EA	10 min	Arbeitsblatt entweder ausgedruckt oder elektronisch, Schulübungsheft.	
2	Besprechen und Vergleichen der gefunden Lösungen zu Schachtelbeispiel (1). Danach wird in Partnerarbeit Schachtelbeispiel (2) bearbeitet.	PA	10 min ²	Arbeitsblatt entweder ausgedruckt oder elektronisch, Schulübungsheft und elektronisches Werkzeug.	
4	Diskutieren der gefundenen Antworten und Einigung auf eine Gruppenlösung.	GA	10 min	Arbeitsblatt entweder ausgedruckt oder elektronisch, Schulübungsheft und elektronisches Werkzeug.	Aufteilung der Klasse in 4-5 Gruppen.
5	Eine Gruppe präsentiert die Lösungen der Fragestellungen. Diskussion der gefundenen Lösungen.	Plenum	10 min	Beamer, elektronisches Werkzeug	

² Sind die Schüler/innen mit dem elektronischen Werkzeug noch nicht vertraut, so muss hier mehr Zeit eingeplant werden.

Mikrospirale zu Arbeitsinsel A3: Definition und Bezeichnungen

Arbeits-schritte	Lernaktivitäten der Schüler/innen	Sozial-form	Zeit	Arbeitsmittel/Anlagen	Sonstiges
1	Jeder Schüler, jede Schülerin liest das Theorieblatt mit dem „Musterbeispiel“ durch und füllt das Arbeitsblatt aus.	EA	20 min	Theorieblatt (Definition des Funktionsbegriffs, Funktionen beschreiben Abhängigkeiten), Arbeitsblatt Handybeispiel (4), Arbeitsblatt Schachtelbeispiel (3) entweder ausgedruckt oder elektronisch.	Jeder Schüler, jede Schülerin bearbeitet nur 1 Arbeitsblatt (entweder Handybeispiel (4) oder Schachtelbeispiel (3)).
2	Besprechen und Vergleichen des Arbeitsblatts.	PA	10 min	Theorieblatt, Arbeitsblatt Handybeispiel (4), Arbeitsblatt Schachtelbeispiel (3) entweder ausgedruckt oder elektronisch,	Es finden sich zwei Schüler/innen mit dem gleichen Arbeitsblatt.
4	Diskutieren der gefundenen Antworten und Einigung auf eine Gruppenlösung.	GA	10 min		Aufteilung der Klasse in 4Gruppen. In jeder Gruppe finden sich Schüler/innen die das gleiche Arbeitsblatt bearbeitet haben.
5	Je eine Gruppe pro Arbeitsblatt präsentiert die Lösungen der Fragestellungen. Diskussion der gefundenen Lösungen.	Plenum	10 min	Beamer u./od. Overheadprojektor	Jeder Schüler, jede Schülerin erhält das zweite, noch nicht bearbeitete Arbeitsblatt und schreibt bei der Präsentation mit (oder füllt das Arbeitsblatt als HÜ aus).

Mikrospirale zu Arbeitsinsel A4: Funktionsgraphen

Arbeits-schritte	Lernaktivitäten der Schüler/innen	Sozial-form	Zeit	Arbeitsmittel/Anlagen	Sonstiges
1	Jeder Schüler, jede Schülerin liest die Definition für den Graphen einer Funktion genau durch und überträgt diese ins Schulübungsheft.	EA	5 min	Arbeitsblatt elektronisch, Schulübungsheft.	
2	Jeder Schüler, jede Schülerin erhält ein Arbeitsblatt (Handybeispiel (5) oder Schachtelbeispiel (4). Die Aufgabenstellungen werden in Partnerarbeit bearbeitet.	PA	15 min ³	Arbeitsblatt Handybeispiel (5), Arbeitsblatt Schachtelbeispiel (4) entweder ausgedruckt oder elektronisch, elektronisches Medium.	Es finden sich zwei Schüler/innen mit dem gleichen Arbeitsblatt.
4	Diskutieren der gefunden Antworten und Einigung auf eine Gruppenlösung.	GA	10 min		Aufteilung der Klasse in 6 Gruppen. In jeder Gruppe finden sich Schüler/innen die das gleiche Arbeitsblatt bearbeitet haben.
5	Experten erklären ihren Lösungsweg den anderen Gruppenmitgliedern. Diese machen Aufzeichnung am Arbeitsblatt.	GA	15 min	Arbeitsblatt Handybeispiel (5), Arbeitsblatt Schachtelbeispiel (4) entweder ausgedruckt oder elektronisch, elektronisches Medium.	Bilden von Mischgruppen. Jeder Schüler, jede Schülerin erhält das fehlende Arbeitsblatt.

³ Sind die Schüler/innen mit dem elektronischen Werkzeug noch nicht vertraut, so muss hier mehr Zeit eingeplant werden.

Mikrospirale zu Arbeitsinsel A5: Überall Funktionen

Arbeits- schritte	<i>Lernaktivitäten der Schüler/innen</i>	Sozial- form	Zeit	Arbeitsmittel/Anlagen	Sonstiges
1	Jeder Schüler, jede Schülerin bekommt ein Arbeitsblatt und löst die Aufgabenstellungen.	EA od. PA	20 min	4 Arbeitsblätter (Geschwindigkeitsmessung, Rechtwinkeliges Dreieck, Zug und Baustelle, Bremsweg) elektronisch oder ausgedruckt, Dokumentation, elektronisches Medium.	
2	Diskutieren der gefundenen Antworten und Einigung auf eine Gruppenlösung.	GA	10 min		In jeder Gruppe finden sich Schüler/innen die das gleiche Arbeitsblatt bearbeitet haben.
4	Experten erklären ihren Lösungsweg den anderen Gruppenmitgliedern. Diese machen Aufzeichnung am Arbeitsblatt.	GA	40 min		Bilden von Mischgruppen. Jeder Schüler, jede Schülerin erhält die fehlenden Arbeitsblätter.
5	Präsentation und Diskussion der Beispiele.	Plenum	25 min	Beamer u./ od. Overheadprojektor	Ein Schüler/ eine Schülerin wird zufällig zur Präsentation ausgewählt. Die restlichen Ergänzungsbeispiele (Temperaturkurve, Funktionale Abhängigkeiten verstehen, Erweitertes Schachtelbeispiel) können als Hausübung aufgegeben werden.

Mikrospirale zu Arbeitsinsel A6: Ist das ein Funktionsgraph?

Arbeits- schritte	<i>Lernaktivitäten der Schüler/innen</i>	Sozial- form	Zeit	Arbeitsmittel/Anlagen	Sonstiges
1	Jeder Schüler, jede Schülerin bearbeitet den Multiple Choice-Test und druckt das Arbeitsblatt aus.	EA	10 min	Elektronisches Arbeitsblatt	
2	Die Beispiele werden besprochen und am Arbeitsblatt Begründungen für „Graph“ oder „nicht Graph“ notiert.	GA	15 min		
3	Präsentation und Diskussion der Beispiele und Begründungen.	Plenum	15 min	Beamer u./od. Overheadprojektor	Schüler/innen werden zur Präsentation zufällig ausgewählt.

Medienvielfalt
im **Mathematikunterricht** 

Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

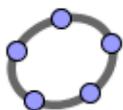
Medienvielfalt im Mathematikunterricht

TEIL 4

LERNPFAD VEKTORRECHNUNG

Teil 1

Hollabrunn, Dezember 2006



GeoGebra



Eine Galerie multimedialer Lernhilfen

mathe online

für Schule, Fachhochschule,
Universität und Selbststudium

Lernpfad: Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1

9. Schulstufe

Autoren/innen:

Lernpfad: Andreas Lindner, Markus Hohenwarter, Thomas Himmelbauer,
Arbeitsplan: Anita Dorfmayr

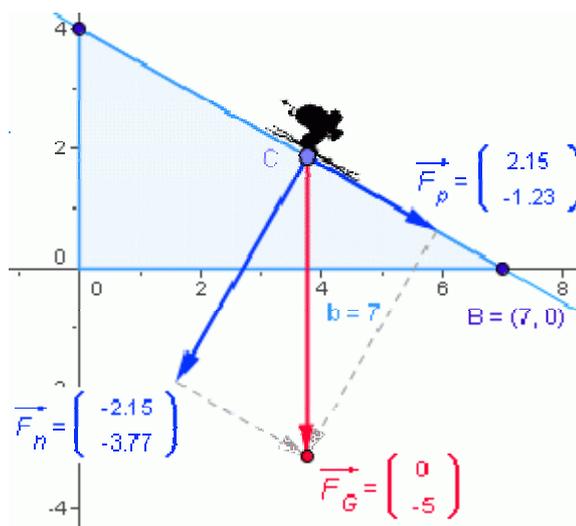
1. Motivation – Warum wurde das Thema gewählt?

Die Vektorrechnung bietet in der Einführungsphase eine ideale Möglichkeit zum Einsatz von dynamischer Geometriesoftware wie das in dem Lernpfad oftmals verwendete Programm GeoGebra. Diese Software stellt die Verwendung von Vektoren in der Ebene standardmäßig zur Verfügung, so dass Visualisierungen wie in den dargestellten Applets ermöglicht werden. Durch die Verwendung von dynamischen Formeln kann das intuitive Verständnis für die Lage oder die Länge von Vektoren wesentlich erleichtert werden. Die Einarbeitungszeit für diese Geometriesoftware ist für Schüler/innen erfahrungsgemäß sehr kurz, so dass das Hauptaugenmerk der Arbeit stets auf die Mathematik gerichtet bleiben kann und nicht auf die Beherrschung der Technik.

Weiters bietet die Vektorrechnung einen guten Ansatz, die fächerübergreifenden Aspekte zwischen Mathematik und Physik bzw. Technik hervorzuheben, wie in den Anwendungsbeispielen versucht wird aufzuzeigen. Dabei stand bei der Konzeption des Lernpfades stets das erforschende, explorative Arbeiten der Schüler/innen als Einstieg in jedes Kapitel im Vordergrund, das in weiterer Folge in einer Phase der Exaktifizierung ergänzt wird.

2. Didaktischer Kommentar

Dieser Lernpfad bietet einen Einstieg in die Grundlagen der Vektorrechnung. Durch interaktive Applets, Übungen und Aufgaben mit Lösungen sollen die Schülerinnen und Schüler die Darstellung von Vektoren und das Rechnen mit diesen erlernen. In mehreren Anwendungsbeispielen aus den Naturwissenschaften sollen die Notwendigkeit und die Einsatzmöglichkeiten für das Rechnen mit Vektoren erläutert werden, wobei auf eine Kombination von Lernen am PC und traditionellem Unterricht mit Heft Wert gelegt wird. Eine Anleitung zum Arbeiten mit Vektoren in GeoGebra und in Computer-Algebra-Systemen rundet das Angebot ab.



Kurzinformation	
Schulstufe	9. Schulstufe
Dauer	4 - 6 Stunden
Unterrichtsfächer	Mathematik
Verwendete Medien	Java-Applets, Dynamische Geometrie Software (DGS)
Technische Voraussetzungen	Java
Autoren	Andreas Lindner, Markus Hohenwarter, Thomas Himmelbauer, Anita Dorfmayr

Voraussetzungen für die Lehrkraft

- technische Voraussetzungen: Java, Umgang mit dem Internet
- fachliche Voraussetzungen: Vektorrechnung im \mathbb{R}^2 auf elementarem Niveau

Einstieg: Vorwissen / Voreinstellungen aktivieren

- kein spezielles Vorwissen nötig.

Neuigkeiten: Neue Kenntnisse / Verfahrensweisen erarbeiten

- Verbalisieren von Sachverhalten, die in den Applets erarbeitet worden sind.
- Formulieren von Zusammenhängen und selbständiges Aufstellen von mathematischen Formeln.
- Darstellung von Größen durch Pfeile
- Erweiterung und Abstraktion von Zahlen auf zweidimensionale Größen
- Rechenoperationen mit zweidimensionalen Größen kennenlernen
- Verbinden von rechnerischen und graphischen Lösungsmöglichkeiten

Herausforderungen: Komplexere Anwendungs- / Transferaufgaben

- Rechengesetze für die Vektorrechnung
- Darstellung der interaktiven Applets auf traditionelle Darstellung im Heft anpassen.
- Umkehrung der Vektoraddition zur Zerlegung in Komponenten

Lernmedien der Schüler/innen

Computer, Heft, Buch, Lernplattform.

Leistungsbeurteilung

Bewertung der Mitarbeit, entsprechende Schularbeitsbeispiele, Hausübungsbeispiele in der Lernplattform, schriftliche Überprüfung der Mitarbeit.

Die Leistungsbeurteilung hängt sehr stark von den im Verlaufsplan besprochenen Umständen ab. So wird sich die Beurteilung prinzipiell bei Einsatz einer Lernplattform auf andere Kriterien stützen müssen als bei Einsatz des Lernpfades zur Wiederholung und Festigung eines schon großteils bekannten Lerninhalts.

Kombination der Medien

In dem vorliegenden Lernpfad wird versucht, durch interaktive Applets das erforschende Lernen der Schüler/innen zu fördern. Die neu gewonnenen Erkenntnisse sollen im Anschluss daran durch händisches Rechnen im traditionellen Sinn vertieft und gefestigt werden. Viele der Aufgabenstellungen sind eine Verflechtung von Arbeiten am PC und Rechnen mit Papier und Bleistift, wobei die Lösungen der Übungen entweder aus der Konstruktion ersichtlich sind oder explizit als solche angeführt werden.

Der Lernpfad versteht sich nicht als detaillierte Anleitung zum Arbeiten mit CAS, sondern gibt nur exemplarisch Lösungsmöglichkeiten zu konkreten Aufgabenstellungen an. Dabei ergänzt eine Auflistung der wichtigsten Befehle für Derive, MuPad und TI 92/Voyage 200 das Angebot.

Rolle des Lernpfads im Themenbereich

Teil 1 dieses Lernpfades deckt die Grundlagen des Themenbereichs "Vektorrechnung" in der 9. Schulstufe ab; zusammen mit Teil 2 werden alle relevanten Begriffe erklärt und die entsprechenden Rechenoperationen vorgestellt.

Lerninhalte und Lernziele

Lerninhalt	Lernziel
Einleitung Weg und Geschwindigkeit eines Flugzeugs	Die Notwendigkeit für die Einführung von gerichteten Größen verstehen.
Pfeile Pfeile Länge eines Pfeils Pfeile / Vektoren	Die koordinatenweise Schreibweise für Vektoren verwenden können. Die Unterscheidung zwischen Pfeil und Vektor wiedergeben können. Die Länge eines Pfeils berechnen können.
Schiebung	Vektoren als Mittel zur Schiebung einsetzen können.
Gegenvektor	Den Gegenvektor zu einem gegebenen Vektor rechnerisch und graphisch bestimmen können.
Rechenarten Vektoraddition Vektorsubtraktion Rechenregeln Beispiel mit CAS	Die grundlegenden Rechenarten Addition und Subtraktion rechnerisch und graphisch beherrschen. Mit einem CAS-System Beispiele zur Vektorrechnung lösen können.
Anwendungen Einleitung Beleuchtung Laterne Schiefe Ebene Kräfteglei.gew.1	Vektoren in Komponenten zerlegen können und die Einsatzmöglichkeiten in der Technik verstehen.
Vielfaches	Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar rechnerisch nachvollziehen und graphisch interpretieren können.
Übungen Vektoren ablesen Vektor zeichnen Vektoren addieren Kommutativgesetz	Durch die Übungen die Rechensicherheit im Umgang mit Vektoren erhöhen.
Anleitungen	Die Anleitungen verwenden und effizient einsetzen können.

3. Vorteile des Medieneinsatzes – exemplarische Beschreibung der Materialien

„Die Abbildungen waren sehr leicht zu verstehen; das Layout war sehr bunt gestaltet. Die Merksätze waren einfach formuliert - Schritt für Schritt zu arbeiten war sehr toll.“ (Zitat eines/einer Schülers/in im Rückmeldebogen)

Durch den Einsatz von dynamischer Geometriesoftware können Sachverhalte in vielen Fällen viel besser und anschaulicher visualisiert werden als durch statische Skizzen.

Länge eines Pfeils

Als Beispiel sei hier die Länge eines Pfeils angeführt, deren Berechnung im verwendeten Applet durch eine dynamische Formel angezeigt wird. Wenn der Benutzer Anfangs- oder Endpunkt des Pfeils bewegt, ändert sich gleichzeitig auch die Formel und das Ergebnis der Rechnung. Außerdem wird die koordinatenweise Darstellung des Pfeils dynamisch angezeigt. Durch Ausprobieren und Erforschen einer allgemeinen Situation in Kombination mit einer konkreten Aufgabenstellung, die auch rechnerisch mit Papier und Bleistift gelöst werden soll und deren Lösung angeboten wird, ergibt sich eine Lernsituation, die eine Verbesserung zum traditionellen Mathematikunterricht darstellt.

Die Länge eines Pfeiles

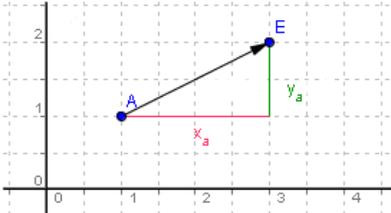


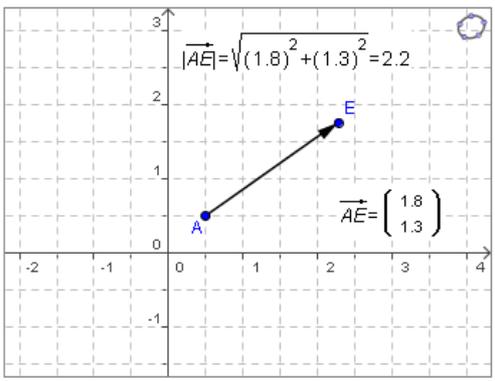
Abbildung: Pfeil \vec{AE}

In dem dargestellten rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz von Pythagoras:

Länge eines Pfeils: $|\vec{AE}| = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2}$

Für die Länge eines Vektors gilt völlig analog

Länge eines Vektors: $|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$



Aufgabe:

- Verändere Anfangs- oder Endpunkt A bzw. E des Pfeils \vec{AE} und beobachte die Auswirkung auf die Länge des Pfeils!

Übung:

- Berechne händisch und mittels nebenstehender Konstruktion die Länge des Pfeils vom Anfangspunkt A(0/2) bis zum Endpunkt E (3/1)!

Lösung

© A. Lindner 2005, erstellt mit [GeoGebra](#)

Abbildung 1: Die Länge eines Pfeils

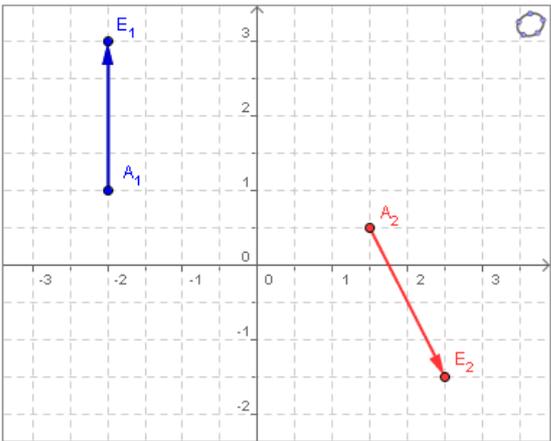
„Die Animationen waren sehr gut. Sie sind etwas leichter verständlich als Erklärungen. Auch die einzelnen Teilgebiete des Lernpfades "PFEILE"...waren sehr gut geordnet bzw. strukturiert. (Zitat eines/einer Schülers/in im Rückmeldebogen)

Übungsaufgaben

In den Lernpfad sind Übungsaufgaben eingebaut, die mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen beliebig oft wiederholt werden können und zur Festigung der neuen Lerninhalte dienen sollen. Eine Rückmeldung über die Richtigkeit der Ausführung erfolgt über ein Popup-Fenster, das Länge, Parallelität und Orientierung eines Pfeils wiedergibt.

Verschiedene Pfeile - derselbe Vektor

Verschiedene Pfeile repräsentieren denselben Vektor, wenn sie **gleich lang, parallel und gleich orientiert** sind.



Aufgabe:
Verändere den Anfangspunkt- oder Endpunkt des **roten Pfeils** so, dass ...

1. **der rote Pfeil** zum selben Vektor gehört wie der **blaue Pfeil**;
2. **der rote Pfeil** gleich lang ist wie **blaue Pfeil**, aber nicht zum selben Vektor gehört.
3. **der rote Pfeil** parallel ist zu **blaue Pfeil**, aber nicht zum selben Vektor gehört;
4. **der rote Pfeil** gleich lang, parallel und entgegengesetzt orientiert ist wie **blaue Pfeil**.

Überprüfe die Beziehung der beiden Pfeile jeweils durch Klicken auf "Pfeile vergleichen".

Mache diese Aufgabe für mindestens 3 verschiedene Pfeile: klicke dazu auf "Neue Aufgabe".

Neue Aufgabe

Pfeile vergleichen

©M. Hohenwarter 2005, erstellt mit [GeoGebra](#)

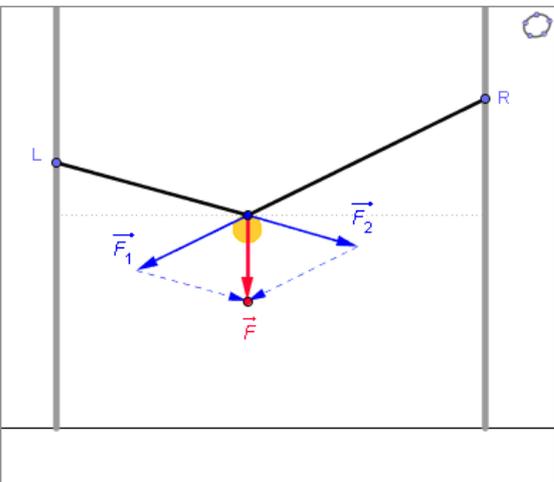
Abbildung 2: Übungsaufgaben

Anwendungsbeispiele

Einige Anwendungsbeispiele sollen die Einsatzmöglichkeiten und die Notwendigkeit der Vektorrechnung in der Technik und in der Naturwissenschaft veranschaulichen.

Straßenbeleuchtung

Eine Straßenbeleuchtung wird in einer bestimmten Höhe montiert. Wie stark sind die seitlich in den Aufhängungspunkten wirkenden Kräfte?



Aufgaben:

- Verändere die Lage des linken bzw. rechten Aufhängungspunkts! Wie verteilen sich dann die wirkenden Kräfte F_1 und F_2 ?
- Verändere die Lage der Lampe!
- Verändere das Gewicht der Lampe!

Frage:

- Ist es möglich, eins der beiden Seile waagrecht zu spannen?
- Ist es möglich, beide Seile waagrecht zu spannen? Wenn nein, warum nicht?

Lösung:

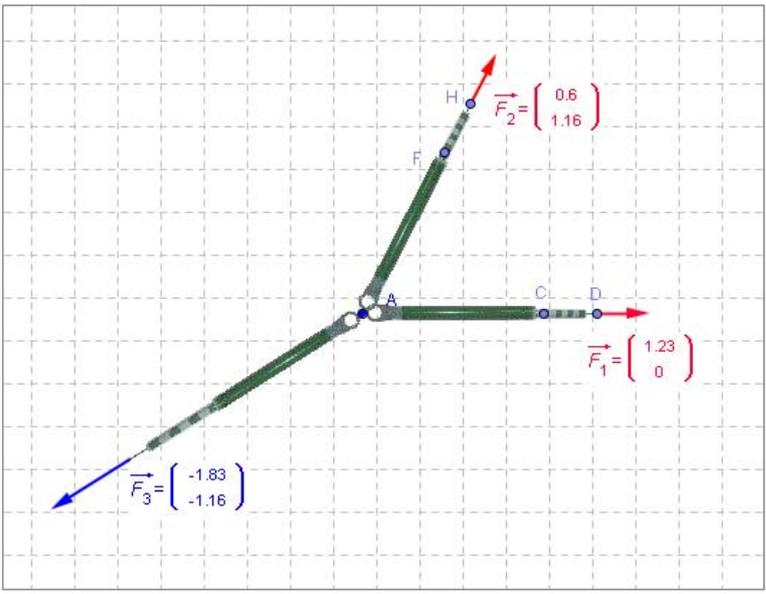
© A. Lindner 2005, erstellt mit [GeoGebra](#)

Abbildung 3: Anwendungsbeispiele - Straßenbeleuchtung

Im folgenden Fall soll gezeigt werden, dass eine Verbindung von mathematischen Aufgabenstellungen mit hinterlegten Bildern oftmals die Motivation erhöht und die Vernetzung von abstrakter Rechnung mit anschaulicher Anwendung verstärkt.

Federwaagen - Kräfte im Gleichgewicht

Beispiel: Die Kraft \vec{F}_3 wirkt der resultierenden Kraft von \vec{F}_1 und \vec{F}_2 entgegen; die 3 Kräfte befinden sich im **Gleichgewicht**.



Aufgaben:

- Verändere die Lage der Punkte an der **ersten** und **zweiten Federwaage!**
Verschiebe bei Bedarf die Konstruktion mit dem Punkt A!
- Rechne nach, ob die Summe von \vec{F}_1 und \vec{F}_2 auch tatsächlich $-\vec{F}_3$ entspricht!

© A. Lindner 2005, erstellt mit GeoGebra

Abbildung 4: Anwendungsbeispiele - Federwaage

4. Drehbuch / Drehbücher – Methodisch-didaktische Anleitungen

4.1. Unterrichtsorganisation – Arbeitsanweisungen für Schüler/innen

Nach Durcharbeiten dieses Lernpfades sollst du erklären können, was der Unterschied zwischen einem Pfeil und einem Vektor ist.

- Beispiele dafür angeben können, wozu man Vektoren verwenden kann.
- Vektoren mit Hilfe von Koordinaten angeben können.
- Vektoren addieren, subtrahieren und Vielfache von Vektoren ausrechnen können.
- die Länge von Vektoren berechnen können.

Arbeite den Lernpfad sorgfältig durch. Du kannst bei jedem Lernschritt neu entscheiden, ob du ihn lieber alleine oder gemeinsam mit einem Partner / einer Partnerin machen möchtest.

Führe eine Projektmappe - händisch oder am Computer. Sie muss folgendes enthalten:

- diesen **Arbeitsplan**
- **Zeitplan**, auf dem möglichst genau eingetragen ist, wann du was mit wem machen möchtest / gemacht hast. Das Projekt dauert **5 Unterrichtsstunden**.
- Alle deine **Aufzeichnungen**: Rechnungen, Merksätze, Skizzen, Probleme, Hausübungen, ...
- Achte besonders darauf, deine Projektmappe übersichtlich zu gestalten! Vergiss nicht auf Überschriften, Beispielangaben, etc. Kontrolliere zum Schluss, ob du alle Lernziele (siehe oben) erfüllt hast!

- **Protokoll** zu jedem Lernschritt mit den folgenden Inhalten:
 - Titel und kurze Beschreibung des Lernschritts
 - deine Aufzeichnungen dazu
 - Hattest du Probleme mit dem Lernschritt? Wenn ja, welche?
- Alle GeoGebra-Dateien, die du selbst erzeugt hast (elektronisch oder ausgedruckt).
- Im Lernpfad werden vier Anwendungen vorgestellt. Wähle **eine Anwendung** von diesen vieren und gestalte dazu eine übersichtliche DIN A4 – Seite.

Präsentation: Deine Lehrerin / dein Lehrer wird vier Schülerinnen / Schüler aus deiner Klasse auswählen, die die vier vorgestellten Anwendungen der Vektorrechnung präsentieren sollen.

Es gibt 3 **Hausübungen**, die verschiedenen Themen zugeteilt sind. Die Beispiele findest du in deinem Schulbuch¹. Überlege selbst, wann du welche Hausübung machen kannst. Die Hausübungen sind unterschiedlich lang. Teile dir die Arbeit daher gut ein!

<p>Pfeil - Vektor - Schiebung Pflicht: 672 a-d, 673 a-d, 681, 685, 686 a-c, 687 a-c, 687 d-g, 688 f-h Bonus: 676</p>	<p>Rechnen mit Vektoren Pflicht: 692 e-h, 693 a-b, 694 a, 696 a Bonus: 696 b, 698 d-d, 699</p>
<p>Länge von Vektoren Pflicht: 679 a – d, 682</p>	

Sollten Fragen bzw. Probleme auftauchen: Diskutiere dein Problem zuerst mit einem Mitschüler oder einer Mitschülerin. Falls ihr das Problem auch zu zweit nicht lösen könnt, wendet euch an euren Lehrer / eure Lehrerin.

Zur **Beurteilung** des Projektes zählen

- Projektmappe (Vollständigkeit, Ausführung, ...)
- Arbeitshaltung (Selbständigkeit, ...)
- Hausübungen. Achte auch auf rechtzeitige Abgabe der Hausübungen!
- Freiwillige Zusatzübungen (z.B. Beispiele aus deinem Schulbuch, Internetrecherche, etc.)

4.2. Anleitungen für Lehrer/innen

Verlaufsplan / Prozesshinweise

Dieser Lernpfad wurde prinzipiell zum selbstständigen Erarbeiten der Inhalte konzipiert. Besonderes Augenmerk wurde auf die Verbindung von interaktiven Lernhilfen und traditionellen Medien (Tafel, Buch, Heft) gelegt. Außerdem eignet sich dieser Lernpfad auch als Wiederholung oder Zusammenfassung der Lerninhalte.

Grundsätzlich wäre für ein effizientes Arbeiten pro Schüler/Schülerin ein PC notwendig; allerdings ist auch eine Partnerarbeit an einem Gerät bei entsprechender Abstimmung der Lerngeschwindigkeiten der beiden Partner durchaus möglich. Das Arbeiten am Computer wird öfter durch Aufgabenstellungen, die im Heft durchzuführen sind, unterbrochen, weshalb idealerweise für ausreichend freien Arbeitsplatz zwischen den PCs gesorgt sein sollte.

Abhängig von den äußeren Gegebenheiten in der jeweiligen Klasse (ständige Verfügbarkeit von Computern in Notebookklassen, sporadische Einsatzmöglichkeit eines PCs im Informatik-Saal,...) unterliegt eine Anpassung des vorliegenden Lernpfades dem unterrichtenden Lehrer/Lehrerin. So könnten bei ständigem Einsatz von Notebooks etwa Übungsaufgaben mit dynamischer Geometrie - Software wie GeoGebra oder mit CAS-Systemen wie Derive bearbeitet werden und anschließend über Lernplattformen abgegeben werden.

¹ Götz, Reichel: Mathematik Lehrbuch 5, 1. Auflage 2004

5. Ergebnisse der internen Evaluation

Der Lernpfad dient der Erarbeitung bzw. Wiederholung neuer Inhalte und der Anwendung von Vektoren bei technischen und physikalischen Fragestellungen. Die Modellbildung wird durch gut durchdachte und detailliert gestaltete Applets sowie damit verbundene offene Fragestellungen unterstützt.

Mathematische Inhalte sind korrekt formuliert, die Begriffe „Pfeil“ und „Vektor“ werden aber nicht durchgängig scharf voneinander abgegrenzt. Dies wurde vom Autor aber bewusst so gehandhabt, um den Umfang des Lernpfades nicht zu sprengen.

Lernziele sind für Lehrer/innen im didaktischen Kommentar nachzulesen, werden für die Schüler/innen nicht explizit angeführt, ergeben sich aber aus den Fragestellungen.

Konkret operative Phasen beschränken sich auf die Bedienung der zahlreich vorhandenen Applets, auf Beobachten, Dokumentieren und auf das Berechnen von Ergebnissen. Ob dabei ausreichend Möglichkeiten für Schüler/innen über Mathematik zu reden gegeben sind, bleibt dem Lehrer/der Lehrerin überlassen.

Die Handlungsanweisungen zu den Applets und dynamischen Elementen sind manchmal zu wenig genau bzw. nicht ausführlich genug formuliert. Zusätzliche Anweisungen durch den Lehrer/die Lehrerin in mündlicher oder schriftlicher Form bzw. konkrete Fragen in einer Lernplattform würden sinnvolles Arbeiten unterstützen.

Der Intention des Lernpfades entsprechend (als Einführung in die Vektorrechnung) gibt es zwar einige Beispiele mit vorhandenen Lösungen, die durch Verweise auf Beispiele in einem Schulbuch ergänzt werden, aber keinen ausführlichen Übungsteil zur Vertiefung und Festigung des Wissens.

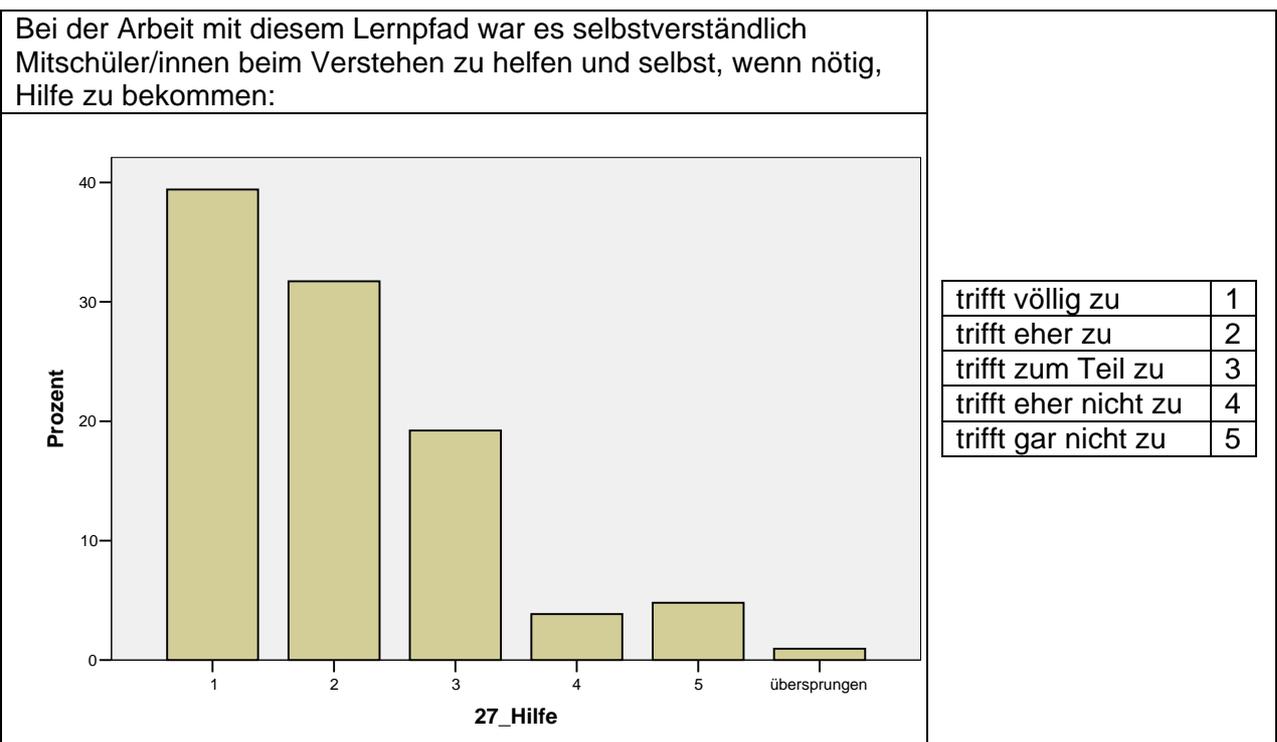
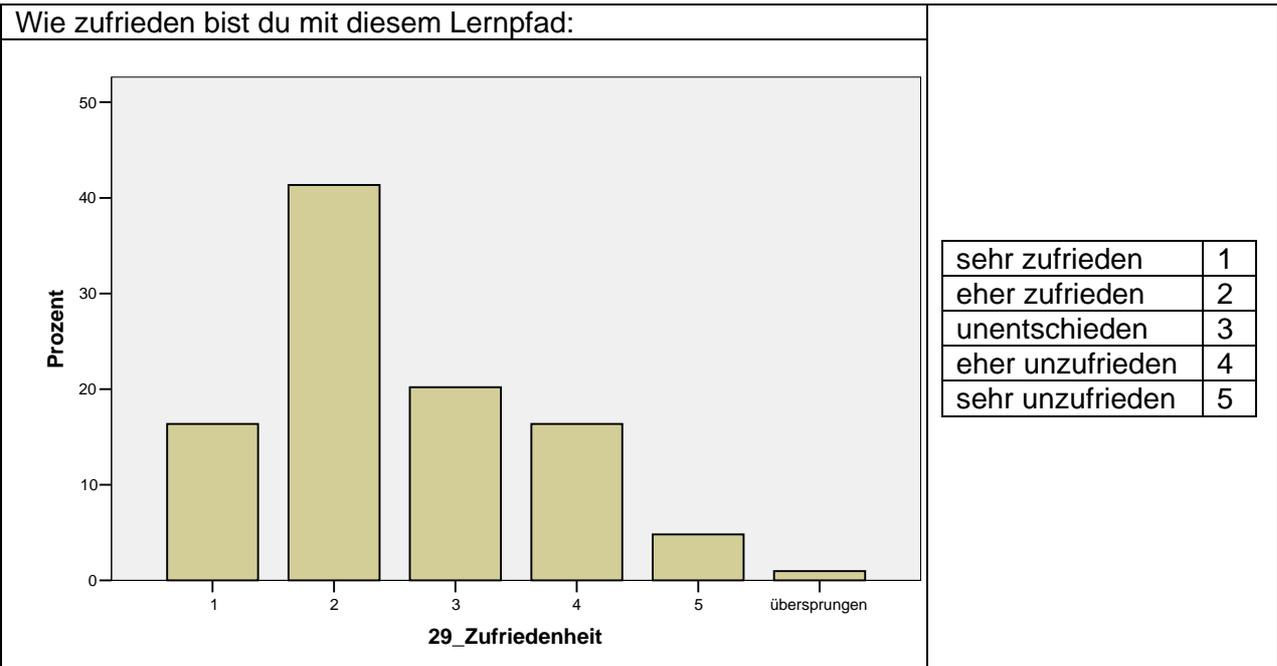
6. Äußere Evaluation / Feedback der Schüler/innen

„Die Laterne: Die vielen Erklärungen und Aufgaben haben mir geholfen diese Beispiel zu verstehen; ebenso dass man alles verschieben und sich danach die Veränderung ansehen kann.“ (Zitat eines/r Schülers/in im Rückmeldebogen)

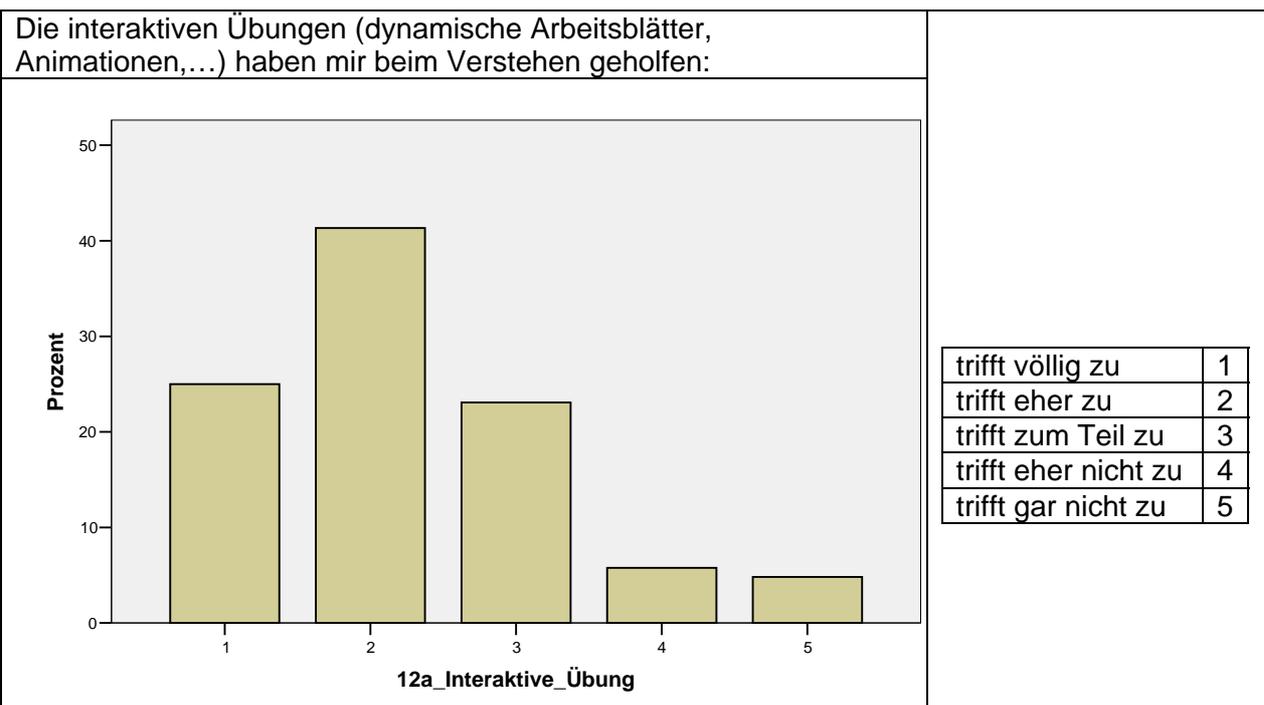
Die Beantwortung des Feedbacks erfolgte durch 104 Schüler/innen.

Das Gesamtbild der Rückmeldungen der Schüler/innen weichen nur minimal vom Durchschnitt aller anderen Lernpfade ab, es ergeben sich keine erwähnenswerten Besonderheiten.

Exemplarisch werden einige Auswertungen von Rückmeldungen der Schüler/innen angeführt.



Die interaktiven Applets zu den Anwendungsaufgaben wurden bei den offenen Fragen durch die Schüler/innen besonders oft positiv erwähnt. Sie schätzen vor allem die Möglichkeit selbst individuelle Veränderungen vornehmen zu können, da dies die Modellbildung und das mathematische Verständnis unterstützt.



7. Überblick über den Erstellungsprozess

Die ursprüngliche Planung umfasste nur einen Lernpfad „Vektorrechnung in der Ebene“. Bei der Fülle der zu behandelnden Kapitel zeigte sich jedoch bald eine Aufteilung in zwei getrennte Lernpfade als sinnvoll, um eine bessere Strukturierung und Übersichtlichkeit zu gewährleisten.

Bei den ersten Besprechungen wurde versucht, teilweise bereits vorhandene Materialien der Autoren zu sichten und zu ordnen, Überschneidungen und Doppelgleisigkeiten zu beseitigen. Grundlegend einigte man sich dabei auf die Navigationsstruktur auf HTML-Basis mit interaktiven GeoGebra-Applets und dazu parallelen Ausführungen für CAS wie Derive, Voyage und MuPad.

Auf Recherchen im Internet und Suche nach vorhandenen Materialien wurde sehr wenig Arbeitszeit verwendet, da die Autoren bestrebt waren, ihre eigenen Arbeiten zu verwenden, um einen Lernpfad mit einem eher „geschlossenes Bild“ zu produzieren.

Externe Links wurden aus diesem Grund im Großen und Ganzen nicht verwendet, auch um das Offline-Arbeiten weitgehend zu ermöglichen, nur mit Ausnahme einiger Übungsseiten etwa zur Addition von Vektoren, die in den Übungsteil aufgenommen wurden.

Bei allen didaktischen Überlegungen stand stets die hohe Eigenaktivität der Schüler/innen im Vordergrund, verbunden mit konkreten Arbeitsaufgaben, die Arbeiten am PC bzw. Heft und Bleistift beinhalten.

Bei weiteren folgenden Besprechungen wurde versucht, einen Arbeitsplan mit Anleitungen und Verbindungen zu vorhandenen Schulbüchern zu erstellen.

Medienvielfalt
im **Mathematikunterricht** 

Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

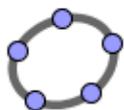
Medienvielfalt im Mathematikunterricht

TEIL 4

LERNPFAD VEKTORRECHNUNG

Teil 2

Hollabrunn, Dezember 2006



GeoGebra

Eine Galerie multimedialer Lernhilfen

mathe online



für Schule, Fachhochschule,
Universität und Selbststudium

Lernpfad: Vektorrechnung in der Ebene, Teil 2

9. Schulstufe

Autoren/innen:

Lernpfad: Andreas Lindner, Markus Hohenwarter, Thomas Himmelbauer

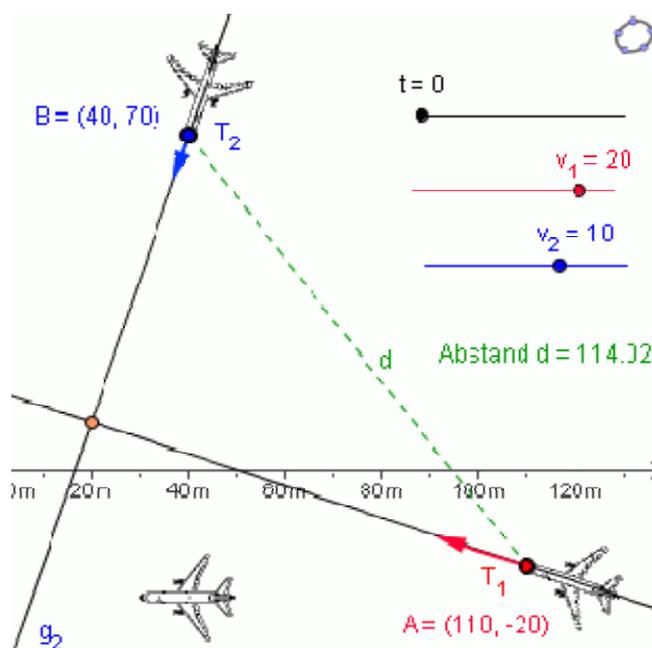
Arbeitsplan: Anita Dorfmayr

1. Motivation – Warum wurde das Thema gewählt?

Dieser Lernpfad ist eine Fortsetzung des Lernpfades „Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1“. In Bezug auf „Motivation“ gelten die dieselben Ausführungen wie beim entsprechenden Kapitel von Teil 1.

2. Didaktischer Kommentar

Aufbauend auf Teil 1 wird in diesem Lernpfad das Wissen über Vektoren erweitert, und Begriffe wie Einheitsvektor, Normalvektor, Skalarprodukt, Parameterdarstellungen erklärt und interaktiv erforscht. Die Schülerinnen und Schüler sind dabei angehalten, nach konkreten Aufgabenstellungen vorzugehen, Fragen zu beantworten und Lösungsmöglichkeiten zu entwickeln. Anschauliche Beispiele aus der Praxis und den Naturwissenschaften lassen die Sinnhaftigkeit der Vektorrechnung einsichtig werden. Wie in Teil 1 ist eine Anleitung zum Arbeiten mit Vektoren in GeoGebra und in Computer-Algebra-Systemen im Lernpfad enthalten.



Kurzinformation	
Schulstufe	9. Schulstufe
Dauer	4 - 6 Stunden
Unterrichtsfächer	Mathematik
Verwendete Medien	Java-Applets, Dynamische Geometrie Software (DGS)
Technische Voraussetzungen	Java
Autoren	Andreas Lindner, Markus Hohenwarter, Thomas Himmelbauer, Anita Dorfmayr

Voraussetzungen für die Lehrkraft

- technische Voraussetzungen: Java, Umgang mit dem Internet
- fachliche Voraussetzungen: Vektorrechnung im \mathbb{R}^2 auf elementarem Niveau

Einstieg: Vorwissen / Voreinstellungen aktivieren

- **Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1**
Koordinatenweise Angabe eines Pfeils, Länge eines Pfeils, Pfeile und Vektoren, Gegenvektor, Vektoraddition, Vektorsubtraktion, Rechenregeln, Vielfaches eines Vektors.

Neuigkeiten: Neue Kenntnisse / Verfahrensweisen erarbeiten

- Verbalisieren von Sachverhalten, die in den Applets erarbeitet worden sind.
- Formulieren von Zusammenhängen und selbständiges Aufstellen von mathematischen Formeln.
- Neue Kenntnisse über Einheitsvektor, Streckenteilung, Parameterdarstellung einer Geraden, Normalvektoren (Erklärung, Herleitung), Skalarprodukt, Winkel-Vektoren (Formel, Herleitung) gewinnen und festigen.
- Die Notwendigkeit von Vektoren in den Anwendungen (Rollfeld 1, Rollfeld 2, Kräftegleichgewicht) verstehen.
- Rechenoperationen mit zweidimensionalen Größen kennenlernen.
- Verbinden von rechnerischen und graphischen Lösungsmöglichkeiten.

Herausforderungen: Komplexere Anwendungs- / Transferaufgaben

- Schnittpunkt von Geraden berechnen.
- Herleitung der Formel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren

Lernmedien der SchülerInnen

Computer, Heft, Buch, Lernplattform.

Leistungsbeurteilung

Bewertung der Mitarbeit, entsprechende Schularbeitsbeispiele, Hausübungsbeispiele in der Lernplattform, schriftliche Überprüfung der Mitarbeit.

Die Leistungsbeurteilung hängt sehr stark von den im Verlaufsplan besprochenen Umständen ab. So wird sich die Beurteilung prinzipiell bei Einsatz einer Lernplattform auf andere Kriterien stützen müssen als bei Einsatz des Lernpfades zur Wiederholung und Festigung eines schon großteils bekannten Lerninhalts.

Kombination der Medien

In dem vorliegenden Lernpfad wird versucht, durch interaktive Applets das erforschende Lernen der SchülerInnen zu fördern. Die neu gewonnenen Erkenntnisse sollen im Anschluss daran durch händisches Rechnen im traditionellen Sinn vertieft und gefestigt werden. Viele der Aufgabenstellungen sind eine Verflechtung von Arbeiten am PC und Rechnen mit Papier und Bleistift, wobei die Lösungen der Übungen entweder aus der Konstruktion ersichtlich sind oder explizit als solche angeführt werden.

Der Lernpfad versteht sich nicht als detaillierte Anleitung zum Arbeiten mit CAS, sondern gibt nur exemplarisch Lösungsmöglichkeiten zu konkreten Aufgabenstellungen an. Dabei ergänzt eine Auflistung der wichtigsten Befehle für Derive, MuPad und TI 92/Voyage 200 das Angebot..

Rolle des Lernpfads im Themenbereich

Teil 1 dieses Lernpfades ist Voraussetzung für das Verständnis des zweiten Teils dieses Lernpfades. Zusammen decken diese beiden Lernpfade die Grundlagen des Themenbereichs "Vektorrechnung" in der 9. Schulstufe ab, wobei alle relevanten Begriffe erklärt und die entsprechenden Rechenoperationen vorgestellt werden.

Lerninhalte und Lernziele

Lerninhalt	Lernziel
Einheitsvektor	Die Notwendigkeit für die Einführung von Einheitsvektoren verstehen und Einheitsvektoren berechnen können.
Streckenteilung	Verbalisieren des entsprechenden Sachverhalts zur Berechnung von Teilungspunkten. Eine Formel zum Abtragen von Strecken entwickeln können.
Parameterdarstellung einer Geraden	Arbeitsschritte entsprechend der Anleitung richtig durchführen. Eine Formel für die Parameterdarstellung einer Geraden entwickeln können.
Anwendung 1 Rollfeld 1 Beispiel mit CAS	Die Verbindung von realer Situation und mathematischem Modell erkennen können. Die Aufgaben entsprechend der Anleitung durchführen und beantworten können.
Normalvektoren Erklärung Herleitung	Normalvektoren rechnerisch angeben können. Die gestellten Fragen beantworten können.
Anwendung 2 Einleitung Beispiel mit CAS	Die Verbindung von realer Situation und mathematischem Modell erkennen können. Die Aufgaben entsprechend der Anleitung durchführen und beantworten können.
Skalarprodukt	Die Mehrdeutigkeit von Normalvektoren wiedergeben können. Die Begründung für die Formulierung des Skalarprodukt verstehen und ein Skalarprodukt berechnen können.
Winkel-Vektoren Formel Herleitung	Den Zusammenhang zwischen Winkel und Skalarprodukt verstehen. Den Winkel zwischen Vektoren berechnen können.
Anwendung 3 Kräftegleichgewicht	Die Verbindung von realer Situation und mathematischem Modell erkennen können.
Anleitungen	Die Anleitungen verwenden und effizient einsetzen können.

3. Vorteile des Medieneinsatzes – exemplarische Beschreibung der Materialien

Einheitsvektoren

Mit Hilfe von dynamischer Geometriesoftware lassen sich Fragestellungen formulieren, die im herkömmlichen Unterricht üblicherweise nicht thematisiert werden konnten, und die das allgemeine Verständnis erhöhen können.

Beispiel:

Auf welcher Kurve bewegt sich der Endpunkt des Einheitsvektors \vec{a}_0 , wenn man bei fixen Anfangspunkt A den Endpunkt B des Vektors \vec{a} beliebig bewegt?

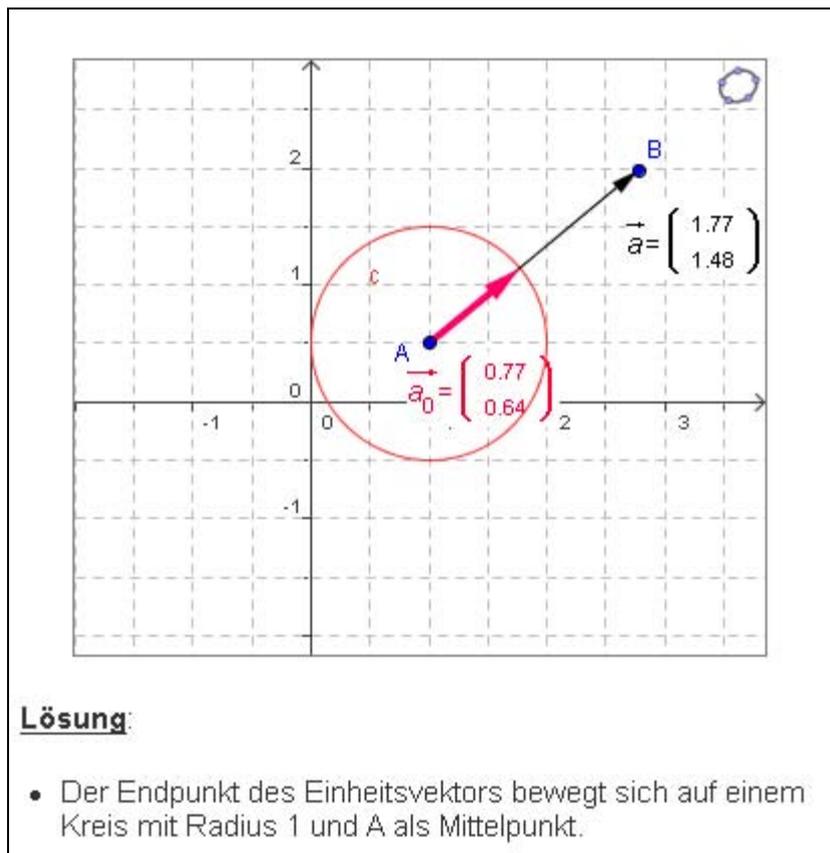


Abbildung 1: Einheitsvektor

Parameterform einer Geraden

Die Herleitung der Parameterform einer Geraden lässt sich unter Zuhilfenahme von Applets auf sehr intuitive Weise erklären, die den meisten SchülerInnen das Verständnis wesentlich erleichtert. Vor allem SchülerInnen, die bei der Verbindung von mathematischer und graphischer Darstellung Schwierigkeiten haben, kann geholfen werden, die Vorstellung zu ermöglichen oder zu verbessern.

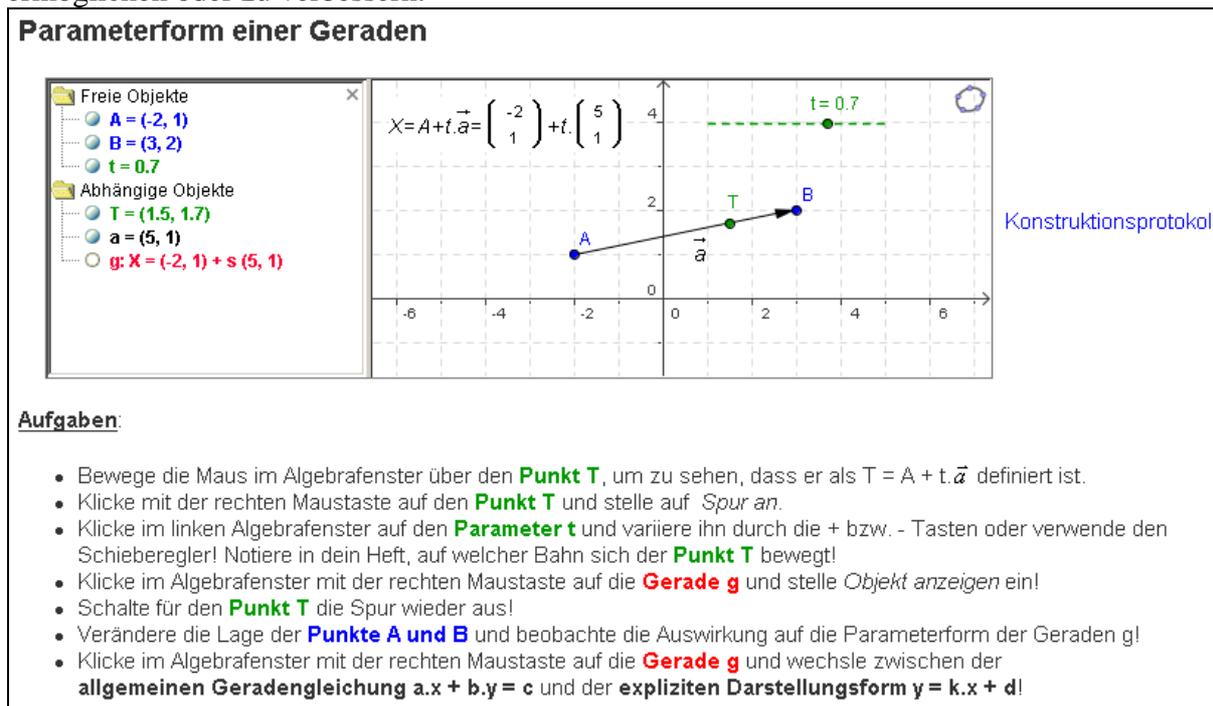


Abbildung 2: Parameterform einer Geraden

Flugzeuge am Rollfeld

An Hand von praxisorientierten Beispielen sollen SchülerInnen die Sinnhaftigkeit und Nützlichkeit von richtungsgebundenen Größen wie Geschwindigkeit kennen lernen. In Verbindung mit Anwendungsbeispielen und erforschendem Lernen lässt sich die Motivation für das Erlernen von eher abstrakten Begriffen wie „Geradengleichung“ und „Schneiden von Geraden“ steigern.

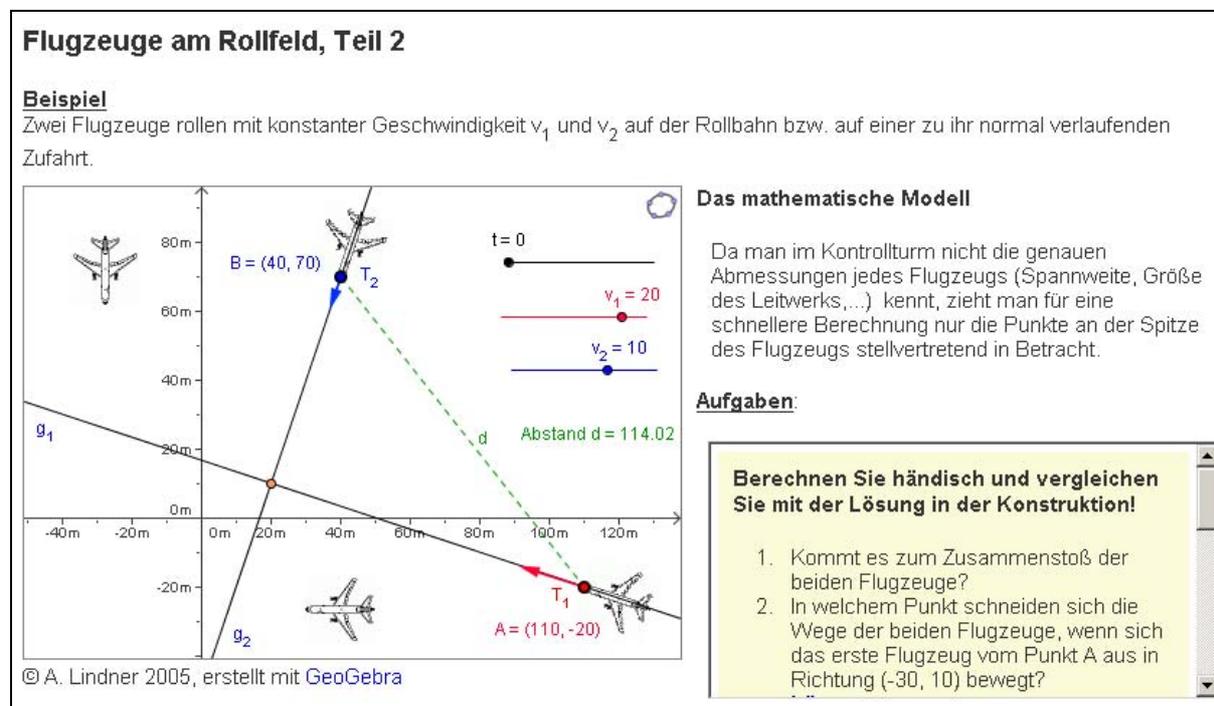


Abbildung 3: Flugzeuge am Rollfeld

4. Drehbuch / Drehbücher – Methodisch-didaktische Anleitungen

4.1. Unterrichtsorganisation – Arbeitsanweisungen für Schüler/innen

Nach Durcharbeiten dieses Lernpfades wirst du sehr gut mit Vektoren in der Ebene umgehen können. Du wirst erfahren, was ein Einheitsvektor und ein Normalvektor ist und wie man den Winkel zwischen zwei Vektoren ausrechnen kann. Außerdem wirst du lernen, wie man mit Hilfe von Vektoren Geraden beschreiben kann.

Arbeite den Lernpfad sorgfältig durch. Du kannst bei jedem Lernschritt neu entscheiden, ob du ihn lieber alleine oder gemeinsam mit einem Partner / einer Partnerin machen möchtest.

Führe eine **Projektmappe** - händisch oder am Computer. Sie muss folgendes enthalten:

- diesen **Arbeitsplan**
- **Zeitplan**, auf dem möglichst genau eingetragen ist, wann du was mit wem machen möchtest /gemacht hast. Das Projekt dauert **6 Unterrichtsstunden**.
- Alle deine **Aufzeichnungen**: Rechnungen, Merksätze, Skizzen, Probleme, Hausübungen, ...
- Achte besonders darauf, deine Projektmappe übersichtlich zu gestalten! Vergiss nicht auf
- Überschriften, Beispielangaben, etc. Kontrolliere zum Schluss, ob du alle Lernziele (siehe oben) erfüllt hast!
- **Protokoll** zu jedem Lernschritt mit den folgenden Inhalten:

- Titel und kurze Beschreibung des Lernschritts
 - deine Aufzeichnungen dazu
 - Hattest du Probleme mit dem Lernschritt? Wenn ja, welche?
 - Im Lernpfad werden drei Anwendungen vorgestellt. Beschreibe **jede Anwendung** übersichtlich auf
 - einer DIN A4 – Seite.
- Alle GeoGebra-Dateien, die du selbst erzeugt hast (elektronisch oder ausgedruckt).

Recherche: Suche in deinem Schulbuch, im Internet, etc. nach weiteren Anwendungen der Vektorrechnung. Beschreibe eine solche Anwendung genau und gib diese Beschreibungen deinem Lehrer / deiner Lehrerin ab.

Es gibt 3 **Hausübungen**, die verschiedenen Themen zugeteilt sind. Die Beispiele findest du in deinem Schulbuch¹. Überlege selbst, wann du welche Hausübung machen kannst. Die Hausübungen sind unterschiedlich lang. Teile dir die Arbeit daher gut ein!

<p>Parallel – Einheitsvektor - Streckenteilung Pflicht: 703 a-d, 704 a-d, 707a-d, 710 c-d 738 b-c, 741 d-e Bonus: 709</p>	<p>Parameterdarstellung Pflicht: 749 a-b, 750 a-b, 751 a-b, 754 a-b, 755 a-b Bonus: 756, 757, 758 a-d</p>
<p>Normalvektor – Winkel Pflicht: 713 e-h, 716 e-f, 724 Bonus: 722</p>	

Sollten Fragen bzw. Probleme auftauchen: Diskutiere dein Problem zuerst mit einem Mitschüler oder einer Mitschülerin. Falls ihr das Problem auch zu zweit nicht lösen könnt, wendet euch an euren Lehrer / eure Lehrerin.

Zur **Beurteilung** des Projektes zählen

- Projektmappe (Vollständigkeit, Ausführung, ...)
- Arbeitshaltung (Selbständigkeit, ...)
- Hausübungen. Achte auch auf rechtzeitige Abgabe der Hausübungen!
- Freiwillige Zusatzübungen (z.B. Beispiele aus deinem Schulbuch, Internetrecherche, etc.)

4.2. Anleitungen für Lehrer/innen

Verlaufsplan / Prozesshinweise

Grundsätzlich wäre für ein effizientes Arbeiten pro Schüler/Schülerin ein PC notwendig; allerdings ist auch eine Partnerarbeit an einem Gerät bei entsprechender Abstimmung der Lerngeschwindigkeiten der beiden Partner durchaus möglich. Das Arbeiten am Computer wird öfter durch Aufgabenstellungen, die im Heft durchzuführen sind, unterbrochen, weshalb idealerweise für ausreichend freien Arbeitsplatz zwischen den PCs gesorgt sein sollte. Abhängig von den äußeren Gegebenheiten in der jeweiligen Klasse (ständige Verfügbarkeit von Computern in Notebookklassen, sporadische Einsatzmöglichkeit eines PCs im Informatik-Saal,...) unterliegt eine Anpassung des vorliegenden Lernpfades dem unterrichtenden Lehrer/Lehrerin. So könnten bei ständigem Einsatz von Notebooks etwa Übungsaufgaben mit dynamischer Geometrie - Software wie GeoGebra oder mit CAS-Systemen wie Derive bearbeitet werden und anschließend über Lernplattformen abgegeben werden.

¹ Götz, Reichel: Mathematik Lehrbuch 5, 1. Auflage 2004

5. Ergebnisse der internen Evaluation

Der Lernpfad schließt an den ersten Teil an und dient auch der Erarbeitung neuer Inhalte, wobei mathematische Inhalte mehr im Vordergrund stehen als konkrete Anwendungen. Auf notwendiges Vorwissen wird deutlich hingewiesen und die entsprechenden Kapitel des ersten Teils sind angeführt.

Wie auch im ersten Teil des Lernpfads wird zwar ein Arbeitsplan mitgegeben, unterschiedliche methodische Ansätze werden nicht angeboten.

Es gibt ein numerisches Problem beim Applet „Einheitsvektor“ – Vektoren werden als Einheitsvektoren angezeigt, die nicht exakt die Länge 1 haben. Auf dieses Problem sollte unbedingt hingewiesen werden, um eine Verunsicherung der Schüler/innen zu vermeiden.

Die Seite Orthogonalität und Skalarprodukt sollte um eine klare Darstellung des Lernziels ergänzt werden.

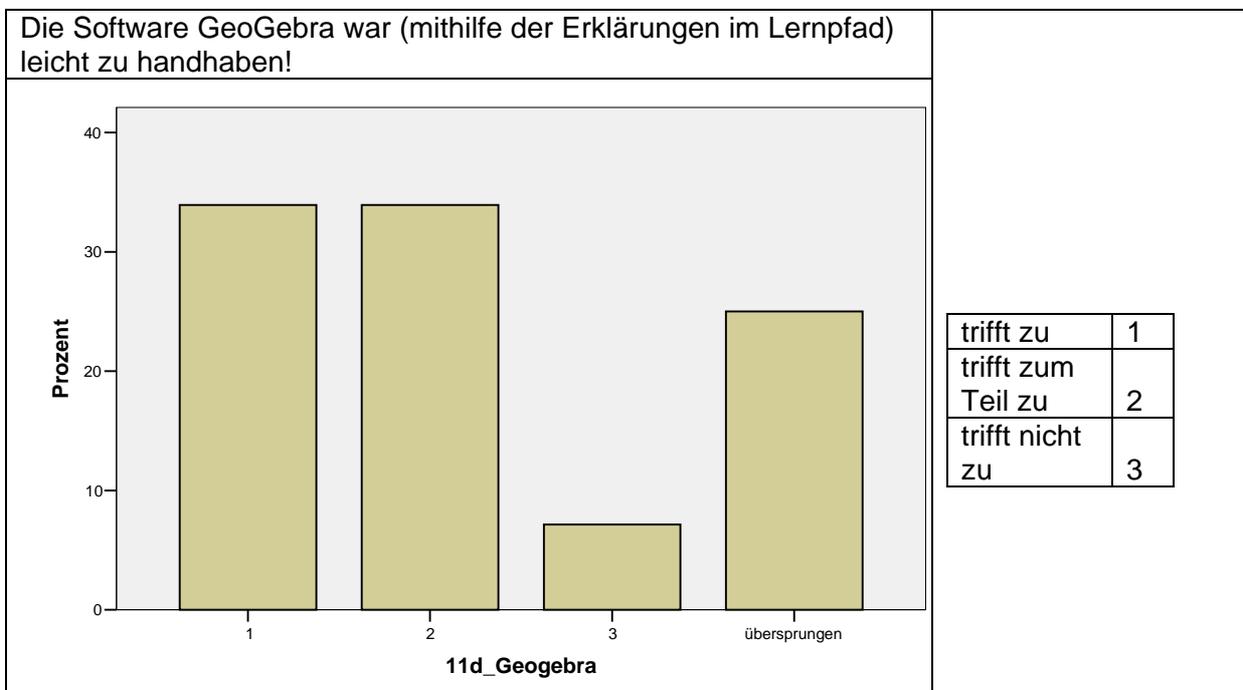
6. Äußere Evaluation / Feedback der Schüler/innen

Unter den positiven Rückmeldungen zu den interaktiven Übungen findet sich beispielsweise folgendes Zitat eines Schülers/einer Schülerin:

„Die Erklärungen all der verschiedenen Vektorarten (Einheitsvektor, Normalvektor..) und eben auch die "interaktiven Übungen", wie das Verschieben der Vektoren um den Zusammenhang der Normalvektoren herauszufinden.“

Das Feedback erfolgte durch 56 Schüler/innen.

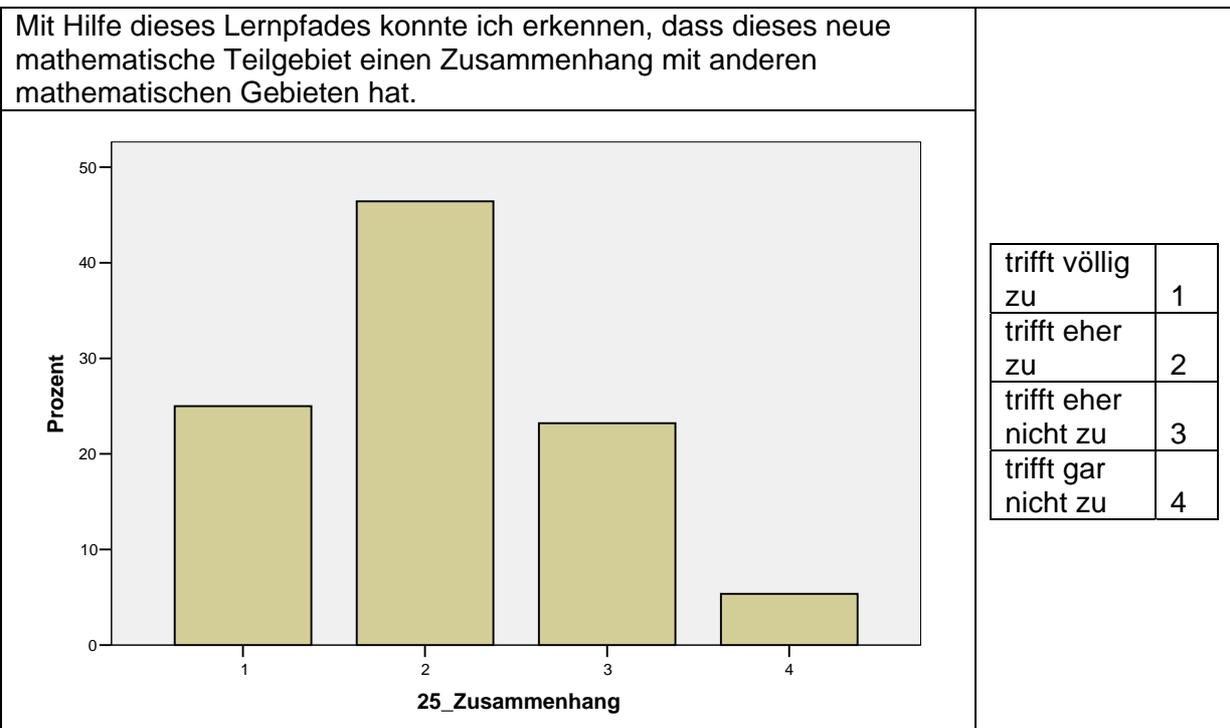
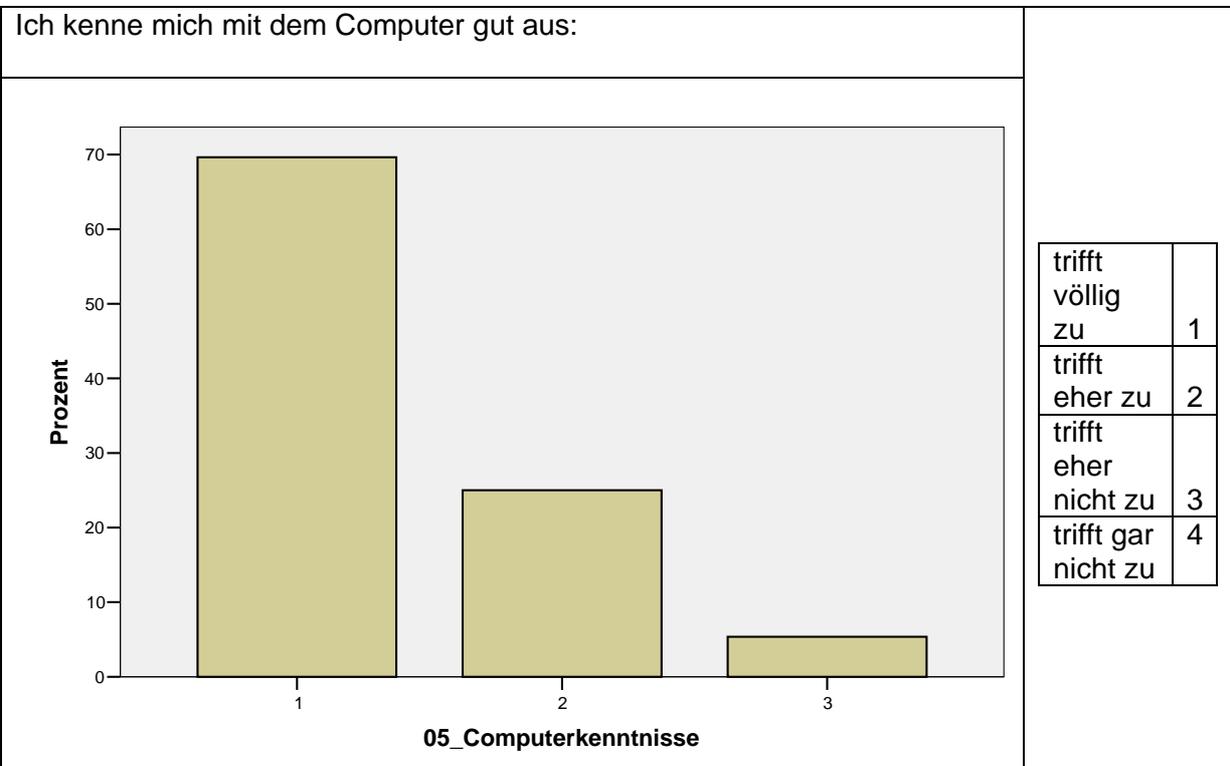
Exemplarisch werden einige Auswertungen von Rückmeldungen der Schüler/innen angeführt.



Die Rückmeldungen der Schüler/innen weichen nur minimal vom Durchschnitt aller Lernpfade ab. Z.B. gefällt das Layout 80% der Schüler/innen, was über dem Gesamtdurchschnitt liegt.

Besonders positiv wird die verständliche Sprache bewertet (90% gegenüber 75% aus dem Durchschnitt aller Lernpfade). 75% der Schüler/innen geben an, dass die interaktiven Übungen das Verstehen unterstützt haben (60% im allgemeinen Durchschnitt). Die Verwendung des Lernpfads zum Üben für die Schularbeit ist ebenso überdurchschnittlich hoch.

Die positiven Rückmeldungen zu den interaktiven Applets sind ähnlich wie in Teil 1 formuliert.



Ein Schüler / eine Schülerin gibt folgende positive Rückmeldung:

„Dass man sehen kann an den Grafiken, wie sich Werte verändern können. Und begreifen warum es eine Veränderung gibt!“

7. Überblick über den Erstellungsprozess

Dieser Lernpfad ist eine Fortsetzung des Lernpfades „Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1“. In Bezug auf „Überblick über den Erstellungsprozess“ gelten die dieselben Ausführungen wie beim entsprechenden Kapitel von Teil 1.



Medienvielfalt
im **Mathematikunterricht**

Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

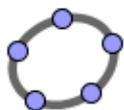
Medienvielfalt im Mathematikunterricht

TEIL 4

LERNPFAD

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

Hollabrunn, Dezember 2006



GeoGebra



Eine Galerie multimedialer Lernhilfen

mathe online

für Schule, Fachhochschule,
Universität und Selbststudium

Lernpfad: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

10. Schulstufe

Autoren/innen: Mag. Gabriele Jauck, Mag. Gabriele Bleier, Dr. Markus Hohenwarter

1. Motivation – Warum wurde das Thema gewählt?

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet eine Fülle von möglichen Zugängen: historische oder moderne Fragestellungen, spielerisch oder systematisch. Der Lernpfad möchte den Schülerinnen und Schülern Lust auf Wahrscheinlichkeitsrechnung machen, indem er sie mit verschiedensten Fragestellungen und Materialien zur Wahrscheinlichkeitsrechnung hinführt, sie zum Experimentieren und Spielen anregt und Vermutungen überprüfen lässt. Der Lernpfad erhebt noch keinen Anspruch auf Exaktifizierung.

2. Didaktischer Kommentar

Wahrscheinlichkeit – ein Wechselspiel zwischen Intuition und Mathematik ...

...doch gerade hier lässt uns unsere Intuition oft im Stich! Wer würde nicht behaupten, dass nach einer Serie von 15 Mal "Rot" beim Roulette nun "Schwarz" viel wahrscheinlicher wäre oder dass das Lottoergebnis "1, 2, 3, 4, 5, 6" völlig unwahrscheinlich ist. (Ganz ehrlich - wie oft haben Sie diese Kombination schon getippt?)

Aber auch große Mathematiker ließen sich in die Irre führen. Der Lernpfad führt von den Anfängen im Jahr 1654 (Fragen des Chevalier de Méré an Blaise Pascal) über das heute noch manchmal diskutierte Ziegenproblem zu den Grundlagen der Stochastik und lassen einen etwas anderen Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung erleben.

Kurzinformation	
Schulstufe	10. bzw. 11. Schulstufe (neuer/alter Lehrplan)
Dauer	6 Stunden
Unterrichtsfächer	Mathematik
Verwendete Medien	Java-Applets, Dynamische Geometrie Software (DGS), Tabellenkalkulation
Technische Voraussetzungen	Java, Internet, Adobe Reader
Autorin	Gabriele Jauck, Gabriele Bleier, Markus Hohenwarter

Voraussetzungen

- Technische Voraussetzungen: Java (kostenlos von www.java.com), Internet, Tabellenkalkulation (z.B. Excel)
- Materialien: Würfel, Münzen und Reißnägeln in ausreichender Anzahl, die Schüler sollen selbst probieren können.
- Vorwissen der SchülerInnen: Mathematisches Grundlagenwissen, keine speziellen Vorkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Lerninhalte und Lernziele

Lerninhalt	Lernziel
Historische Begründung der WK-rechnung	Vermittlung von Grundwissen zur geschichtlichen Entwicklung der Mathematik, Argumentieren und Begründen in mathematischen Diskussionen
Das Ziegenproblem	Unter Einbeziehung von Texten aus Zeitschriften und Online-Artikeln sollen intuitive Lösungsansätze diskutiert werden.
Von der Intuition zur Mathematik	Kennenlernen von Fachausdrücken und mathematisch korrekter Schreibweise, Kennenlernen des Begriffs Zufallsversuch
Asteroiden, Pferderennen und ein GAU	Wahrscheinlichkeit als Maß für subjektives Empfinden erfahren, Kennenlernen der Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs
Relative Häufigkeiten	Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit, wobei Erfahrungswerte aus vorliegenden Statistiken oder selbst durchgeführten Zufallsversuchen stammen.
Laplace Wahrscheinlichkeit	Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten von Zufallsgeräten aufgrund der Symmetrie, Kennenlernen der Wahrscheinlichkeitsdefinition nach Laplace
Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	Aus gegebenen Grundwahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ausgangs eines mehrstufigen Zufallsversuchs berechnen, Darstellen der Situation mit Hilfe von Baumdiagrammen
Additionsregel und Multiplikationsregel	Multiplikationsregel und Additionsregel kennenlernen und in Baumdiagrammen anwenden (Beschränkung auf unvereinbare Ereignisse)
Lösung der Einstiegsbeispiele	Anwenden des Gelernten auf die Fragen von de Méré und auf das Ziegenproblem
Wissenstest	Festigung der Lernziele

Didaktischer Hintergrund

Dieser Lernpfad lässt die SchülerInnen vorerst experimentieren und Erfahrungen sammeln, ohne die korrekten Antworten zu präsentieren. Die SchülerInnen sollen über ihren Lösungsweg nachdenken, ihre Vorgehensweise begründen können (auch wenn diese falsch wäre) und Argumente für ihre Thesen für die Diskussion mit Klassenkameraden finden. Erst danach werden mathematische Fachausdrücke und exakte Schreibweisen eingeführt, wobei die Kombinatorik vollständig ausgeklammert wird. Alle angeführten Beispiele lassen sich durch Baumdiagramme darstellen und mit Hilfe der Multiplikationsregel und Additionsregel berechnen. Die methodische Umsetzung kann als reine E-Learning-Sequenz, mithilfe von Lernspiralen, mithilfe eines Themenplans oder mithilfe von Lerntagebuch erfolgen. Auch ein Portfolio ist denkbar. Nähere Informationen und konkrete Vorschläge zur methodischen Umsetzung finden sich in den weiteren begleitenden Materialien.

Einsatz im Unterricht

Computer mit Internetzugang sind für ein sinnvolles Arbeiten mit diesem Lernpfad Voraussetzung, allerdings ist es nicht notwendig, dass jedem Schüler/jeder Schülerin ein eigener PC zur Verfügung steht. Diskussionen untereinander sind gewünscht und entstehen leichter, wenn in Gruppen oder paarweise gearbeitet wird. Falls möglich, ist eine Blockung des Unterrichts auf Doppelstunden sicher hilfreich.

Kombination der Medien

In dem vorliegenden Lernpfad wird versucht, durch den Einsatz von interaktiven Internetseiten, der Software GeoGebra und einer Tabellenkalkulation das erforschende Lernen der SchülerInnen zu fördern. Die neu gewonnenen Erkenntnisse sollen im Anschluss daran durch händisches Rechnen im traditionellen Sinn vertieft und gefestigt werden. Im Lernpfad selbst sind nur wenige Aufgabenstellungen zu finden, sie dienen meist der Veranschaulichung der Theorie. Vertiefende Übungsbeispiele sind in allen Lehrbüchern für diese Schulstufen in ausreichendem Maß zu finden.

Lernmedien der SchülerInnen

Die SchülerInnen arbeiten mit diesem Lernpfad nicht nur am Computer. Auch Versuche mit ein bis zwei Würfeln, mit Reißnägeln und Münzen sind vorgesehen. Sie sollen ihre Ergebnisse auch in ihren Heften festhalten - so kann eine Art Lerntagebuch zur Wahrscheinlichkeitsrechnung entstehen.

Leistungsbeurteilung

Die Ergebnisse der SchülerInnen sollten als Basis für Diskussionen und Zusammenfassungen in der Klasse verwendet werden. Dabei können Sie die Mitarbeit der einzelnen SchülerInnen bewerten. Weitere Möglichkeiten zur Leistungsbeurteilung sind das Absammeln der Hefte, entsprechende Schularbeitsbeispiele, Hausübungsbeispiele in einer Lernplattform oder auch kurze Prüfungsgespräche.

Die Leistungsbeurteilung hängt natürlich sehr stark davon ab, wie der Lernpfad im Unterricht eingesetzt wird. Vom Aufbau und der Grundidee her ist er als alternativer Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung gedacht, der vor allem Interesse und Neugier wecken soll. Daher sind die Inhalte nur in sehr beschränktem Maß für eine direkte Leistungsbeurteilung geeignet.

Fachliche Anmerkungen zum Begriff der Gleichwahrscheinlichkeit

Für die Laplace-Wahrscheinlichkeit ist unbedingt der Modellcharakter zu betonen. Sie gilt nur bei idealen Glücksspielgeräten (L-Würfel etc.). Diese sind ein MODELL. Bei Versuchen mit realen Würfeln etc. bekommt man mit Hilfe der L-Wahrscheinlichkeit nur dann für die Wirklichkeit brauchbare Ergebnisse, wenn bei langen Versuchsserien die relative Häufigkeit der L-Wahrscheinlichkeit nahe kommt. Beim Ziehen von Karten, beim Würfeln mit Würfeln, beim Ziehen aus der Urne muss daher zunächst immer gut durchgemischt werden, damit die Voraussetzung für eine L-Wahrscheinlichkeit möglichst gut erfüllt ist.

Gleichwahrscheinlichkeit aus der Symmetrie der Spielgeräte allein abzuleiten ist unzureichend, da verschiedene Ursachen diese Modellannahme stören können. So wurde vor einigen Jahren das (natürlich symmetrische) Roulette im Casino Baden von Dr. Neuwirth (Uni Wien) untersucht. Die festgestellten Ergebnisse zeigten, dass die Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit nicht mehr stimmte. Der Schusskanal für die Spielkugel hatte sich verändert. Daher müssen Glücksspielgeräte ständig gewartet werden, damit sie die Modellvoraussetzungen einigermaßen erfüllen. Festgelegte Grenzwerte lassen nur bestimmte Schwankungsbreiten zu.

3. Vorteile des Medieneinsatzes – exemplarische Beschreibung der Materialien

Selbsttätigkeit und Differenzierung

Am historischen Einstieg lassen sich zwei Prinzipien zeigen: Selbsttätigkeit und Differenzierung. Einerseits sind die Schüler und Schülerinnen zum aktiven Tun aufgefordert, andererseits bieten Links die Möglichkeit, dass sich begabte oder interessierte Schüler und Schülerinnen mit zusätzlichen Informationen auseinandersetzen.

Wann entstand die Wahrscheinlichkeitsrechnung?



Fermat

Als eigentliche Geburtsstunde gilt das Jahr 1654, als sich der Chevalier de Méré, ein Philosoph und Literat am Hof Ludwig XIV., mit zwei Problemen an Blaise Pascal wandte. Ein interessanter Briefwechsel zwischen den Mathematikern Blaise Pascal und Pierre de Fermat folgte.



Pascal

Lasst euch in die Zeit des Chevalier de Méré zurückversetzen!

Chevalier de Méré, Philosoph, Literat und begeisterter Spieler bat den damals berühmten Mathematiker Blaise Pascal, um Hilfe bei der Lösung zweier Probleme, die ihn beschäftigten. Lest euch die beiden Fragen des Chevalier durch und versucht in Partnerarbeit eine Antwort zu finden, die ihr in einer anschließenden Diskussion in der Klasse auch verteidigen sollt.

Frage 1:

Was ist wahrscheinlicher: Bei vier Würfeln mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu werfen oder bei 24 Würfeln mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs?

Frage 2:

Eine Münze wird wiederholt geworfen. Für jedesmal "Zahl" erhält A einen Punkt und für jedesmal "Kopf" erhält B einen Punkt. Wer zuerst 5 Punkte erzielt, gewinnt den Einsatz.

Nach 7 Würfeln hat A 4 Punkte und B 3 Punkte. Das Spiel wird abgebrochen.

Welches ist die gerechte Aufteilung des Einsatzes: Nach Maßgabe der gewonnenen Spiele (also 4:3) oder nach Maßgabe der noch fehlenden Spiele (also 2:1) oder überhaupt nach anderen Gesichtspunkten?

Spielen und Diskutieren

- Probiert die zwei Spiele in kleinen Gruppen aus und verwendet bei der Auswertung euch bereits bekannte Methoden der beschreibenden Statistik.
- Formuliert einen Lösungsvorschlag.

- Haltet eure Lösungsvorschläge schriftlich fest und überlegt euch auch gute Argumente dafür, denn eure Mitschüler/-innen könnten anderer Meinung sein.
- Diskutiert entweder in der Klasse oder in einem Diskussionsforum, welcher Lösungsvorschlag die größte Zustimmung findet.

Welche Lösung ist richtig?

Auch die Mathematiker Blaise Pascal und Pierre de Fermat diskutierten diese Fragen in einem heftigen Briefwechsel.

- Die Briefe sind leider nur noch teilweise erhalten. Ihr könnt euch mit Hilfe der unten angeführten Links einen ersten Eindruck von der Auseinandersetzung verschaffen, werdet aber wahrscheinlich keine wirklich überzeugende Lösung finden - so wie auch damals Pascal und Fermat nicht.

Später werden euch die inzwischen gesicherten Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung helfen, den Briefwechsel zu verstehen und weitere Lösungswege zu finden.

Lesen - Suchen - Forschen

- [Das mathemathistorische Kalenderblatt](#)
- [Die Entdeckung der Wahrscheinlichkeit](#)

...und wer noch mehr wissen will:

- Mehr über **Blaise Pascal**, dessen Name euch vielleicht schon durch das Pascal'sche Dreieck bekannt ist, findet ihr auf diesen Seiten: [Blaise Pascal](#), [Das Pascal'sche Dreieck](#)
- **Pierre de Fermat** und seinen letzten berühmten Satz, der erst 1995 bewiesen werden konnte, könnt ihr hier näher kennen lernen: [Pierre de Fermat](#)

Experimentieren und simulieren

Methodenvielfalt zeigt sich auch im Abschnitt Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil, in dem Excel zum Auswerten realistischer Daten aus Österreich eingesetzt wird.

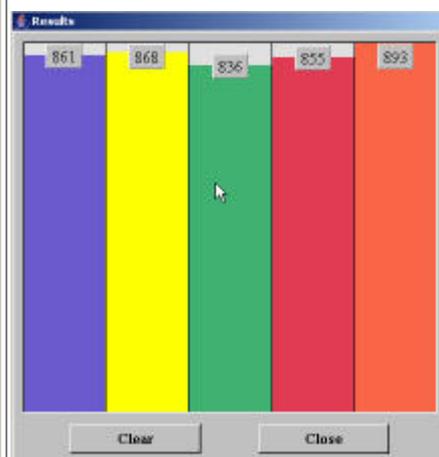
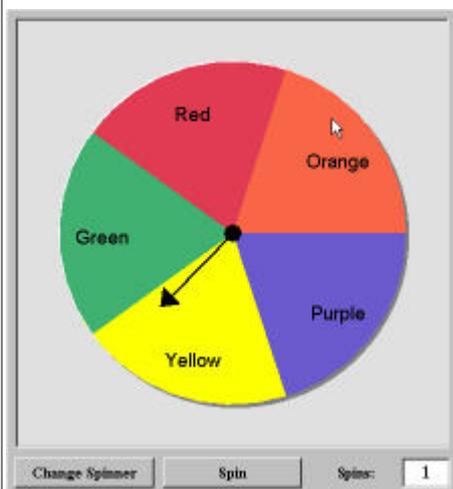
Neben dem individuellen Experimentieren mit Würfeln und Reißnägeln stehen für große Stichproben elektronische Werkzeuge zu Verfügung: zum Beispiel ein Würfelsimulator oder ein virtuelles Spinnrad.

Gesetz der großen Zahlen

Das [Gesetz der großen Zahlen](#) besagt, dass sich die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses immer weiter an die theoretische Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis (Erwartungswert) annähert, je häufiger das Zufallsexperiment durchgeführt wird. Anders ausgedrückt: Wird ein Zufallsexperiment sehr viele Male wiederholt, so stabilisieren sich die Häufigkeiten und nähern sich der theoretischen Wahrscheinlichkeit an.

**Virtual Manipulative:
Spinners**

Folge dem o.a. Link und spiele mit dem Glücksrad. Drehe es zunächst jeweils nur 1x und beobachte. Erhöhe die Anzahl der Drehungen, lass dir die Ergebnisse grafisch anzeigen (Record Results). Diskutiere deine Beobachtungen in der Klasse oder im Forum. Du kannst auch die Größe der einzelnen Felder verändern (Change Spinner).



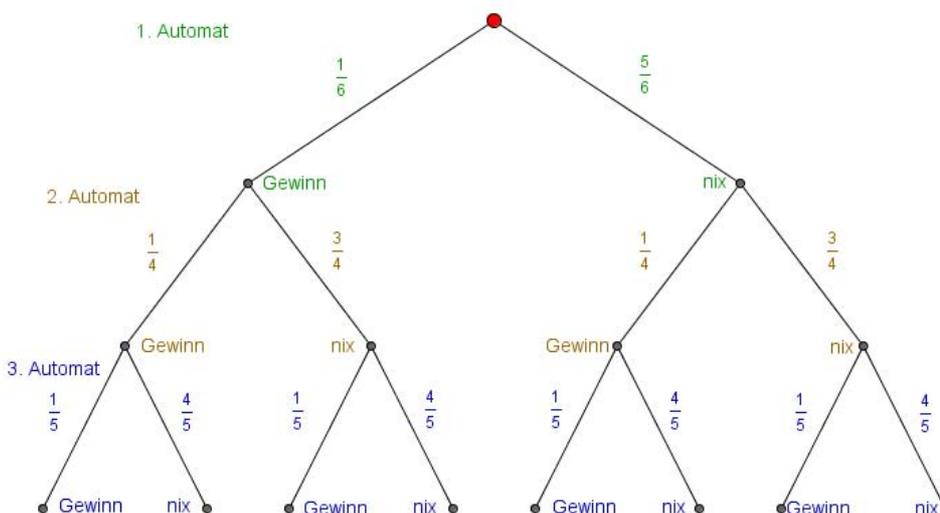
Interaktive Baumdiagramme

Baumdiagramme können interaktiv benutzt werden, um richtige Pfade zu erkennen.

Markus spielt an 3 verschiedenen Glücksspielautomaten

Markus spielt an einem Automaten, bei dem man mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ gewinnt. Das ist ihm zu wenig und er wechselt beim zweiten Spiel zu einem Automaten mit der Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ und versucht anschließend sein Glück noch bei einem Automaten, bei dem er mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei allen drei Automaten gewinnt?

- Markiere den entsprechenden Weg im Baumdiagramm rot durch Klick auf den Button am Ende des Weges.



Lösungen können von den Schülerinnen und Schülern zur Selbstkontrolle aufgerufen werden.

4. Drehbuch / Drehbücher – Methodisch-didaktische Anleitungen

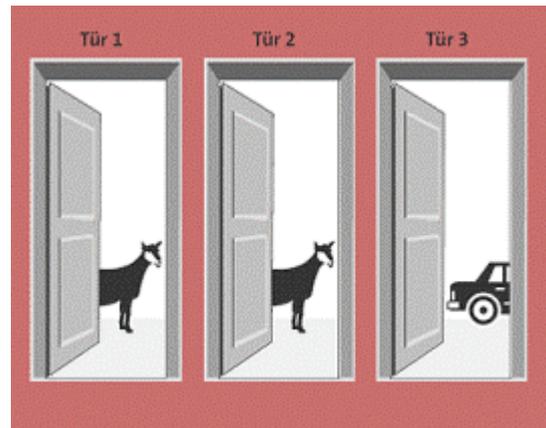
4.1 Unterrichtsorganisation – Arbeitsanweisungen für Schüler/innen

Anleitung um Experimentieren:

Das Gewinnspiel

Der Moderator zeigt dem Kandidaten/der Kandidatin drei Türen: "Hinter einer der drei Türen steht der Hauptgewinn, ein Auto. Hinter den beiden anderen Türen sind Ziegen. Welche Tür wählen Sie?"

Nachdem sich der Kandidat/die Kandidatin für eine Tür entschieden hat (z. B. für Tür 1, die Tür bleibt aber geschlossen), öffnet der Moderator eine der beiden anderen Türen - mit einer Ziege (z. B. Tür 3) - und fragt: "Bleiben Sie bei Ihrer Wahl oder möchten Sie Tür 2 wählen?"



Quelle: homepage.univie.ac.at

Wie würdest du dich entscheiden?

Lass dir mit deiner Antwort Zeit und überlege gut! Wenn du eine Vermutung hast, halte sie schriftlich fest.

Zum Nachspielen der Situation brauchst du keine Ziegen und erst recht kein Auto. Es genügen drei Spielkarten (z.B. 2, 2, König) und ein/e Spielleiter/in. Du kannst auch [online](#) oder [online in Englisch \(Stick or Switch\)](#) spielen! Führe eine Versuchsreihe durch und teste, ob eine der beiden Strategien (wechseln/nicht wechseln) besser ist. Notiere, wie oft du mit deiner Strategie gewonnen bzw. verloren hast.

Anleitung zu Internetrecherche:

Der Streit um das Ziegenproblem

Hier kannst du nachlesen, wie es anderen mit der Lösung dieses Problems ergangen ist, und wirst dabei auf ein paar sehr unterhaltsame Auszüge aus Leserbriefen stoßen: <http://www.jbg-miltenberg.de/faecher/mathe/ziegenproblem.html>

Möchtest du noch mehr zu dem Thema erfahren, gib den Begriff "Ziegenproblem" oder auch "Monty Hall Problem" in eine Suchmaschine (z.B: [Google](#)) ein und staune, wie viele Leute sich damit beschäftigen, unter anderem solch renommierte Zeitungsblätter wie "[Die Zeit](#)"!

Anleitung zum Dokumentieren von Ergebnissen und um Vorbereiten einer Präsentation:

Ihr habt nun Techniken kennen gelernt, Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu lösen: Baumdiagramme, Multiplikationsregel und Additionsregel.

Beschäftigt euch noch einmal mit den beiden Aufgabenstellungen vom Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wählt eine Aufgabenstellung aus und verfasst einen (fiktiven) Brief, in dem ihr die Fragestellung und ihre Lösung erörtert.

Bereitet euch darauf vor, eines der beiden Beispiele zu präsentieren: Historisches, Lösungsvorschläge und die entsprechenden Argumente sowie die Lösung der Aufgabe.

4.2 Anleitungen für Lehrer/innen

Methoden und Lernziele

Methode: Dieser Lernpfad ermöglicht Ihren SchülerInnen einen aktiven und entdeckenden Einstieg in das Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Besonderes Augenmerk wurde auf die Verbindung von interaktiven Lernhilfen und traditionellen Medien (Tafel, Buch, Heft, Versuche mit Würfeln und Reißnägeln) gelegt sowie auf das Begründen und Argumentieren in Diskussionsrunden.

Grobe Lernziele: Die Schülerinnen und Schüler sollen verschiedene Wahrscheinlichkeitsbegriffe kennenlernen und Einblick in die Problematik dieser unterschiedlichen Begriffsbildungen bekommen. Sie sollen sicher mit den Fachausdrücken und Schreibweisen dieses Gebiets umgehen und entsprechende Berechnungen durchführen können.

Download der Lernobjekte

Lernobjekt	Beschreibung	Technische Voraussetzungen
Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (zip)	gesamter Lernpfad	Java, Internet-Browser
Didaktischer Kommentar (pdf)	Kommentar zum Lernpfad	Adobe Reader
Arbeitsanleitung (doc)	Arbeitsanleitung zum Lernpfad	Word oder OpenOffice
Lernspirale (doc)	Lernspirale zum Lernpfad	Word oder OpenOffice
Themenplan (doc)	Themenplan zum Lernpfad	Word oder OpenOffice
Datei mit Lösungen (xls)	Statistik Austria - Kapitel relative Häufigkeiten - Angabe und Lösungen zum Übungsbeispiel	Excel oder OpenOffice

Weitere Informationen

Viele der im Lernpfad zu findenden Applets wurden mit dem Geometrie- und Mathematikprogramm GeoGebra erstellt, das kostenlos im Internet erhältlich ist.

Weitere Materialien

Zusätzlich stehen

- Vorschläge zur Umsetzung als Lernpfad,
- ein Vorschlag für eine Arbeitsanleitung bei einer reinen E-Learning-Sequenz und
- ein Themenplan mit Vorschlägen für Pflicht- und Wahlaufgaben zur Verfügung.

Lernspirale zum Thema
Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
6. Klasse (nach Lehrplan 2004)
von Gabriele Bleier
zum Lernpfad von Gabriele Jauck

Themenbereich/Inhalte:	
Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	
Fachliche	
Voraussetzungen:	Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • Relative Häufigkeiten berechnen • Prozentuelle Wahrscheinlichkeiten berechnen • Methoden der beschreibenden Statistik 	<ul style="list-style-type: none"> • Vermittlung von Grundwissen zu geschichtlichen Entwicklung der Mathematik, Argumentieren und Begründen in mathematischen Diskussionen • Fachausdrücke kennen • Wahrscheinlichkeiten als subjektives Vertrauen oder relative Häufigkeit bei Versuchsserien begreifen • Mit dem Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit arbeiten können • Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen ermitteln • Multiplikations- und Additionsregel für unvereinbare Ereignisse kennen und anwenden können

Methodische	
Voraussetzungen:	Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • Informationen selbstständig schriftlich festhalten können • mit Partner und in Gruppe arbeiten können • Methoden zur Partner- und Gruppenfindung kennen • Ergebnisse präsentieren können • Arbeiten in Expertengruppen und Mischgruppen • Kugellager (Doppelsesselkreis) • Museumsrundgang 	<ul style="list-style-type: none"> • mathematische Inhalte selbstständig erarbeiten können • über mathematische Inhalte sprechen können • Vermutungen formulieren können und Argumente für Lösungsvorschläge finden und verteidigen • wichtige Informationen filtern und schriftlich festhalten können • Eigenverantwortung beim Lernprozess stärken

Technische	
Voraussetzungen:	Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • PC mit Internetzugang • Beamer • Dateien öffnen, schließen und speichern können • auf einer Webseite navigieren können • Berechnungen am numerischen Taschenrechner durchführen können 	<ul style="list-style-type: none"> • Navigation auf Internetseiten • Selektion von Web-Inhalten

Makrospirale zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Arbeitsinseln mit grau hinterlegter Nummer sind ausgearbeitet.

Vorwissen /Voreinstellungen aktivieren

A 00	Begriffe aus der beschreibenden Statistik wiederholen (relative Häufigkeit, prozentuelle Häufigkeit)
----------------------	--

Neue Kenntnisse/ Verfahrensweisen erarbeiten

A 01	Entstehung - Die Wurzeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung: zwei historische Fragestellungen von de Meré Das Ziegenproblem (1. Unterrichtseinheit)
A 02	Von der Intuition zur Mathematik: subjektives Vertrauen, relative Häufigkeiten, Laplace-Wahrscheinlichkeit (2.+3. Unterrichtseinheiten)
A 03	Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten: Baumdiagramm (4.Unterrichtseinheit)
A 04	Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten: Multiplikationsregel (4.Unterrichtseinheit)
A 05	Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten: Additionsregel (4.Unterrichtseinheit)
A 06	Übungsbeispiele zur Additionsregel (5.Unterrichtseinheit)

Komplexere Anwendungs-/Transferaufgaben

A 07	Lösung der historischen Fragestellungen bzw. des Ziegenproblems (5.+6.Unterrichtseinheit)
A 08	Wissenstest

Arbeitsmittel für alle Arbeitsinseln sind PC und der Lernpfad Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Online- oder Download-Version, Internetzugang sowie Heft bzw. Projektmappe für Mitschriften.

Mikrospirale A1:

Entstehung - Die Wurzeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung: zwei historische Fragestellungen von de Meré
Das Ziegenproblem

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Die SchülerInnen lesen sich kurz die beiden Aufgabenstellungen durch und wählen eine aus: Entstehung oder Ziegenproblem.	EA	5'	
2	Die SchülerInnen führen in Partnerarbeit die angegebenen Experimente durch, notieren die Ergebnisse, erarbeiten einen Lösungsvorschlag und halten die entsprechenden Begründungen im Heft fest.	PA	20'	Internetzugang, Würfeln, Münzen, Spielkarten
3	Die SchülerInnen bilden 4er- bis 6er-Gruppen, diskutieren die verschiedenen Lösungsvorschläge und halten auf einem Plakat, auf einer Lernplattform oder in einem Diskussionsforum einen gemeinsamen Lösungsvorschlag und entsprechende Argumente fest.	GA	15'	Plakate oder Lernplattform oder Diskussionsforum
4	Zu den beiden Aufgabenstellungen präsentiert je ein Schüler/eine Schülerin (durch Zufall ausgewählt) den Lösungsvorschlag der Gruppe. Es ist noch nicht Ziel, einen richtigen Lösungsvorschlag zu erarbeiten! Die Lösungsvorschläge sollen vorerst so stehen bleiben und können eventuell im Laufe der nächsten Unterrichtsstunden am Plakat bzw. auf der Lernplattform durch weitere Argumente gestützt oder widerlegt werden.	Plenum	5'	

Mikrospirale A2: Von der Intuition zur Mathematik

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Einzelarbeit zu den Themen subjektives Vertrauen, relative Häufigkeit, Laplace-Wahrscheinlichkeit	EA	20'	
2	Expertengruppen (3-4 SchülerInnen)	GA	20'	
3	Hausübung: Ausarbeitung von entsprechenden Fragestellungen	EA		

Nächste Unterrichtseinheit:				
3	Mischgruppen (3-4 SchülerInnen): Austausch	GA	30'	
4	Übungsaufgaben	EA	15'	
7	Hausübung: Ausarbeitung der Fragestellungen der anderen Gruppen	EA		

Mikrospirale A6: Übungsbeispiele zur Additionsregel

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	In Partnerarbeit werden entweder Übung 1 und 1b oder Übung 2 und 3 erarbeitet.	PA	10'	
2	Vergleich mit einem Paar derselben Übungsaufgaben	GA	5'	
3	Kugellager	PA	15'	
4				

Mikrospirale A7: Lösung der historischen Fragestellungen bzw. des Ziegenproblems

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Wahl einer der beiden Aufgabenstellungen, Erarbeiten der Lösung Eventuell als dritte Themenstellung: Der historische Briefwechsel und seine mathematischen Inhalte	PA	15'	
2	Vorbereitung einer Präsentation (Plakat, PowerPointPräsentation) in einer Gruppe (Teilweise HÜ)	GA	15'	
3	Bilden von Mischgruppen: Museumsrundgang	GA	20'	
4	Oder: Gruppenpräsentation vor der Klasse	Plenum		

E-Learning–Sequenz **Wahrscheinlichkeitsrechnung** *Arbeitsauftrag*

Den **Lernpfad** findest auf www.austromath.at/medienvielfalt.

Das Projekt dauert **5 Unterrichtsstunden**. Die 6.Stunde ist der Präsentation der beiden historischen Fragestellungen bzw. des Ziegenproblems gewidmet.

Als Einstieg in den Lernpfad gibt es zwei Aufgabenstellungen: zwei historische Fragestellungen und das Ziegenproblem. Informiere dich grob über die beiden und wähle dann eine Themenstellung aus, die du laut Anleitung genauer bearbeitest. Die Lösungsvorschläge sind zu veröffentlichen (Wandzeitung oder auf der Lernplattform). Am Ende wendest du dann dein neu erworbenes Wissen an und arbeitest die anfangs gewählte Aufgabenstellung mathematisch korrekt aus. Bereite dich gemeinsam mit einem Partner/einer Partnerin auf die Präsentation vor.

Die **Projektmappe** ist händisch oder am Computer zu führen und enthält

- eine **Übersicht** über die **Inhalte** des Lernpfades (MindMap o.Ä.),
- eine **Zeitplanung**, in der genau eingetragen ist, wann du was machen möchtest bzw. wann du was mit wem gemacht hast (sie könnte etwa so aussehen)

Was?	Wann geplant?	Wann durchgeführt?	Dauer	Mit wem?

- alle deine **Aufzeichnungen**: Rechnungen, Merksätze, Skizzen, Probleme, ...
- sämtliche **Übungen**, die du zuhause erledigst.

Achte besonders darauf, deine Projektmappe übersichtlich zu gestalten! Vergiss nicht auf Überschriften, Angaben etc.

Das **Protokoll** zu jedem Lernschritt sollte Folgendes mindestens in deiner Projektmappe stehen:

Titel des Lernschritts

kurze Beschreibung des Inhaltes

Hattest du Probleme mit dem Lernschritt? Wenn ja, welche?

Sollten Fragen bzw. Probleme auftauchen, dann stelle sie zuerst auf unserer Plattform ins Netz. Beteilige dich am Austausch über die Plattform. Dort erhältst du auch Hilfe von deinem Lehrer.

Zur **Beurteilung** des Projektes zählen

Projektmappe (Vollständigkeit, Ausführung der Arbeitsaufträge, Sorgfalt ...)

Arbeitshaltung (Selbstständigkeit, Beteiligung am Diskussionsforum am Infoportal, ...)

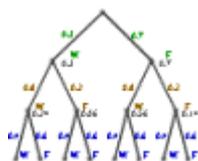
Einhaltung von Terminen

Freiwillige Zusatzübungen

Leistung bei der Präsentation

Die Projektmappe (mit Hausübungen) muss bis abgegeben werden.

Viel Vergnügen!



Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Name:

Alle Lernschritte findest du im Lernpfad „Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung!
 Zeitplan: 5 Unterrichtsstunden. Die 6. Unterrichtsstunde ist für die Präsentation und
 Diskussion der beiden historischen Fragestellungen und des Ziegenproblems vorgesehen.
 Siehe auch Anmerkungen am Ende des Plans!

Nr.	Titel	Aktivität	Sozialform	Arbeitsauftrag	P/W	Kontrolle
1	Historische Fragen 1			Versucht zu zweit mithilfe von Würfeln bzw. einer Münze Vermutungen über mögliche Lösungen für die beiden gestellten Fragen anzustellen! Haltet eure Argumente in der Projektmappe fest. Diskutiert mit einem anderen Paar eure Ergebnisse!	Pflicht 1 oder 3	
2	Historische Fragen 2 (Voraussetzung: Nr. 1)			Samme mithilfe der angeführten Links Informationen zum historischen Hintergrund der Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und stelle einen kurzen Informationstext von etwa 200 Wörtern zusammen!	Wahl	
3	Ziegenproblem 1			Simuliert das Gewinnspiel des Ziegenproblems, notiert die Ergebnisse und begründet, welche Strategie ihr bevorzugt!	Pflicht 1 oder 3	
4	Ziegenproblem 2 (Voraussetzung: Nr. 3)			Erforsche die Geschichte des Ziegenproblems (auch „Monty Hall Problem“ genannt) und lege eine Zeittafel an, wann von wem und in welchem Medium dieses Problem erörtert wurde!	Wahl	
5	Von der Mathematik zur Intuition			Mache dich mit einigen Fragestellungen vertraut, die du in den folgenden Lernschritten beantworten sollst!	Pflicht	
6	Subjektives Vertrauen			Lest die Informationen, notiert die entsprechenden Fragestellungen aus Lernschritt 5 und beantwortet sie!	Pflicht	

7	Relative Häufigkeit	 		Lest die Informationen, notiert die entsprechenden Fragestellungen aus Lernschritt 5 und beantwortet sie! Führt die Experimente durch und haltet eure Ergebnisse und Schlussfolgerungen dazu fest!	Pflicht	
8	Laplace-Wahrscheinlichkeit			Lest die Informationen, notiert die entsprechenden Fragestellungen aus Lernschritt 5 und beantwortet sie!	Pflicht	
9	Übung			Ermittle einfache Wahrscheinlichkeiten! Die Lösungen lassen sich im Kopf berechnen.	Pflicht	SK
10	Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	 		Lest den Einleitungstext!	Pflicht	
11	Baumdiagramme	 		Macht euch mit der Darstellungsform durch Baumdiagramme vertraut! Zeichnet dann ein Baumdiagramm für das dreimalige Werfen eines Reißnagels! Entnimmt die Wahrscheinlichkeiten der Versuchsserie mit den Reißnägeln aus Lernschritt 7!	Pflicht	
12	Multiplikationsregel	 		Erarbeitet gemeinsam die Vorgangsweise für die Multiplikationsregel! Stellt euch gegenseitig vier Aufgaben zum gezeichneten Baumdiagramm, haltet sie fest und berechnet die Ergebnisse!	Pflicht	
13	Übung1: Markus und die Glücksspielautomaten	 		Übt die Berechnung an zwei Beispielen!	Pflicht	SK
14	Übung 2: 3 Jäger auf Pirsch	 		Übt die Berechnung an einem weiteren Beispiel! Haltet Baumdiagramm und Berechnung in eurer Projektmappe fest!	Pflicht	SK

15	Additionsregel			Erarbeitet euch die Vorgangsweise bei der Additionsregel! Lest die Informationen, notiert die entsprechenden Fragestellungen aus Lernschritt 5 und beantwortet sie!	Pflicht	
16	Übungen 1, 1b, 2 und 3: Geburtstag, Alarmanlage			Wendet die Additionsregel auf drei Beispiele an! Haltet Baumdiagramm und Berechnung zu einem Beispiel in eurer Projektmappe fest!	Pflicht	SK
17	Übung 3: Kartenspiel			Wendet die Additionsregel an! Beachte, dass sich die Wahrscheinlichkeiten ändern!	Pflicht	SK
18	Anworten für de Méré	 		Versucht nun noch einmal die im Lernschritt 1 historischen Fragestellungen zu beantworten! Dokumentiert eure neuerlichen Überlegungen! Schreibt einen (fiktiven) Brief an De Méré und erklärt ihm die Lösung!	Pflicht 18 oder 19	
19	Antworten für Monty Hall	 		Versucht nun noch einmal das im Lernschritt 3 gestellte Ziegenproblem zu lösen, indem ihr die Technik des Baumdiagramms anwendet! Wie groß ist die Gewinnwahrscheinlichkeit bei der Strategie „Tür wechseln“? Verfasst einen (fiktiven) Leserbrief an eine Zeitung zur Lösung dieses Problems!		
20	Teste dein Wissen!			Beantworte die gestellten Fragen und vergleiche sie mit einem Partner/einer Partnerin!	Pflicht	

Die Projektmappe muss spätestens am abgegeben werden!

Deine **Projektmappe** enthält:

- o alle deine **Aufzeichnungen** (Definitionen, Merksätze, Skizzen, Rechnungen, ...) -
Achte besonders darauf, deine Projektmappe übersichtlich zu gestalten! Vergiss nicht auf Lernschrittnummer, Überschriften, Beispielangaben, etc. !
- o alle Hausübungsbeispiele

Zur **Beurteilung** des Projektes zählen: Projektmappe (Vollständigkeit, Ausführung, ...), Arbeitshaltung, Hausübung, freiwillige Zusatzübungen (Wahlstationen, Bonus-Hausübung) .

Viel Vergnügen!

5. Ergebnisse der internen Evaluation

Zum didaktisch-methodischen Kommentar

Mit diesem Lernpfad wird im Unterschied zu vielen Schulbüchern, die eher einen theoretisch orientierten Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung anbieten, die spielerische und kreative Annäherung an das Thema und die naive Begriffsbildung gefördert. Der Lernpfad ist daher für die Einstiegs- und Motivationsphase gedacht, als Vorstufe zu den üblichen Einstiegen in den Schulbüchern. Lernziele und Lerninhalte werden angeführt und in der Lernspirale detailliert beschrieben.

Die methodischen Anweisungen sind umfangreich – der Lernpfad kann als Lernspirale oder als reine E-Learning-Sequenz eingesetzt werden. Auch ein Themenplan mit Pflicht- und Wahlaufgaben ist beigelegt. Die Lernspirale ist für den gesamten Lernpfad detailliert ausgearbeitet.

Zum Lernpfad selbst

In der Eingangsphase dieses Lernpfades wird vor allem die Intuition über historische Fragestellungen, Experimente und interaktive Simulationen angesprochen.

Möglichst hohe Motivation der Schüler/innen und das Wecken von Neugier stehen im Vordergrund.

Die Präzisierung der erarbeiteten Begriffe erfolgt nur zum Teil; zum Beispiel fehlt die Begründung der Additionsregel und Multiplikationsregel. Der Lernpfad kann als alternativer Einstieg genommen werden, eigentlich eine Vorstufe zu den meist relativ theoretisch aufgebauten Einführungen der meisten Schulbücher.

Konkrete Aufgabenstellungen, die auf praktische Übungen und Spiele bezogen sind, ermöglichen es den Schülern und Schülerinnen, spielerisch Vorstellungen zu den Begriffen der Wahrscheinlichkeit zu entwickeln. Einige Links zu externen Quellen gestatten die Durchführung von weiteren Experimenten und deren elektronische Auswertung.

Die Schülerinnen und Schüler werden in hohem Maße zu Informationssuche angeregt. Bildhaftes, lesendes und schreibendes Lernen sowie Lernen durch aktives Tun werden unterstützt.

Lernziele werden nicht explizit für Schüler und Schülerinnen angegeben, allerdings gibt ein Fragenkatalog vor, welche Fragestellungen sie im Laufe des Lernpfades beantworten können sollen.

Anleitungen für Arbeits- und Präsentationsformen befinden sich direkt im Lernpfad. Einige Tippfehler, unklare Hinweise in der Messagebox müssen geändert werden.

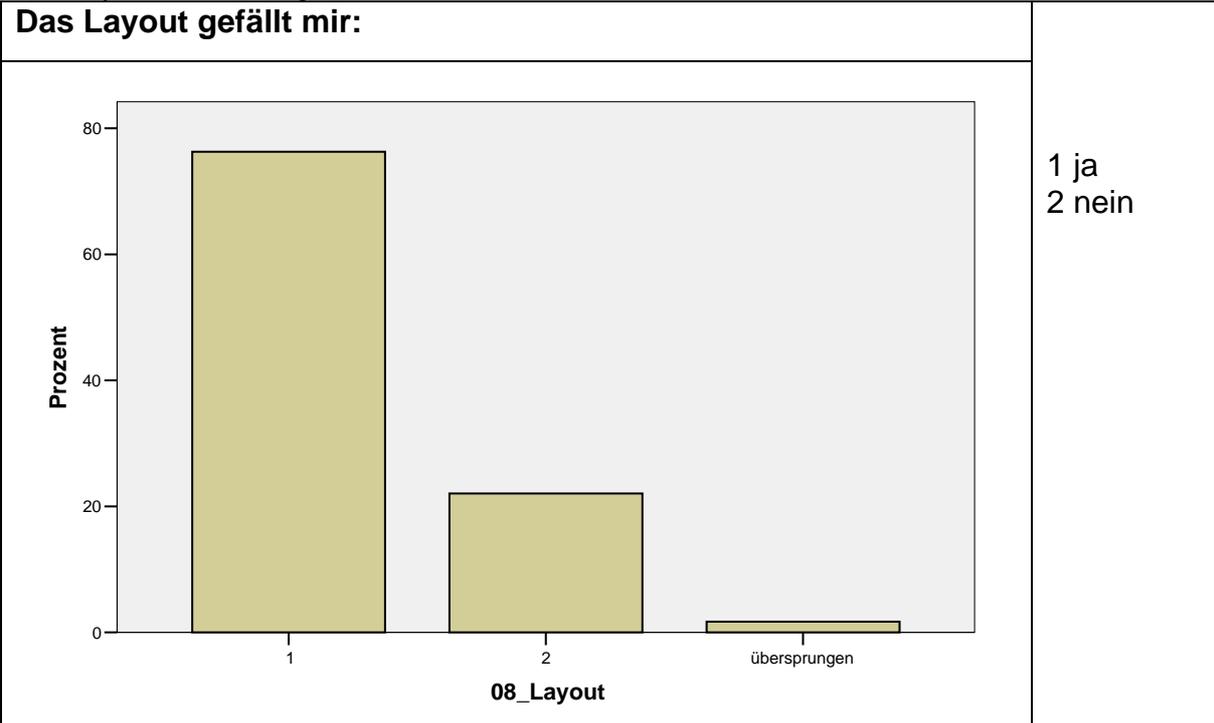
Zur Wissensüberprüfung und Leistungsmessung

Im didaktischen Kommentar gibt es Hinweise zur Leistungsbeurteilung. Selbstkontrolle ist im Lernpfad vorhanden, Wissensüberprüfung rudimentär.

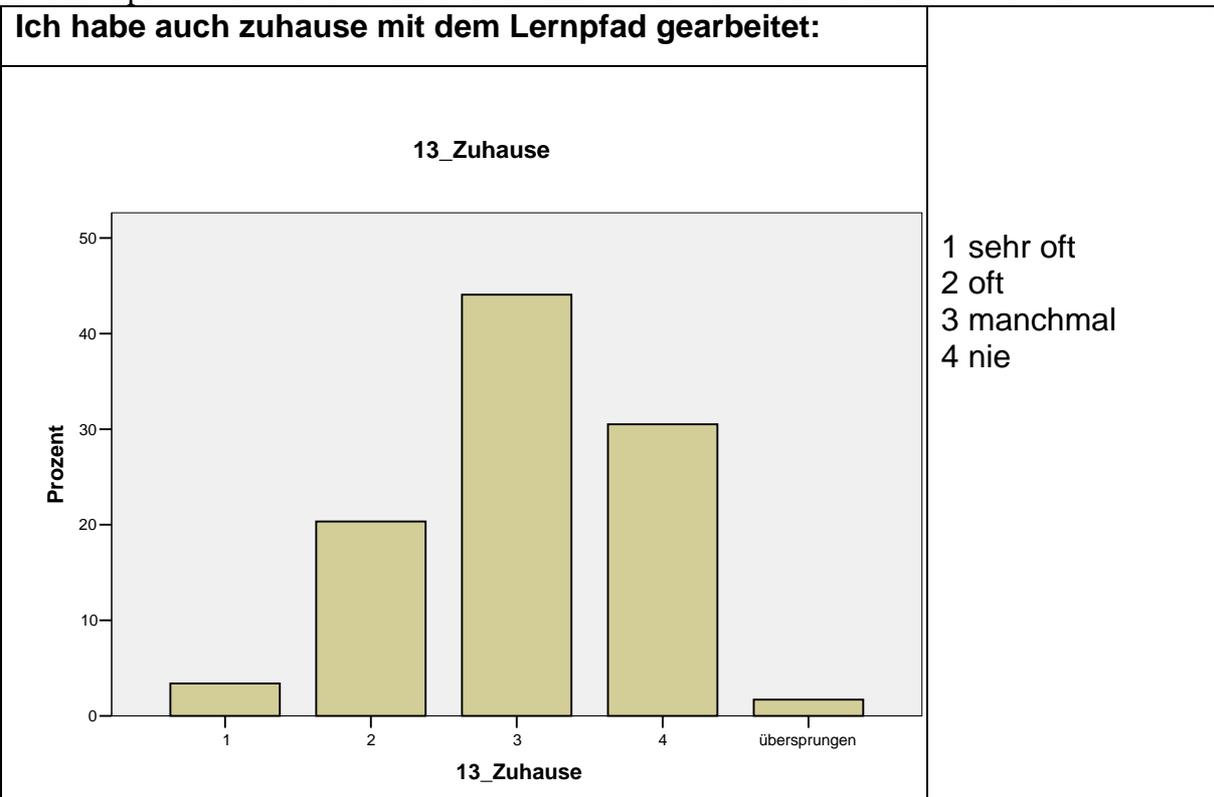
6. Äußere Evaluation / Feedback der Schüler/innen

59 Schülerinnen und Schüler aus 4 Klassen gaben Rückmeldung.

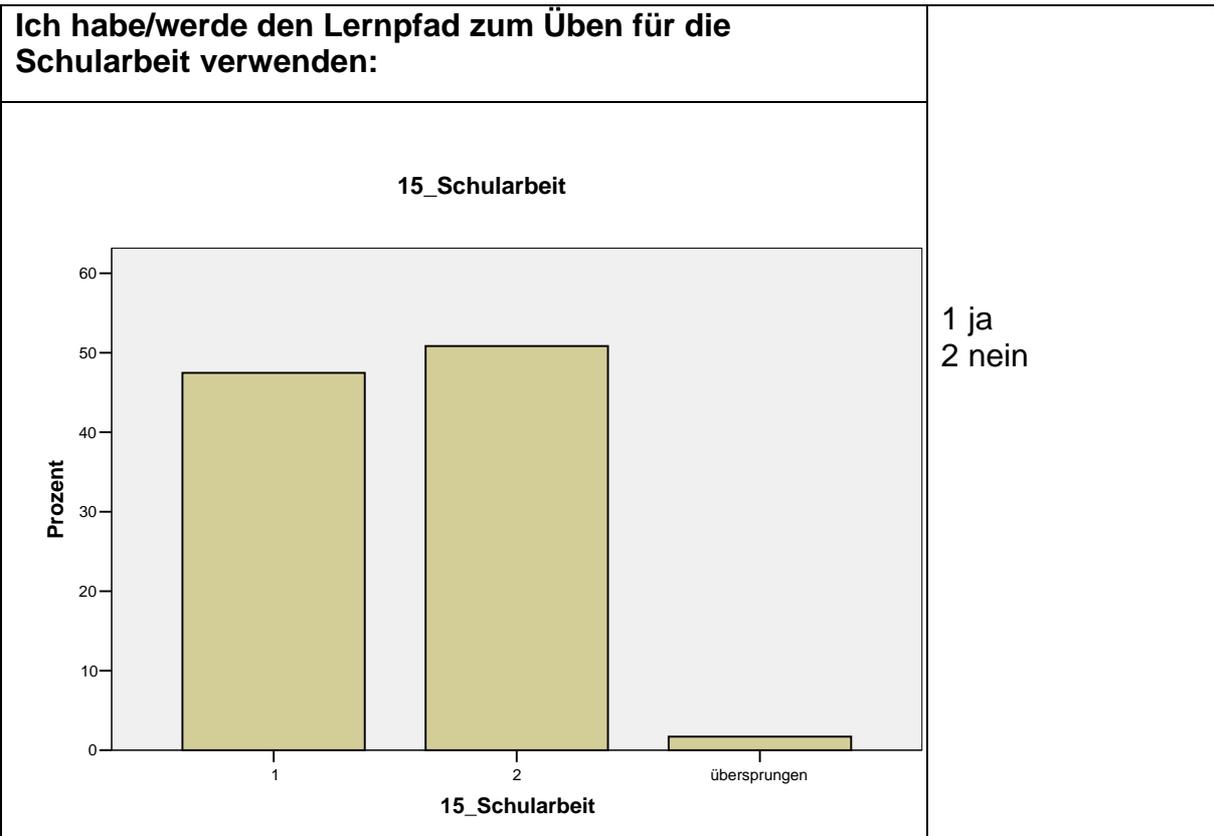
Das Layout wird sehr gut beurteilt.



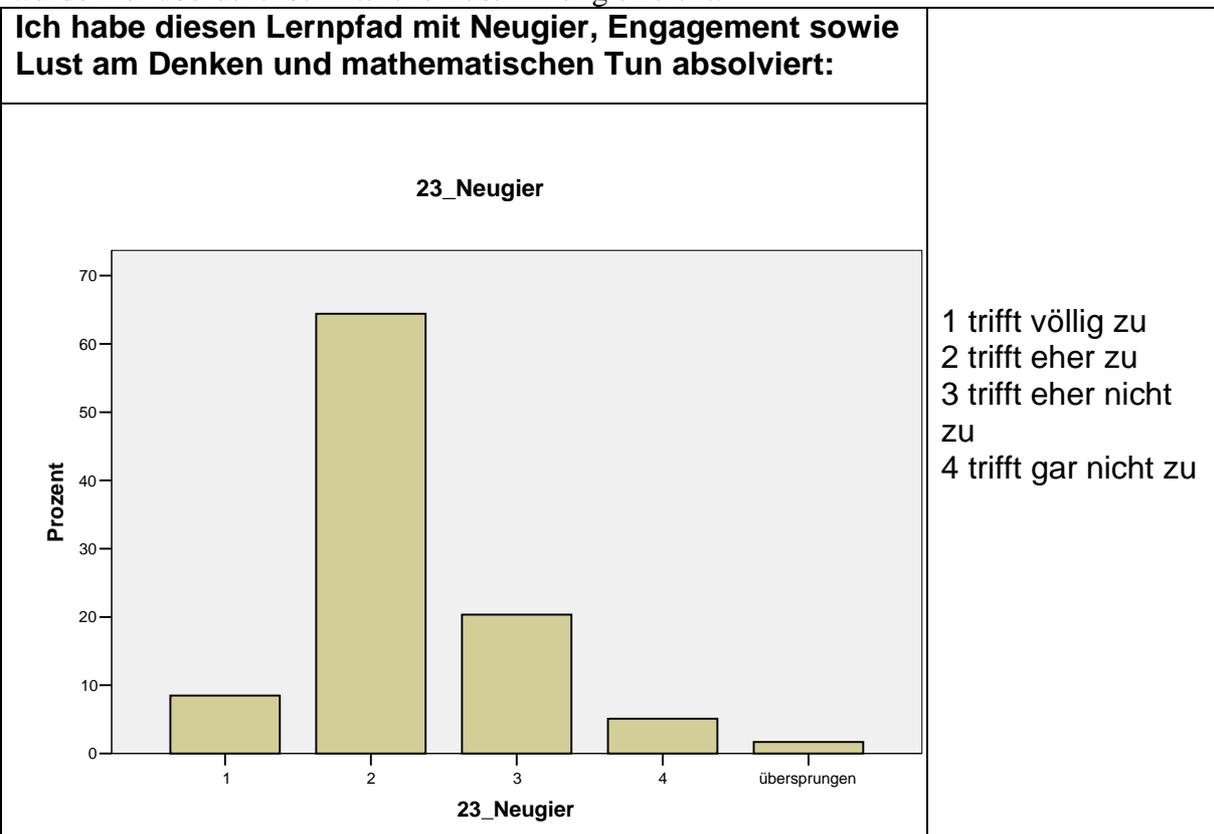
Der Lernpfad wurde öfter als im Durchschnitt auch bei der Arbeit zuhause verwendet



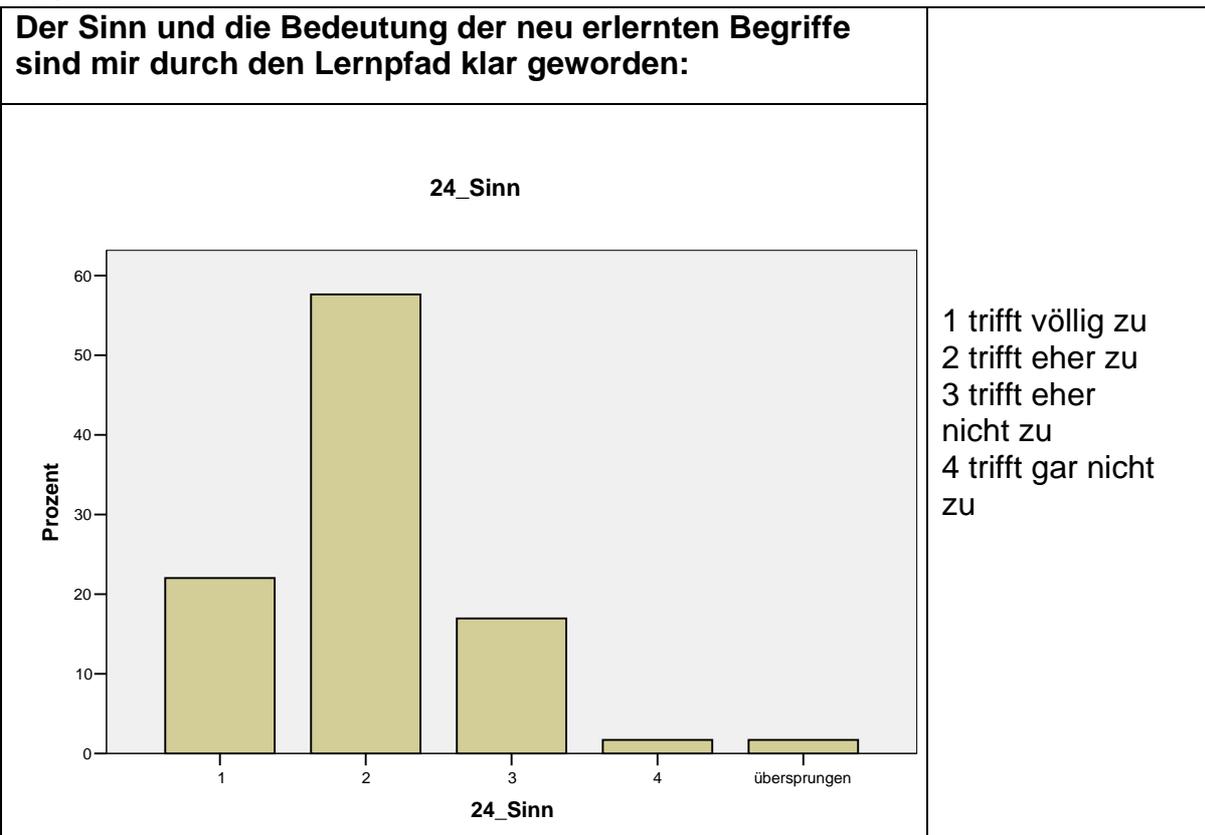
Dieser Lernpfad wurde überdurchschnittlich oft auch für die Vorbereitung für die Schularbeit verwendet



Die Schüler/innen begegneten dem Lernpfad mit großer Neugier! Vor allem in der Oberstufe wurde hier überdurchschnittliche Zustimmung erreicht.



Der Sinn und die Bedeutung der erarbeiteten Begriffe werden überdurchschnittlich oft verstanden.



Viele positive Rückmeldungen gab es zu den Applets (Wahrscheinlichkeitsbaum). Das Ziegenproblem faszinierte die Schülerinnen und Schüler.

Rückmeldungen zur offenen Frage „Interaktive Übungen“.

- *Ziegenproblem: selbst erfahren dass "switch" öfter gewinnt*
- *die interaktiven geogebra-übungsbeispiele für additionsregel und multiplikationsregel sind eine gute stütze.*
- *bei "Teste dein Wissen" konnte ich meine Überlegungen mit Hilfe der angegebenen Lösungen überprüfen und das gab mir Sicherheit*

Positives Feedback:

- *Animationen und bilder, durch die alles leichter verständlich war*
- *Neben den interaktiven Übungen auch das Historische, weil jenes erfrischend wenig mit dem sonst eher trockenen Stoff zu tun hatte. Die Möglichkeit den Lernpfad von neuem zu beginnen, wenn ich im Sumpf des Stoffes feststeckte.*
- *selbständiges arbeiten und die Hilfeleistung untereinander*

Unter den negativen Rückmeldungen gibt es keine wirklich aussagekräftigen.

7. Überblick über den Erstellungsprozess

In einem ersten Schritt wurde von Gabriele Jauck der Lernpfad in seinem Grundgerüst mit Links und interaktiven Übungen erstellt. Markus Hohenwarter lieferte die Baumdiagramme in GeoGebra mit der entsprechenden Java-Programmierung sowie die Einrichtung des Materials als Webseite. In einer zweiten Phase wurde der Lernpfad im Rahmen einer Lehrerfortbildung in Rankweil getestet, von Otto Wurnig sehr kritisch gelesen und mit vielen Verbesserungsvorschlägen versehen, von Gabriele Bleier und Markus Hohenwarter geändert, methodisch erweitert und um Begleitmaterialien ergänzt.

Medienvielfalt
im **Mathematikunterricht** 

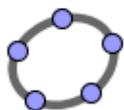
Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

**Medienvielfalt im
Mathematikunterricht**

TEIL 4

**LERNPFAD
DIFFERENTIALRECHNUNG**

Hollabrunn, Dezember 2006



GeoGebra

Eine Galerie multimedialer Lernhilfen

mathe online



für Schule, Fachhochschule,
Universität und Selbststudium

Lernpfad: Einführung in die Differentialrechnung

11. Schulstufe

Autoren/innen:

Lernpfad: Dr. Markus Hohenwarter, Mag. Gabriele Jauck

Lernspirale: Dr. Markus Hohenwarter, Mag. Evelyn Stepancik

1. Motivation – Warum wurde das Thema gewählt?

Die Differentialrechnung und ihre Anwendungen sind eines der zentralen Themen des Mathematikunterrichts der BHS und AHS Oberstufe. Neben Computeralgebra-Systeme (CAS) zur Darstellung von Funktionen und der symbolischen Berechnung von Ableitungen und Nullstellen bietet sich die dynamische Mathematiksoftware GeoGebra besonders zur experimentellen und erforschenden Einführung in dieses Thema an. In diesem Lernpfad verwenden wir daher GeoGebra vor allem bei der heuristischen Einführung des Tangenten- und Ableitungsbegriffs. Auf dem Weg dorthin lässt sich die mittlere Änderungsrate ausgezeichnet mit einer Tabellenkalkulation (z.B. Excel, Open Office Calc) untersuchen. Das CAS Derive kommt in diesem Lernpfad erst gegen Ende zum Einsatz, nachdem die Berechnung von Ableitungen mittels Grenzübergang bereits besprochen wurde.

In einem möglichen Folgeprojekt wäre eine Fortsetzung dieses Lernpfads mit Fokus auf Anwendungen der Differentialrechnung interessant, wobei der Medieneinsatz sich hier verstärkt in Richtung CAS verlagern würde.

2. Didaktischer Kommentar

Ihre Schülerinnen und Schüler können mit diesem Lernpfad die grundlegenden Begriffe und Zusammenhänge der Differentialrechnung entdecken. In zahlreichen Übungen mit verschiedenen Medien werden die Steigung einer linearen Funktion wiederholt, Anwendungsbeispiele zur mittleren Änderungsrate bearbeitet und die Hintergründe beim Übergang von der Sekante zur Tangente untersucht. Den Abschluss bilden Grenzwertberechnungen zum Differentialquotienten. Die Herstellung eines Bezugs zur Lebenswirklichkeit der Schülerinnen und Schüler steht bei den Beispielen im Vordergrund.

Kurzinformation	
Schulstufe	11. Schulstufe
Dauer	4 - 6 Stunden
Unterrichtsfächer	Mathematik
Verwendete Medien	Java-Applets, Dynamische Geometrie Software (DGS), Tabellenkalkulation
Technische Voraussetzungen	Java, Internet
Autoren	Markus Hohenwarter, Gabriele Jauck

Voraussetzungen

- Technische Voraussetzungen: Java (kostenlos von www.java.com), Internet, eventuell Tabellenkalkulation (z.B. OpenOffice Calc kostenlos von www.openoffice.org oder Microsoft Excel); eventuell: GeoGebra (kostenlos von www.geogebra.at).
Wichtig: Um alle Übungen dieses Lernpfades verwenden zu können, ist eine Verbindung zum Internet notwendig.
- Vorwissen der SchülerInnen: Funktionen, Steigung einer linearen Funktion. Bei den Übungen zur mittleren Änderungsrate können die SchülerInnen wahlweise eine Tabellenkalkulation verwenden, sofern sie Grundkenntnisse in deren Bedienung haben. Vorkenntnis zu GeoGebra sind wünschenswert, aber nicht unbedingt erforderlich (siehe Kurzanleitung bei der ersten Übung zur Sekante).

Lerninhalte und Lernziele

Lerninhalt	Lernziel
Momentanrichtung (Quiz als Einstieg)	Alltägliche Beispiele für die Momentanrichtung nennen können.
Lineare Funktionen (Wiederholung)	Die Gleichung des Graphen einer linearen Funktion angeben können. Den Graph einer linearen Funktion zeichnen können. Die Steigung einer linearen Funktion durch zwei Punkte berechnen können.
Mittlere Änderungsrate	Die mittlere Änderungsrate aus gegebenen Daten bestimmen können (Temperatur, Geschwindigkeit).
Differenzenquotient	Den Differenzenquotient einer Funktion in einem Intervall bestimmen können.
Sekante	Den Zusammenhang zwischen Differenzenquotient und Sekantensteigung kennen. Das Problem des Übergangs von der mittleren Änderungsrate zur momentanen Änderungsrate erkennen.
Differentialquotient	Den Differentialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten definieren können. Den Differentialquotient für ausgewählte Beispiele bestimmen können.
Tangente	Den Begriff der "Tangente an einen Funktionsgraphen" definieren können. Die Tangentensteigung näherungsweise berechnen können.
Ableitung	Die Ableitung als Steigungsfunktion beschreiben können. Die Ableitung für ausgewählte Beispiele bestimmen können. Zu einem Funktionsgraphen den Graph der Ableitung angeben können.

Didaktischer Hintergrund

Dieser Lernpfad versucht die Notwendigkeit der Differentialrechnung zu motivieren, wobei Beispiele und Übungen eine Verbindung zur Lebenswirklichkeit der SchülerInnen herstellen (Rollerskater in der Kurve, Änderung der Temperatur, Sprung über eine Skateboardrampe, usw.). Mit Hilfe der interaktiven Materialien können die SchülerInnen viele wichtige Zusammenhänge selbsttätig entdecken. Um den Lernertrag zu sichern gibt es zahlreiche Übungen, in denen sie das eben Gelernte aktiv anwenden können.

Einsatz im Unterricht

Bei den Materialien zu diesem Lernpfad finden Sie einen konkreten Vorschlag samt Ablaufplan zum Einsatz des Lernpfades im Unterricht (siehe *Lernspirale*). Selbstverständlich steht es Ihnen frei, diesen Vorschlag Ihren eigenen Bedürfnissen und Vorlieben anzupassen. Beim Einsatz dieses Lernpfades stehen Sie als Lehrperson Ihren SchülerInnen als Moderator mit Hilfestellungen zur Seite und organisieren den Ablauf (z.B. Wechsel der Sozialform, Gruppeneinteilung, ...).

Für den Einsatz des Lernpfades im Unterricht sind verschiedene Szenarien denkbar:

- Einzelarbeit an einem PC
- Partnerarbeit an einem PC
- Stationenbetrieb mit mehreren PCs, bei denen jede Station aus einem Teil des Lernpfades besteht

Es ist nicht notwendig, dass der Lernpfad in aufeinanderfolgenden Stunden bearbeitet wird. In der Regel wird dies von der Verfügbarkeit von Computern abhängen. Inhaltlich steht es Ihnen frei, bestimmte Teile aus dem Lernpfad auszuwählen, die Reihenfolge ihrer Behandlung im Unterricht zu verändern oder Ihre SchülerInnen nur bestimmte Übungen bearbeiten zu lassen. In diesem Lernpfad wechseln sich Arbeiten am Computer und im Heft ab. Daher sollte auf den Tischen neben den Computern genügend Platz zum Schreiben vorhanden sein. Wenn Sie möchten, können Sie Ergebnisdateien, die mit GeoGebra oder der Tabellenkalkulation erzeugt wurden, auch über eine Lernplattform abgeben lassen. Auf diese Art könnten Teile des Lernpfades auch als Hausübung gegeben werden.

Kombination der Medien

In dem vorliegenden Lernpfad wird versucht, durch den Einsatz von interaktiven Internetseiten, der Software GeoGebra und einer Tabellenkalkulation Ihren SchülerInnen ein erforschendes Lernen von Mathematik zu ermöglichen. Die neu gewonnenen Erkenntnisse sollen im Anschluss daran durch händisches Rechnen vertieft und gefestigt werden. Besonders wichtig für die Ergebnissicherung sind neben der Arbeit am Computer daher auch Diskussionen in Kleingruppen und mit der ganzen Klasse.

Lernmedien der SchülerInnen

Die SchülerInnen arbeiten mit diesem Lernpfad nicht nur am Computer. Sie sollen auch Definitionen und Ergebnisse von Übungen im Heft festhalten - auf diese Art kann ein Lerntagebuch zur Differentialrechnung entstehen.

Leistungsbeurteilung

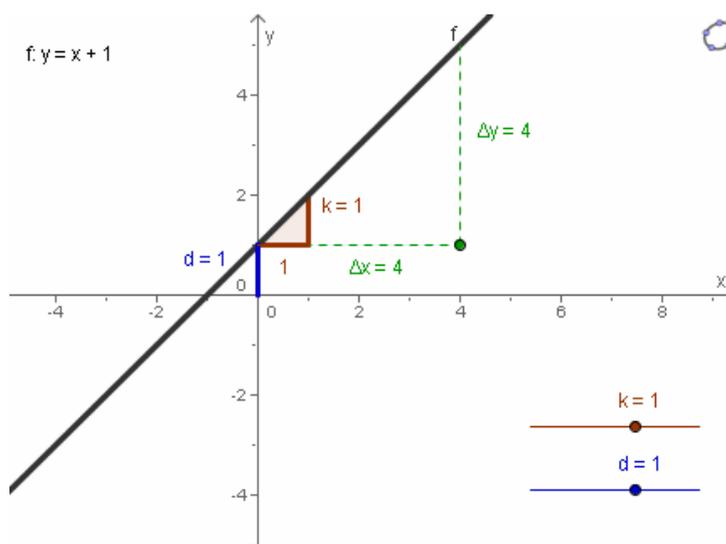
Die Ergebnisse der SchülerInnen sollten als Basis für Diskussionen und Zusammenfassungen in Gruppen oder der ganzen Klasse verwendet werden, wobei die Mitarbeit der einzelnen SchülerInnen bewertet werden kann. Weitere Möglichkeiten zur Leistungsbeurteilung sind das Absammeln der Hefte, entsprechende Schularbeitsbeispiele, Hausübungsbeispiele in einer Lernplattform oder auch eine schriftliche Überprüfung der Mitarbeit am Ende des Lernpfades.

Die Leistungsbeurteilung hängt natürlich sehr stark davon ab, wie Sie den Lernpfad im Unterricht einsetzen. So wird sich die Beurteilung prinzipiell beim Einsatz einer Lernplattform auf andere Kriterien stützen müssen als beim Einsatz des Lernpfades zur Wiederholung und Festigung eines schon großteils bekannten Lerninhalts.

3. Vorteile des Medieneinsatzes – exemplarische Beschreibung der Materialien

An Vorwissen anknüpfen

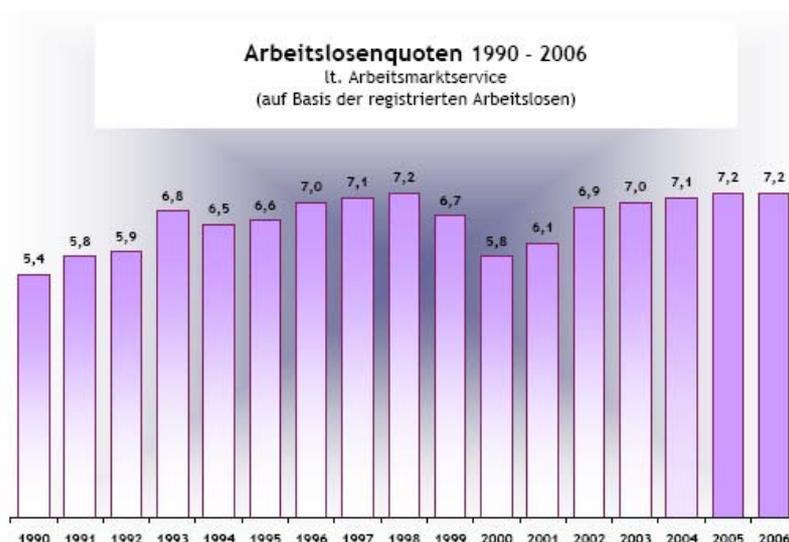
Am Beginn des Lernpfades wird der Steigungsbegriff wiederholt. Dabei stehen mehrere interaktive Übungen zur Verfügung, unter anderem eine dynamische GeoGebra Konstruktion, in der mittels Schieberegler die Steigung k und der Abszissenabstand d einer Geraden interaktiv untersucht werden können. Auf experimentelle Art und Weise kann so die Bedeutung dieser Parameter für die Lage der Geraden untersucht werden. Insbesondere lassen sich so auch sehr gut Spezialfälle wie $k = 0$ oder $d = 0$ betrachten.



Bezug zur Lebenswirklichkeit

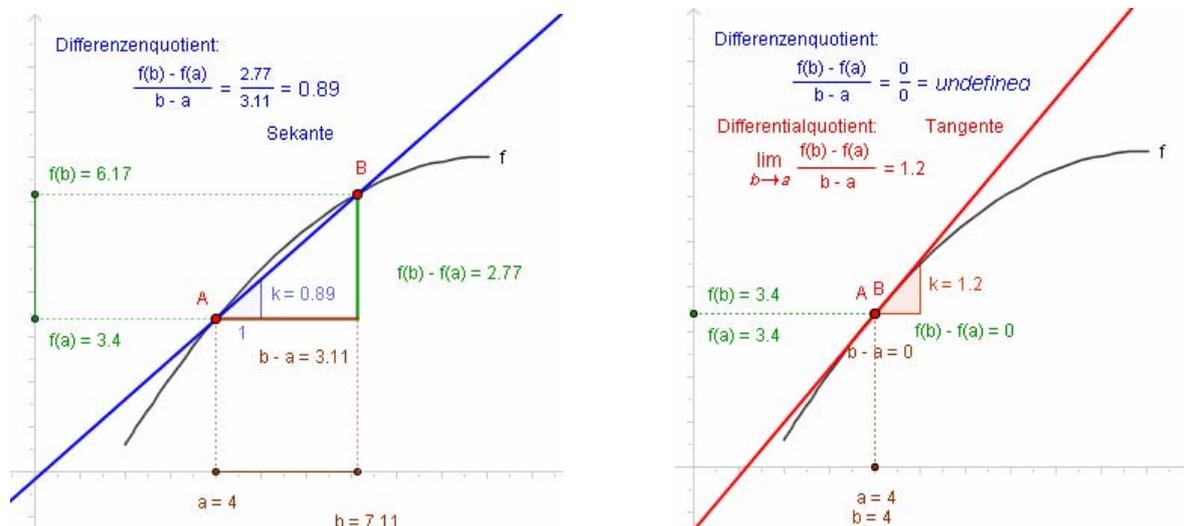
Als Vorstufe des Differenzenquotienten wird die mittlere Änderungsrate von mehreren Beispielen mit Hilfe einer Tabellenkalkulation untersucht. Der Medieneinsatz bietet die Möglichkeit, auch größere Datenmengen zeitsparend zu untersuchen und auf aktuelle Daten aus dem Internet zurückzugreifen.

So stehen etwa die aktuellen Arbeitslosenquoten von 1990 bis 2006 auf der Homepage der Österreichischen Wirtschaftskammer zum Download bereit.



Visualisierung von Grenzprozessen

Der Grenzübergang vom Differenzen- zum Differentialquotienten ist das zentrale Element der Differentialrechnung. Mit Hilfe einer dynamischen GeoGebra-Konstruktion kann dieser Grenzprozess interaktiv erlebt werden, indem der Punkt B mit der Maus immer näher zum Punkt A gezogen und so aus der Sekante eine Tangente wird (siehe Abbildungen).



Individuelles Lerntempo

Lernen ist ein individueller Prozess, bei dem Wissen durch die Einbettung neuer Information in bestehende Wissensstrukturen konstruiert wird. Dieses Erarbeiten vorgegebener Informationen geht natürlich individuell verschieden und auch mit unterschiedlichem Tempo vor sich. Interaktive Lernmaterialien am Computer geben jedem Lernenden die Möglichkeit, sein eigenes Tempo zu wählen, und helfen auch dabei, die Übersicht zu bewahren. Beispielsweise können prototypische Übungsaufgaben an einem vorgerechneten Beispiel erlernt werden, wobei zunächst nur die Angabe sichtbar ist. Erst nach Klicken auf einen Pfeil wird der Lernende zum nächsten Schritt dieser Aufgabe geführt, sodass kleinere Informationseinheiten nach und nach im selbstgewählten Tempo abgearbeitet werden können.

Im folgenden Beispiel sind die ersten Schritte zur Berechnung des Differentialquotienten $f'(1)$ für die Funktion $f(x) = 2x^2$ zu sehen. Durch Klicken auf den blauen Pfeil rechts unten wird der Lernende jeweils zum nächsten Schritt geführt.

Laut Definition ist der Differentialquotient: $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

in f einsetzen: $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h)^2 - 2 \cdot 1^2}{h}$

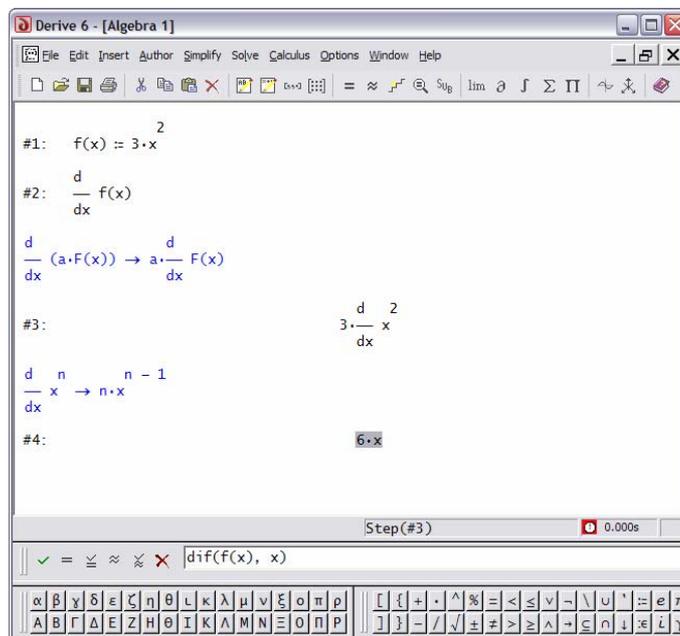
Klammer quadrieren: $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+2h+h^2) - 2}{h}$

Klammer ausmultiplizieren: $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+4h+2h^2 - 2}{h}$



Ableitungsregeln

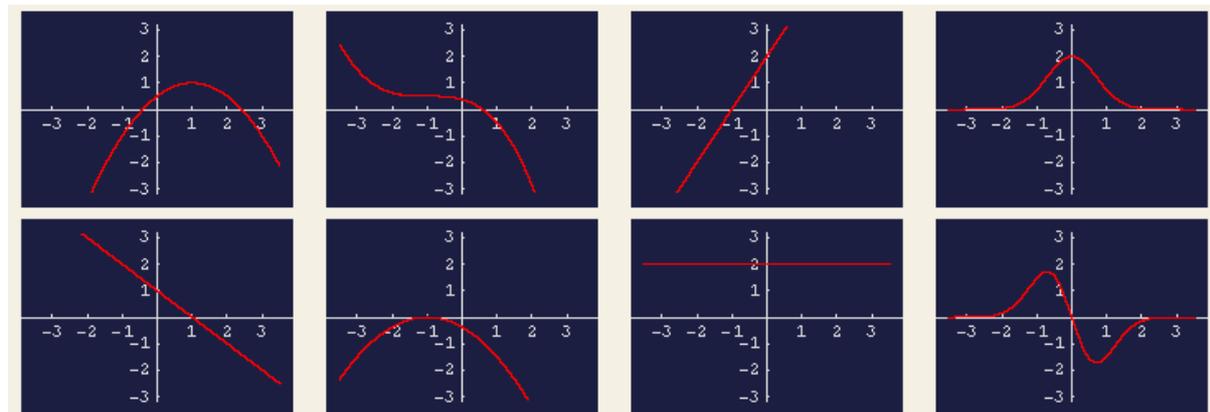
Mit dem Computeralgebrasystem Derive können (ab Version 6) auch die verwendeten Ableitungsregeln schrittweise angezeigt werden. Dies ermöglicht eine neue didaktische Herangehensweise: es geht nicht mehr allein um die Anwendung der richtigen Regel, sondern vielmehr um die Erklärung der verwendeten allgemeinen Regeln.



Innere Differenzierung durch Interaktive Übungen

Ein großer Vorteil von elektronischen Lernmaterialien ist die Möglichkeit, eine große Anzahl von interaktiven Übungsaufgaben zur Verfügung zu stellen. Dadurch wird innere Differenzierung sehr einfach möglich: bessere SchülerInnen lösen in einer vorgegebenen Zeit einfach mehr Aufgaben als schwächere – und da die Übungen im Internet zur Verfügung stehen, können sie auch als Hausübung verwendet werden.

Das große Ableitungspuzzle von Mathe-Online ist eine Zuordnungsübung, die aus einem Pool von Funktionen zufällig jeweils fünf Bilder mit Funktionsgraphen und mit Ableitungsgraphen präsentiert. Die entsprechenden Funktions-Ableitungs-Paare müssen dann durch Ziehen mit der Maus zugeordnet werden. Durch Klicken auf den „Auswerten“ Button erhalten die Lernenden Rückmeldung über die Richtigkeit ihrer Zuordnung. Mit „Neu laden“ können sie fünf neue Funktionsgraphen untersuchen.



4. Drehbuch – Methodisch-didaktische Anleitungen

Im Folgenden ist eine Lernspirale (nach Klippert) für Lehrer/innen als eine mögliche Umsetzung dieses Lernpfads zu finden.

Lernspirale zum Thema „Einführung in die Differentialrechnung“ Von Markus Hohenwarter und Evelyn Stepancik

Themenbereich/Inhalte:	
Einführung in die Differentialrechnung	
Fachliche	
Voraussetzungen:	Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • Steigung einer Geraden • Lineare Funktionen • Funktionsgraphen interpretieren können • Grenzwert • Termumformungen • Sicherer Umgang mit Polynomfunktionen 	<ul style="list-style-type: none"> • Alltägliche Beispiele für die Momentanrichtung nennen können. • Wiederholung: Die Gleichung des Graphen einer linearen Funktion angeben können. Den Graph einer linearen Funktion zeichnen können. Die Steigung einer linearen Funktion durch zwei Punkte berechnen können. • Die mittlere Änderungsrate aus gegebenen Daten bestimmen können (z.B. Temperatur) • Den Differenzenquotient einer Funktion in einem Intervall bestimmen können. • Den Zusammenhang zwischen Differenzenquotient und Sekantensteigung kennen. • Das Problem des Übergangs von der mittleren Änderungsrate zur momentanen Änderungsrate erkennen. • Den Differentialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten definieren können. Den Differentialquotient für ausgewählte Beispiele bestimmen können. • Den Begriff der "Tangente an einen Funktionsgraphen" definieren können. Die Tangentensteigung näherungsweise berechnen können. • Die Ableitung als Steigungsfunktion beschreiben können. • Die Ableitung für ausgewählte Beispiele bestimmen können. • Zu einem Funktionsgraphen den Graph der Ableitung angeben können.

Methodische	
Voraussetzungen:	Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • Informationen selbstständig schriftlich festhalten können • mit Partner und in Gruppe arbeiten können • Methoden zur Partner- und Gruppenfindung kennen • Ergebnisse präsentieren können 	<ul style="list-style-type: none"> • mathematische Inhalte selbstständig erarbeiten können • über mathematische Inhalte sprechen können • wichtige Informationen filtern und schriftlich festhalten können • Eigenverantwortung beim Lernprozess stärken • elektronische Lernhilfen sinnvoll nutzen können

Technische	
Voraussetzungen:	Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • PC mit Internetzugang oder PC mit dem installiertem Lernpfad Einführung in die Differentialrechnung • Internetzugang, damit alle Übungen des Lernpfades verwendbar sind • Beamer • Dateien öffnen, schließen und speichern können • auf einer Webseite navigieren können • von Vorteil: Grundfertigkeiten im Umgang mit GeoGebra 	<ul style="list-style-type: none"> • Funktionen samt Sekanten mit GeoGebra zeichnen können • Ableitungen mit GeoGebra oder Derive berechnen können • Interaktive Konstruktionen zur Visualisierung von Zusammenhängen und Eigenschaften nutzen können • technische Anleitungen (Eingabeanweisungen) selbstständig nutzen können

Makrospirale zur Einführung der Differentialrechnung

Arbeitsinseln mit grau hinterlegter Nummer sind ausgearbeitet.

Vorwissen /Voreinstellungen aktivieren

A 00	Einführung: Quiz zum Einstieg (Hammerwerfen, Inline - Parcours)
A 01	Wiederholung: Lineare Funktionen

Neue Kenntnisse/ Verfahrensweisen erarbeiten

A 02	Mittlere Änderungsrate, Differenzenquotient
A 03	Sekante, Tangentenbegriff
A 04	Differentialquotient, Tangente
A 05	Ableitung

Komplexere Anwendungs-/Transferaufgaben

A 06	Ableitung einer gebrochen-rationalen Funktion (Ableitung, Übungen 2 und 3) Ausblick: Hoch- und Tiefpunkt einer Funktion (Extremwertaufgaben) Ableitungsregeln
------	---

Arbeitsmittel für alle Arbeitsinseln sind PC und der Lernpfad Einführung in die Differentialrechnung sowie Heft für Mitschriften.

Mikrospirale A0: Voreinstellungen aktivieren

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Quiz zum Einstieg, Übung 1: Die beiden Rätsel zum Einstieg werden in Einzelarbeit durchgearbeitet und die Ergebnisse werden im Heft festgehalten.	EA	6'	
2	Übung 2: Die Schüler/innen überlegen eigene Beispiele und notieren diese im Heft.	EA	7'	
3	Zu zweit werden die Ergebnisse der Übung 2 diskutiert.	PA	5'	

Mikrospirale A1: Wiederholung linearer Funktionen

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Wiederholung linearer Funktionen: Die Übungsbeispiele 1 und 2 werden in Partnerarbeit durchgearbeitet und die Ergebnisse im Heft notiert.	PA	10'	
2	Wettbewerb: Übung 3 in Partnerarbeit. Zeitlimit von der Lehrperson vorgegeben. Highscore im Heft notieren.	PA	10'	
3	Wettbewerb: Übung 4 in Partnerarbeit. Zeitlimit von der Lehrperson vorgegeben. Highscore im Heft notieren.	PA	8'	
4	Die Highscore Punkte der Paare und die Fehlerarten werden im Plenum verglichen.	Plenum	4'	
5	Als Hausübung kann die Übung 5 <i>Quiz zu linearen Funktionen</i> gegeben werden. Die Schüler/innen notieren die benötigte Zeit und den erreichten Punktestand.			

Mikrospirale A2: Mittlere Änderungsrate, Differenzenquotient

Beginn der 2. Unterrichtseinheit				
1	Expertenrunde: Die Schüler/innen bilden Dreiergruppen. Jede Gruppe bearbeitet eines der drei Beispiele zur mittleren Änderungsrate.	GA	10'	
2	Mixrunde: Die Gruppen werden neu gebildet, sodass in jeder Gruppe ein Experte für jedes Beispiel sitzt. Die verschiedenen Beispiele werden erklärt und auf Gemeinsamkeiten untersucht.	GA	15'	
3	Internet-Recherche mit Wikipedia: Neue Begriffe zur Differentialrechnung werden im Heft notiert.	EA	10'	
4	Brainstorming: die gefundenen Begriffe werden mit Hilfe der Lehrperson strukturiert.	Plenum	5'	
5	Die Definition und Ergebnisse werden im Heft notiert.	EA	5'	
6	Übung zum Differenzenquotienten: , Ergebnisse werden im Heft notiert (eventuell als Hausübung fertig machen).	EA	10'	

Mikrospirale A3: Sekante, Tangentenbegriff

Beginn der 3. Unterrichtseinheit				
1	Ein Schüler / eine Schülerin präsentiert die Ergebnisse der Übung zum Differenzenquotient.	Plenum	5'	Beamer
2	Informationssuche mit Bewegung zum Begriff Sekanten und Kurvenssekante. Pro ausgehängter Information eine Gruppe. Hinweis: Die Arbeitsblätter der Schüler/innen müssen stets verdeckt hingelegt werden.	EA	7'	Definition „Sekante, Kurvenssekante“ 2x aufhängen (S. 11) Lückentext (S. 10) kopieren.
3	Übung zur Sekante: die Schüler/innen lernen GeoGebra anhand der Kurzanleitung kennen und bearbeiten die Aufgabenstellung zum Thema <i>Sekante</i> .	PA	20'	
4	Übung: <i>Sprung über Rampe</i> wird mit Hilfe von GeoGebra bearbeitet. Die Datei wird gespeichert und ausgedruckt, die Ergebnisse werden im Heft notiert.	PA	10'	
5	Ein Paar wird per Zufall gelost und stellt ihr Ergebnis der Übung vor.	Plenum	5'	Beamer
Beginn der 4. Unterrichtseinheit				
6	Übung: <i>Bogen von St. Louis</i> wird mit Hilfe von GeoGebra bearbeitet. Die Datei wird gespeichert und ausgedruckt, die Ergebnisse werden im Heft notiert.	PA	15'	
7	Ein Paar wird per Zufall gelost und stellt ihr Ergebnis der Übung vor.	Plenum	3'	Beamer
8	Tangentenbegriff: Jeder Partner bearbeitet eines der beiden Beispiele (Tangente eines Kreises / Tangente eines Funktionsgraphen). Anschließend besprechen sie ihre Ergebnisse.	EA / PA	7'	
9	Allenfalls: Die Lehrperson erklärt die Probleme bei der Definition einer Tangente anhand der Seite im Lernpfad.	Plenum	5'	Beamer

Mikrospirale A4: Differentialquotient, Tangente

Aktivierung des Begriffs „Grenzwert“.

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Die Lernschritte Differentialquotient und Tangente werden in Einzelarbeit durchgeführt, dabei erarbeiten die Schüler/innen die Definitionen und Schreibweisen. Die Ergebnisse werden im Heft notiert.	EA	10'	
2	In Vierergruppen werden die Definition des Differentialquotienten wiederholt und eine Stafettenpräsentation in jeder Gruppe vorbereitet. Dazu fertigen die Schüler/innen Kärtchen mit Stichwörtern (+ Skizzen) an. Eine Gruppe wird per Los gewählt und beginnt mit der Präsentation, wobei sich die Schüler/innen im Halbkreis um eine Pinwand aufstellen, an der die Kärtchen dann befestigt werden. Abschließend wird von der Lehrperson die Stafettenpräsentation ergänzt oder kommentiert.	GA	15'	Eventuell die beiden Schreibweisen zum Differenz- und Differentialquotient ausdrucken und mehrmals kopieren.
Beginn der 5. Unterrichtseinheit				
3	Differentialquotient: Übung 1a in Einzelarbeit durcharbeiten und alle wichtigen Erkenntnisse im Heft festhalten.	EA	10'	
4	Differentialquotient: Übung 1a die Teilschritte abwechselnd einander gegenseitig erklären und anschließend Übung 1b in Partnerarbeit absolvieren.	PA	15'	
5	Differentialquotient: Ergebnisse der Übung 1b mit einem anderen Paar vergleichen.	GA	5'	
4	Differentialquotient: Übung 1c anhand der Seite im Lernpfad durchführen und alle Lösungsschritte mit ihren Begründungen im Heft festhalten.	EA	7'	
5	Differentialquotient: Übung 1d in Partnerarbeit im Heft erarbeiten. Ergebnis mit einem anderen Paar vergleichen.	PA	10'	

6	Differentialquotient: Übung 2 in der Unterrichtsstunde beginnen und als Hausübung fertig machen.	EA	10'	
7	Hausübung in Partnerarbeit vergleichen – eventuell kurze Präsentation	PA	5'	

Mikrospirale A5: Ableitung

Beginn der 6. Unterrichtseinheit				
Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Ableitung: Definition in Einzelarbeit durcharbeiten und im Heft notieren.	EA	5'	
2	Ableitung: Übung 1a in Partnerarbeit. Arbeitsteilung bei 1b (positiv / negativ). Diskussion über den Fall „Steigung = 0“ und 1c.	PA	10'	
3	Lernplakate werden von 6 Gruppen zu den Themen Mittlere Änderungsrate, Differenzenquotient, Sekante, Tangente, Differentialquotient, Ableitung gestaltet.	GA	15'	
4	Museumsrundgang: Die Gruppen mischen sich (ein Experte zu jedem Plakat in jeder Gruppe) und wandern von einem Plakat zum nächsten. Der jeweilige Experte erklärt das Plakat.	GA	20'	
	Hausübung: Ableitungspuzzle, eventuell auch die Übungen 2a/b und 3 zur Ableitung			

Lückentext: Sekante – Kurvensekante

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Das Wort _____ (von lat. secare = schneiden) bezeichnet in der ebenen Geometrie und in der Analysis eine Gerade durch _____ einer _____.

Kurvensekante

Allgemeiner nennt man auch eine Gerade, die durch (mindestens) zwei verschiedene Punkte einer _____, z.B. eines _____ geht, eine Sekante.

Sekantensteigung: Die _____ der Sekante durch zwei verschiedene Punkte (_____) und (_____) des Graphen der Funktion f ist gegeben durch

_____ .

Dieser Rechenausdruck wird auch als _____ bezeichnet. Er spielt eine wichtige Rolle bei der Definition der _____ in der Differentialrechnung.

Sekante – Kurvenssekante

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Das Wort **Sekante** (von lat. *secare* = schneiden) bezeichnet in der ebenen Geometrie und in der Analysis eine Gerade durch zwei verschiedene Punkte einer Kurve.

Kurvensekante

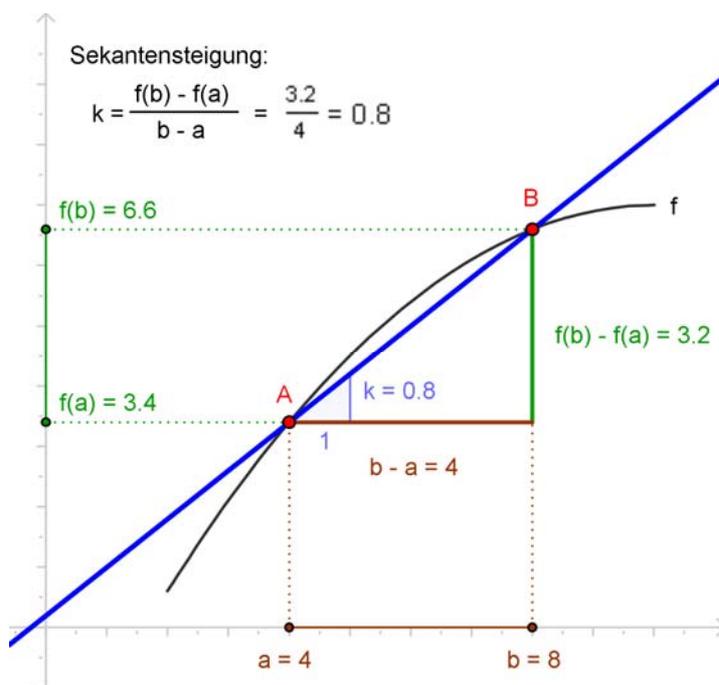
Allgemeiner nennt man auch eine Gerade, die durch (mindestens) zwei verschiedene Punkte einer Kurve, z.B. eines Funktionsgraphen geht, eine Sekante.

Sekantensteigung:

Die Steigung der Sekante durch zwei verschiedene Punkte $(a | f(a))$ und $(b | f(b))$ des Graphen der Funktion f ist gegeben

durch

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Dieser Rechenausdruck wird auch als Differenzenquotient bezeichnet. Er spielt eine wichtige Rolle bei der Definition der Ableitung in der Differentialrechnung.

5. Ergebnisse der internen Evaluation

Bei der internen Evaluation dieses Lernpfades wurden vor allem folgende fachdidaktische Verbesserungsmöglichkeiten angeregt:

- Eine historische Betrachtung des Ableitungsbegriffs wäre interessant. Diese könnte etwa als freiwillige Zusatzübung eingebaut werden.
- Der Limes-Begriff sollte stärker betont werden.
- Bei Differenzen- und Differentialquotient sollte auch die Möglichkeit der Berechnung mit Hilfe eines CAS angeführt werden.

Grundsätzlich erscheint der etwas negative Grundtenor der Schüler/innen-Rückmeldungen für die Evaluator/innen überraschend, sehen sie den Lernpfad doch im Großen und Ganzen sehr positiv. Allerdings sollte mehr Rücksicht darauf genommen werden, dass Schüler/innen mehr Möglichkeiten geboten werden, in verschiedenen Sozialformen den Lernpfad zu bearbeiten und nicht nur in Einzelarbeit. Einzelne Mikrospiralen könnten noch verbessert bzw. ergänzt werden (z.B. Infosuche mit Bewegung).

Da im Lernpfad Phasen der Festigung und Übung fehlen, sollte diese von unterrichtenden Lehrer/innen individuell ergänzt werden. Ein Hinweis dazu fehlt im didaktischen Kommentar (und wird noch ergänzt).

Externe Links sollten dem Benutzer transparenter gemacht werden. Als zusätzliches Wahlangebot wird eine Verlinkung zu Internetseiten, die den historischen Werdegang der Differentialrechnung thematisieren, vorgeschlagen. Anregungen zur stärkeren Betonung des Limes-Begriffs (vor allem in Verbindung mit einem CAS), zur Einbindung des Steigungswinkels der Tangente über $\tan \alpha = k$ und zur genaueren Erklärung und Einbindung von Δx werden eingebracht.

Ein durchgehendes Beispiel, das in allen Stufen der Begriffsbildung (mittlere Änderungsrate, Differenzenquotient, Differentialquotient, Ableitungsfunktion) herangezogen werden kann, wäre wünschenswert.

6. Äußere Evaluation

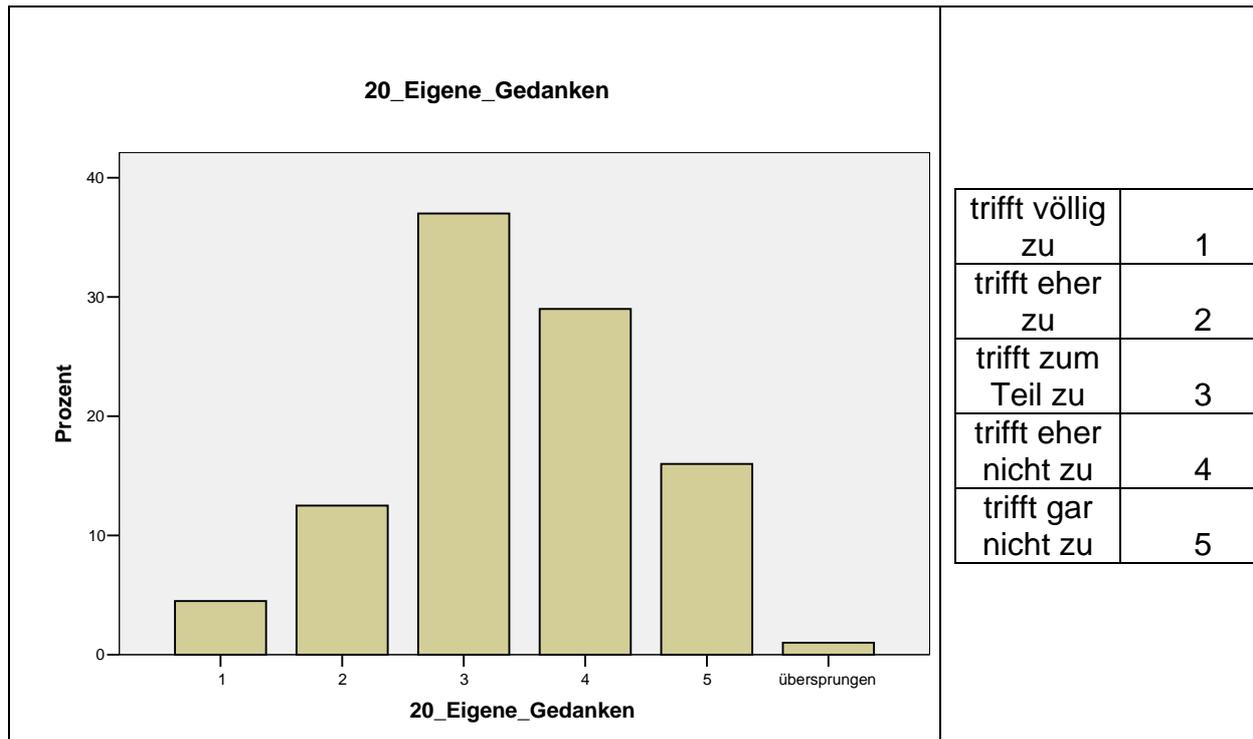
Schüler/innen-Feedback

An der Umfrage haben 201 Schüler/innen aus 13 Testklassen teilgenommen, davon drei Klassen aus eLSA-Schulen und eine Klasse aus einer eLC-Schule.

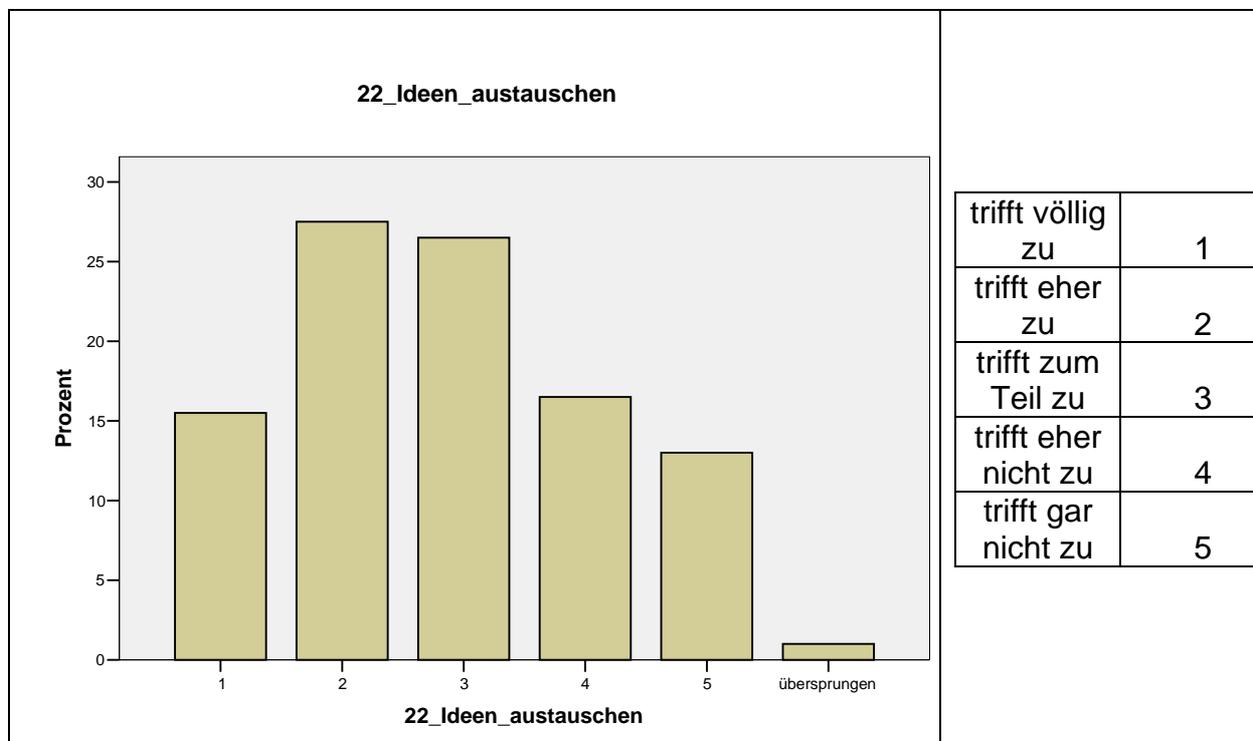
Auffällig ist beim Vergleich der Ergebnisse mit den Ergebnissen aller Lernpfade, dass bei sehr vielen Fragen die Rückmeldungen zu diesem Lernpfad schlechter ausgefallen sind.

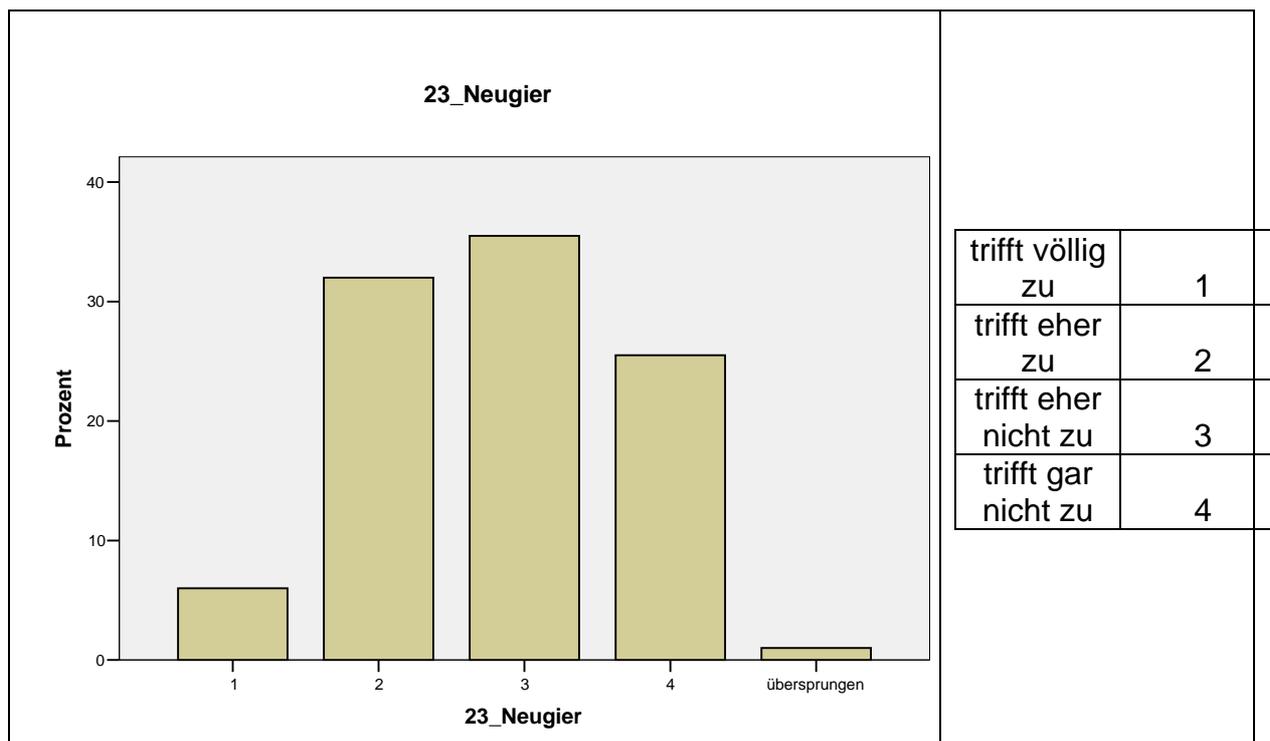
Bei der Frage „Ich möchte wieder mit einem Lernpfad arbeiten“ antworteten deutlich weniger Schüler/innen mit „Ja“ (weniger als 50% im Vergleich zum Durchschnitt aller Lernpfade von ca. 70%).

Die Frage nach Berücksichtigung der eigenen Gedanken wurde ebenfalls mit 15 % für die beiden positiven Kategorien deutlich schlechter beantwortet im Vergleich zu 35% des Durchschnittswerts:



Dieser Trend setzt sich fort bei der Frage nach dem Austausch von Ideen und Argumenten mit Mitschülern/innen (Antwort „trifft völlig zu:“ 15% gegenüber 25% im Durchschnitt) und bei der Frage nach Neugier und Lust am mathematischen Tun (35% positive Antworten im Vergleich zu 55% im Durchschnitt):





Zu überlegen wäre, ob den Schüler/innen genug Freiraum für das Erproben, Experimentieren und für den Austausch der Gedanken eingeräumt wurde.

Auch im fachlich-inhaltlichen Bereich scheinen die Schüler/innen nach eigener Einschätzung den Sinn und die Bedeutung der neuen Begriffe nicht in dem Ausmaß erfasst zu haben, wie es dem Mittelwert der übrigen Lernpfade entspricht.

Da der Lernpfad eher auf Einzelarbeit aufgebaut ist (außer beim Einsatz der Lernspirale), fällt die Antwort auf die Frage nach gemeinsamen Lernaktivitäten schlechter aus. Die allgemeine Zufriedenheit mit dem Lernpfad ist ebenfalls eher etwas geringer ausgefallen.

Aus vielen Rückmeldungen ist zu vermuten, dass bei einigen Testklassen durch technische Probleme die Java-Applets möglicherweise nur sehr langsam oder gar nicht funktioniert haben, was eventuell eine Erklärung für manche Unverständlichkeiten sein könnte. Gleichzeitig werden die interaktiven Applets als Bereicherung empfunden und als gute Möglichkeit der Visualisierung sehr positiv erwähnt.

Einige interessante Zitate aus den offenen Fragen:

Positive Rückmeldungen:

- „Allgemein: es hilft, wenn man sieht, was sich verändert, wenn man etwas bestimmtes verändert.“
- „Wenn man Punkt B zu A verschiebt, erkennt man, dass die Sekante zur Steigung der Tangente wird. Bei einer Zeichnung alleine konnte ich es mir nicht vorstellen, wie es dann aussehen würde.“
- „Es wurde gezeigt, dass Mathematik nicht immer eintönig sein muss. Am Computer zu arbeiten ist sehr abwechslungsreich und bietet uns die Möglichkeit selber etwas zu erarbeiten.“

Negative Rückmeldungen:

- *„Bei Fragen kann der Lernpfad überhaupt nicht helfen! Der Lernpfad kann keinen Lehrer ersetzen!!!“*
- *„dass keine ausdrückbaren Materialien vorhanden waren“*

Lehrer/innen-Feedback

Im Gesamtvergleich fällt sofort auf, dass sich der negative Grundtenor des Schüler/innen-Feedbacks bei den Lehrer/innen nicht zeigt. Die meisten Antworten liegen nahe am Durchschnitt aller Lernpfade, lediglich die Frage nach dem Angebot an individuellen Lösungswegen wird deutlich schlechter bewertet (6 von 13 Lehrer/innen antworteten mit „trifft teilweise zu“ oder „trifft eher nicht zu“. Dies deckt sich mit der negativen Rückmeldung der Schüler/innen, dass wenig eigene Gedanken eingebracht werden konnten (siehe oben).

Bei der Frage nach den Vorerfahrungen tauchten zwei Abweichungen zur Gesamtstatistik auf: Die Vorerfahrungen bezüglich Lernspiralen sind weniger (10 von 13 antworteten mit „selten“ oder „nie“), dafür ist der Einsatz von Lernplattformen etwas höher (10 von 13 antworteten mit „regelmäßig“ oder „selten“); letzteres könnte damit zusammenhängen, dass drei eLSA-Schulen und eine eLC-Schule beteiligt waren.

Die Anzahl der Unterrichtseinheiten konnte bei mehr als der Hälfte nicht eingehalten werden.. Die methodischen Anweisungen wurden nur größtenteils oder teilweise befolgt.

Ausgewählte Zitate aus den offenen Fragen:

- *„Hervorragende und sehr anschauliche Einführung in die Differentialrechnung!“*
- *„Das Unterrichten war manchmal anstrengender, weil völlig andere Fragen auftauchten als im Normalunterricht.“*

7. Überblick über den Erstellungsprozess

Dieser Lernpfad entstand auf Grundlage von Unterrichtserfahrungen von Gabriele Jauck in einer Notebook-Klasse der 11. Schulstufe am BG Zell am See. Diese Materialien umfassten Aufgaben mit GeoGebra, Derive und Excel. Zunächst wollten wir einen Lernpfad mit Einführung und Anwendungscharakter zur Differentialrechnung schreiben. Bald wurde jedoch klar, dass der geforderte Stundenumfang von 4-6 Stunden dieses Vorhaben nicht zuließ. Wir entschieden uns daher für einen Einführungslernpfad mit der Option, diesen möglicherweise später mit einem Anwendungslernpfad fortzusetzen.

Zur Medienkombination: GeoGebra ist einfach zu bedienen und bietet gute Visualisierungs- und Experimentiermöglichkeiten. Mit Derive können andererseits Grenzwerte und Ableitungen auch symbolisch berechnet werden. Zur Anknüpfung an das Vorwissen der Lernenden und die Übungsaufgaben am Ende haben wir Inhalte von Mathe-Prisma und Mathe-Online gewählt, um zu unterstreichen, dass es bereits zahlreiche gut aufbereitete interaktive Materialien im Internet gibt. Die Tabellenkalkulation Excel bot sich für den Einsatz im Zusammenhang mit der mittleren Änderungsrate an.

Als Grobstruktur für unseren Lernpfad ergab sich damit:

- Wiederholung des Steigungsbegriffs linearer Funktionen
- Mittlere Änderungsrate
- Differenzenquotient
- Sekantensteigung
- Tangentenbegriff (heuristisch)
- Differentialquotient
- Ableitung
- Ausblick

Die Materialerstellung erwies sich als aufwändiger als erwartet, da wir die bereits bestehenden Excel, GeoGebra und Derive Dateien grundlegend überarbeiten und anpassen mussten. Andreas Lindner stand uns dabei beratend zur Seite.

In der Pilottest-Phase wurden vor allem mehr Beispiele gewünscht, was für einen Einführungslernpfad nicht verwunderlich ist. Wir haben daher mehr Übungen aufgenommen, in der Absicht, dass daraus ausgewählt werden kann. Ein größerer Anwendungsteil könnte in der Zukunft in Form eines weiteren Lernpfades folgen.

Bei der Erarbeitung der Lernspirale als didaktisches Drehbuch war Evelyn Stepancik sehr behilflich, die in diesem Bereich große Erfahrung hat.

Medienvielfalt
im **Mathematikunterricht** 

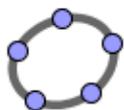
Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

**Medienvielfalt im
Mathematikunterricht**

TEIL 4

**LERNPFAD
INTEGRALRECHNUNG**

Hollabrunn, Dezember 2006



GeoGebra



Eine Galerie multimedialer Lernhilfen

mathe online

für Schule, Fachhochschule,
Universität und Selbststudium

Lernpfad: Einführung in die Integralrechnung

12. Schulstufe

Autoren/innen:

Lernpfad: Markus Hohenwarter, Gabriele Jauck, Andreas Lindner

Lernspirale: Evelyn Stepancik, Markus Hohenwarter

1. Motivation – Warum wurde das Thema gewählt?

Die Integralrechnung ist ein zentrales Thema des Mathematikunterrichts der höheren Schulen in Österreich. Trotzdem sind zu diesem Thema medienunterstützte Visualisierungshilfen und interaktive Materialien deutlich seltener zu finden als zur Differentialrechnung. Mit diesem Lernpfad wollen wir die grundlegenden Ideen des Riemann-Integrals interaktiv erfahrbar machen und verschiedene Wege der Herangehensweise an den Integralbegriff ermöglichen. So stehen interaktive Visualisierungen, Anleitungen zur Verwendung eines CAS und traditionelle Berechnungen per Hand als unterschiedliche Angebote nebeneinander, die einander ergänzen und ein tieferes Verständnis mathematischer Zusammenhänge fördern sollen.

Ausgehend von den problemorientierten Ansätzen der Flächenberechnung eines Grundstücks und des Wasserverbrauchs während eines Fußballspiels, führen Experimente mit Unter- und Obersummen zu einem heuristischen Integralbegriff. Der Computer gibt uns dabei die Möglichkeit, mit Hilfe des bestimmten Integrals bereits Probleme zu lösen, bevor Stammfunktionen eingeführt werden. Erst danach erfolgt die Formalisierung des Integrals über Grenzwerte hin zur Stammfunktion. Ein Höhepunkt dieses Lernpfads ist eine Visualisierung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung mit dynamischen GeoGebra-Konstruktionen von Andreas Lindner.

2. Didaktischer Kommentar

Ihre Schüler/innen und Schüler können mit diesem Lernpfad die grundlegenden Begriffe und Zusammenhänge der Integralrechnung entdecken. Ausgehend vom Wasserverbrauch während einer Fußballübertragung wird das bestimmte Integral über Unter- und Obersummen erarbeitet. Begleitet von vielen Übungen führt der Weg über Flächeninhaltsfunktionen zum unbestimmten Integral und schließlich zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Kurzzinformation	
Schulstufe	12. Schulstufe
Dauer	4 - 6 Stunden
Unterrichtsfächer	Mathematik
Verwendete Medien	Java-Applets, Dynamische Geometrie Software (GeoGebra), Computeralgebrasystem (Derive)
Technische Voraussetzungen	Java, Internet
Autoren	Markus Hohenwarter, Gabriele Jauck, Andreas Lindner

Voraussetzungen

- Technische Voraussetzungen: Java (kostenlos von www.java.com), Internet; eventuell: GeoGebra (kostenlos von www.geogebra.at), Derive
- Vorwissen der Schüler/innen: Differentialrechnung. Vorkenntnis zu GeoGebra oder Derive sind wünschenswert, aber nicht unbedingt erforderlich.

Lerninhalte und Lernziele

Lerninhalt	Lernziel
Einstieg (Wasserverbrauch, Flächeninhalt eines Grundstücks)	Alltägliche Beispiele für die Berechnung von krummlinig begrenzten Flächen nennen können.
Unter- und Obersumme	Unter- und Obersummen charakterisieren können. Flächeninhalte näherungsweise mit Unter- und Obersummen berechnen können.
Bestimmtes Integral	Das bestimmte Integral als Grenzwert von Unter- und Obersummen definieren können. Das bestimmte Integral als mit Hilfe des Computers berechnen können.
Flächeninhaltsfunktion	Den Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhaltsfunktionen erklären können.
Stammfunktion	Stammfunktionen bestimmen können. Das bestimmte Integral mit Hilfe von Stammfunktionen berechnen können.
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	Die Grundideen des Hauptsatzes nachvollziehen können.
Übungen	Flächeninhalte mit Hilfe von Stammfunktionen berechnen können

Didaktischer Hintergrund

In diesem Lernpfad wird die Integralrechnung über das Problem der Berechnung krummlinig begrenzter Flächen eingeführt. Ausgegangen wird dabei von einem ungewöhnlichen und motivierenden Beispiel: dem Wasserverbrauch während eines Fußballspiels. Mit Hilfe der interaktiven Materialien können die Schüler/innen viele wichtige Zusammenhänge selbsttätig entdecken. Um den Lernertrag zu sichern gibt es viele Übungen, in denen sie das eben Gelernte aktiv anwenden können.

Einsatz im Unterricht

Bei den Materialien zu diesem Lernpfad finden Sie einen konkreten Vorschlag samt Ablaufplan zum Einsatz des Lernpfades im Unterricht (siehe *Lernspirale*). Selbstverständlich steht es Ihnen frei, diesen Vorschlag Ihren eigenen Bedürfnissen und Vorlieben anzupassen. Beim Einsatz dieses Lernpfades stehen Sie als Lehrperson Ihren Schüler/innen als Moderator mit Hilfestellungen zur Seite und organisieren den Ablauf (z.B. Wechsel der Sozialform, Gruppeneinteilung, ...). Für den Einsatz des Lernpfades im Unterricht sind verschiedene Szenarien denkbar:

- Einzelarbeit an einem PC
- Partnerarbeit an einem PC
- Stationenbetrieb mit mehreren PCs, bei denen jede Station aus einem Teil des Lernpfades besteht

Es ist nicht notwendig, dass der Lernpfad in aufeinander folgenden Stunden bearbeitet wird. In der Regel wird dies von der Verfügbarkeit von Computern abhängen. Inhaltlich steht es Ihnen frei, bestimmte Teile aus dem Lernpfad auszuwählen, die Reihenfolge ihrer Behandlung im Unterricht zu verändern oder Ihre Schüler/innen nur bestimmte Übungen bearbeiten zu lassen. Beispielsweise können Sie an geeigneter Stelle auch Übungen zum Thema "Flächeninhalte zwischen den Graphen zweier Funktionen" einbauen. In diesem Lernpfad wechseln sich Arbeiten am Computer und im Heft ab. Daher sollte auf den Tischen neben den Computern genügend Platz zum Schreiben vorhanden sein. Wenn Sie möchten, können Sie Ergebnisdateien, die mit GeoGebra oder der Tabellenkalkulation erzeugt wurden, auch über eine Lernplattform abgeben lassen. Auf diese Art könnten Teile des Lernpfades auch als Hausübung gegeben werden.

Kombination der Medien

In dem vorliegenden Lernpfad wird versucht, durch den Einsatz von interaktiven Internetseiten, der Programme GeoGebra und Derive Ihren Schüler/innen ein erforschendes Lernen von Mathematik zu ermöglichen. Die neu gewonnenen Erkenntnisse sollen im Anschluss daran durch händisches Rechnen vertieft und gefestigt werden. Besonders wichtig für die Ergebnissicherung sind neben der Arbeit am Computer daher auch Diskussionen in Kleingruppen und mit der ganzen Klasse.

Lernmedien der Schüler/innen

Die Schüler/innen arbeiten mit diesem Lernpfad nicht nur am Computer. Sie sollen auch Definitionen und Ergebnisse von Übungen im Heft festhalten - auf diese Art kann ein Lerntagebuch zur Integralrechnung entstehen.

Leistungsbeurteilung

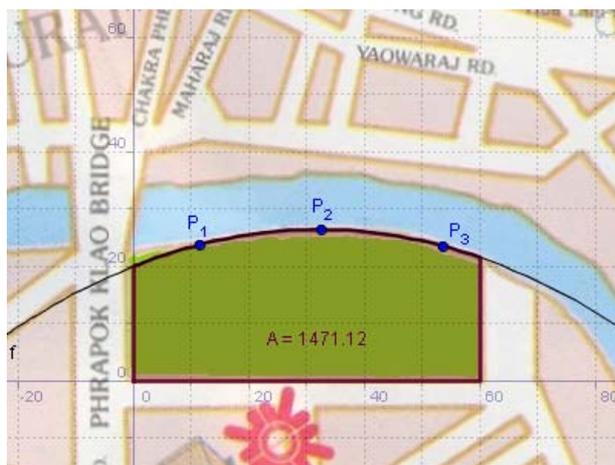
Die Ergebnisse der Schüler/innen sollten als Basis für Diskussionen und Zusammenfassungen in Gruppen oder der ganzen Klasse verwendet werden, wobei die Mitarbeit der einzelnen Schüler/innen bewertet werden kann. Weitere Möglichkeiten zur Leistungsbeurteilung sind das Absammeln der Hefte, entsprechende Schularbeitsbeispiele, Hausübungsbeispiele in einer Lernplattform oder auch eine schriftliche Überprüfung der Mitarbeit am Ende des Lernpfades.

Die Leistungsbeurteilung hängt natürlich sehr stark davon ab, wie Sie den Lernpfad im Unterricht einsetzen. So wird sich die Beurteilung prinzipiell beim Einsatz einer Lernplattform auf andere Kriterien stützen müssen als beim Einsatz des Lernpfades zur Wiederholung und Festigung eines schon großteils bekannten Lerninhalts.

3. Vorteile des Medieneinsatzes – exemplarische Beschreibung der Materialien

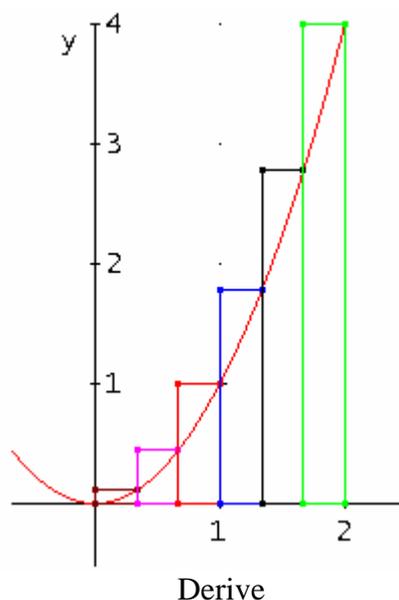
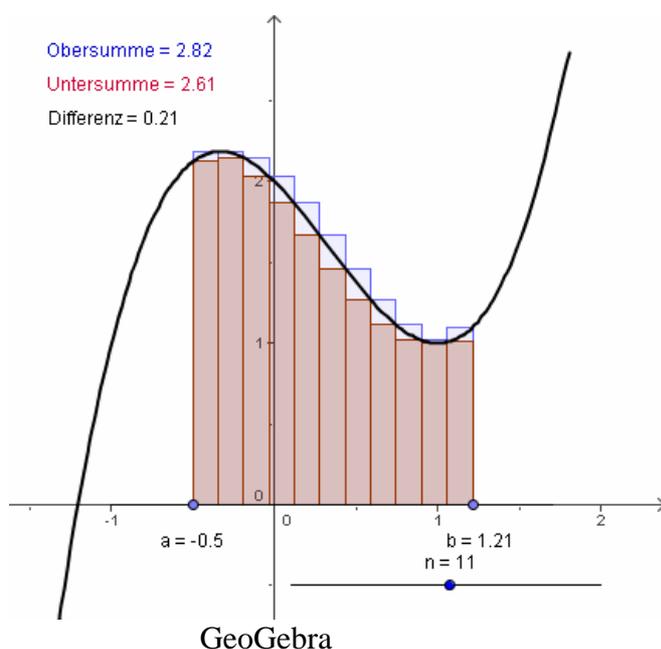
Modellbildung

Einen motivierenden Einstieg in die Thematik bietet das Problem der Flächenberechnung eines Grundstücks an einem Flussufer. Dazu haben wir einen experimentellen Weg gewählt, wobei das Flußufer mit Hilfe einer Parabel, die durch Ziehen dreier Punkte verändert werden kann, angenähert wird. Somit kann einerseits die vereinfachende Modellbildung der Parabelannahme motiviert werden, und andererseits stellt sich natürlich die Frage danach, wie man denn diese Fläche unter der Parabel berechnen kann.



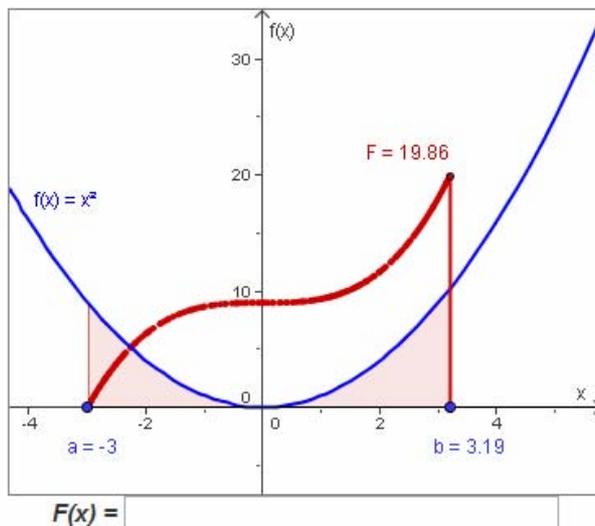
Visualisierung

Unter- und Obersummen sind per Hand nur mit enormem Aufwand produzierbar. Mit modernen Medien wie GeoGebra oder Derive werden sie jedoch mühelos darstellbar und im Fall von GeoGebra sogar dynamisch veränderbar. So kann der Grenzübergang von Unter- und Obersummen zum bestimmten Integral visuell erlebt werden.



Heuristische Begriffsbildung

Der Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Stammfunktionen ist grundlegend für die Integralrechnung. Motiviert kann dieser mit Hilfe der Flächeninhaltsfunktion werden: Dabei wird einer Stelle b die Fläche unterhalb der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ zugeordnet. Durch dynamische Veränderung der Stelle b kann so punktweise der Graph der Flächeninhaltsfunktion entstehen (siehe Abbildung). Dieser heuristische Ansatz motiviert den später eingeführten Begriff der Stammfunktion.



Formalisierung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist das Herzstück dieser beiden Gebiete. Die Betrachtung seines Beweises im Unterricht ist nicht ganz einfach und keineswegs selbstverständlich. In unserem Lernpfad haben wir daher eine anschauliche Herleitung mit interaktiven Konstruktionen versucht, die Schritt für Schritt die wesentlichen Beweisideen illustriert und dynamisch erlebbar machen.

The screenshot shows a Mozilla Firefox browser window displaying a learning path titled "Einführung in die Integralrechnung". The page content includes a graph of a function $f(x)$ with a tangent line at point $A(x)$. The area under the curve from a to x is labeled $A(x) = \int_a^x f(t) dt$. The slope of the tangent is labeled $\frac{\Delta A}{\Delta x}$. The derivative is given as $A'(x) = f(x)$. The page also includes a navigation menu on the left and a task section on the right with buttons for "Tang.steigung EIN" and "Tang.steigung AUS".

4. Drehbuch – Methodisch-didaktische Anleitungen

Lernspirale zum Thema „Einführung in die Integralrechnung“ von Evelyn Stepancik und Markus Hohenwarter

Themenbereich/Inhalte:	
Einführung in die Integralrechnung	
Fachliche	
Voraussetzungen:	Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • Flächenberechnung • Funktionsgraphen interpretieren können • Geometrische Summe • Grenzwert • Termumformungen • Sicherer Umgang mit Polynomfunktionen • Differenzieren • Beweisschritte nachvollziehen 	<ul style="list-style-type: none"> • Die Problematik der Berechnung von krummlinig begrenzten Flächen kennen. • Unter- und Obersummen charakterisieren können. • Flächeninhalte näherungsweise mit Unter- und Obersummen berechnen können. • Das bestimmte Integral als Grenzwert von Unter- und Obersummen definieren können. • Das bestimmte Integral mit Hilfe des Computers berechnen können. • Den Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhaltsfunktionen kennen. • Stammfunktionen bestimmen können. • Das bestimmte Integral mit Hilfe von Stammfunktionen berechnen können. • Die Grundideen des Hauptsatzes nachvollziehen können.

Methodische	
Voraussetzungen:	Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • Informationen selbstständig schriftlich festhalten können • mit Partner und in Gruppe arbeiten können • Methoden zur Partner- und Gruppenfindung kennen • Ergebnisse präsentieren können 	<ul style="list-style-type: none"> • mathematische Inhalte selbstständig erarbeiten können • über mathematische Inhalte sprechen können • wichtige Informationen filtern und schriftlich festhalten können • Eigenverantwortung beim Lernprozess stärken • elektronische Lernhilfen sinnvoll nutzen können

Technische Voraussetzungen:	Ziele:
<ul style="list-style-type: none">• PC mit Internetzugang oder PC mit dem installierten Lernpfad Einführung in die Integralrechnung• Beamer• Dateien öffnen, schließen und speichern können• auf einer Webseite navigieren können• Grundfertigkeiten im Umgang mit Derive und Geogebra	<ul style="list-style-type: none">• Funktionen mit GeoGebra oder Derive zeichnen können• Unter- und Obersummen mit Geogebra oder Derive berechnen können• Bestimmtes und unbestimmtes Integral mit Geogebra oder Derive berechnen können• Interaktive Konstruktionen zur Visualisierung von Zusammenhängen und Eigenschaften nutzen können• technische Anleitungen (Eingabeanweisungen) selbstständig nutzen können

Makrospirale zur Einführung der Integralrechnung

Arbeitsinseln mit grau hinterlegter Nummer sind ausgearbeitet.

Im Folgenden ist ein Ablauf für 4 Unterrichtsstunden ausgearbeitet. 3 weitere Unterrichtsstunden sind als *eventuell* gekennzeichnet und können zur Vertiefung bestimmter Inhalte eingeschoben werden.

Vorwissen /Voreinstellungen aktivieren

A 00	Einführung
------	------------

Neue Kenntnisse/ Verfahrensweisen erarbeiten

A 01	Ober- und Untersumme
A 02	Bestimmtes Integral
A 03	Flächeninhalts- und Stammfunktion
A 04	Beweis zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (eventuell)

Komplexere Anwendungs-/Transferaufgaben

A 05	Übungen zur Integralrechnung
A06	Weiteres: numerische Integration

Arbeitsmittel für alle Arbeitsinseln sind PC und der Lernpfad Einführung in die Integralrechnung sowie Heft für Mitschriften.

Mikrospirale A00: Einführung

Schritt	Lernaktivitäten der Schüler/innen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Der Lernschritt <i>Flächeninhalt eines Grundstücks</i> wird in Einzelarbeit durchgeführt und die Ergebnisse werden im Heft festgehalten.	EA	5'	
2	Zu zweit werden die Ergebnisse der Einzelarbeit und die Vermutung, ob es möglich ist, eine Polynomfunktion 2.Grades mit einem beliebig verlaufenden Flussufer zur Deckung zu bringen, besprochen.	PA	3'	
3	Der Lernschritt <i>Wasserverbrauch während einer Fußballübertragung</i> wird in Partnerarbeit durchgeführt, die Ergebnisse werden im Heft festgehalten.	PA	10'	
4	Die Ergebnisse werden mit einem anderen Paar verglichen.	GA	5'	

Mikrospirale A1: Ober- und Untersumme

1	Unter- und Obersumme: Die Schüler/innen lernen die Bedeutung der <i>Unter- und Obersumme</i> (interaktive Übung) kennen. Die Ergebnisse der einführenden Aufgabe werden im Heft festgehalten.	EA	10'	
2	Zu zweit werden die Ergebnisse der einführenden Aufgabe besprochen und die Übung <i>Unter- und Obersumme mit GeoGebra</i> gelöst.	PA	10'	
3	Die Ergebnisse werden mit einem anderen Paar verglichen. GeoGebra-Dateien werden gespeichert und/oder ausgedruckt.	GA	5'	
	Als Hausübung können die Aufgaben <i>Unters- und Obersumme per Hand</i> oder <i>Unter- und Obersumme mit Derive</i> gelöst werden.			

Mikrospirale A2: Bestimmtes Integral

Aktivierung des Begriffs „Grenzwert“.

Beginn der 2. Unterrichtseinheit				
Schritt	Lernaktivitäten der Schüler/innen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Informationssuche mit Bewegung zum Begriff „Bestimmtes Integral“. Pro ausgehängter Information eine Gruppe. Hinweis: Die Arbeitsblätter der Schüler/innen müssen stets verdeckt hingelegt werden.	EA	10'	Definition „bestimmtes Integral“ 2x aufhängen. Lückentext (S.10) kopieren.
2	Flächenberechnung: Die Schüler/innen bearbeiten einzeln das <i>Musterbeispiel</i> mit GeoGebra oder Derive.	EA	7'	
3	Gruppenrallye: Flächenberechnung: In 4er-Gruppen werden die Beispiele (a) bis (e) arbeitsteilig gelöst und die Vorgangsweise besprochen.	GA	10'	Lösungen aufschreiben und eventuell ausdrucken
4	Die Ergebnisse werden von einer anderen Gruppe anhand der Lösungen verbessert und bewertet.	GA	5'	Lösung mit Folie oder Beamer vorbereiten
5	5 Schüler/innen präsentieren je ein Beispiel.	Plenum	8'	
6	Negative Fläche: Die Schüler/innen bearbeiten die Übung <i>Ein negativer Flächeninhalt?</i> Die Fragestellungen werden im Heft beantwortet.	EA	5'	
7	Die Schüler/innen vergleichen und besprechen ihre Aufzeichnungen.	PA	2'	
Eventuell: Eine Unterrichtseinheit zur Vertiefung des Grenzübergangs von Unter-, Obersummen zum bestimmten Integral				

8	Bestimmtes Integral per Hand: Schüler/innen mit einer Katalognummer der ersten Klassenhälfte bearbeiten in Partnerarbeit das Arbeitsblatt „lineare Funktion“ aus der Übung, die anderen bearbeiten das Arbeitsblatt „quadratische Funktion“. Kontrolle durch Vergleich mit einem anderen Paar.	PA	10'	Kopien der Arbeitsblätter vorbereiten
9	Kugellager: Austausch der Beispiele <ul style="list-style-type: none"> - Gruppe 1 erklärt Arbeitsblatt „lineare Funktion“ - Gruppe 2 wiederholt Vorgangsweise für Beispiel 1 - Gruppe 2 erklärt Arbeitsblatt „quadratische Funktion“ - Gruppe 1 wiederholt Vorgangsweise für Beispiel 2 	Plenum	10'	Eventuell Arbeitsblätter über Beamer erklären
10	In 3er-Gruppen wird je ein Lernplakat zum bisher erworbenen Wissen (Ober-, Untersumme, bestimmtes Integral) angefertigt.	GA	15'	Papier und Stifte für Plakate
11	Museumsrundgang: Jedes Mitglied einer Gruppe erhält eine bestimmte Farbe zugeteilt. Neue Gruppenbildung nach Farben. Jede neue Gruppe wird einem Plakat zugeordnet. Vor jedem Plakat erklärt der/die Experte/in die Inhalte. Wechsel der Gruppen von einem Plakat zum nächsten.	GA	15'	

Mikrospirale A3: Flächeninhalts- und Stammfunktion

Beginn der 3. Unterrichtseinheit				
Schritt	Lernaktivitäten der Schüler/innen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Die Lernschritte <i>Flächeninhaltsfunktion</i> und <i>Stammfunktion</i> (ohne Hauptsatz) werden in Einzelarbeit durchgeführt und alle wichtigen Informationen und Ergebnisse im Heft festgehalten.	EA	8'	
2	Zu zweit werden die Ergebnisse der Einzelarbeit besprochen und die Übungen zu <i>Stammfunktionen händisch berechnen</i> gemeinsam gelöst. Die Ergebnisse werden im Heft festgehalten.	PA	12'	
3	Zwei zufällig ausgewählte Paare präsentieren ihre Ergebnisse zu Übung 1 bzw. 2.	Plenum	4'	

4	Gruppenrallye: Flächenberechnung: In 4er-Gruppen werden die Beispiele (a) bis (d) arbeitsteilig gelöst und die Vorgangsweise besprochen.	GA	15'	Lösungen im Heft aufschreiben
5	4 Schüler/innen präsentieren je ein Beispiel.	Plenum	8'	Lösung mit Folie oder Beamer vorbereiten
	Eventuell Hausübung: <i>Stammfunktion bestimmen</i> mit dem Computer. Die Ergebnisse werden im Heft festgehalten bzw. gespeichert und ausgedruckt.			

Mikrospirale A4: Beweis zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Eventuell: Zwei Unterrichtseinheiten zum Beweis des Hauptsatzes Beginn der 1. Unterrichtseinheit zum Beweis des Hauptsatzes				
Schritt	Lernaktivitäten der Schüler/innen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Teil a: Die Schüler/innen erarbeiten die erste und zweite Aufgabenstellung des Beweises zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Existenz von Stammfunktionen) in Einzelarbeit und dokumentieren diese möglichst ausführlich im Heft.	EA	15'	Kopie der GeoGebra Konstruktion
2	Die Schüler/innen vergleichen und besprechen die Ergebnisse der ersten beiden Aufgabenstellungen. Zu zweit erarbeiten die Schüler/innen den Mittelwertsatz der Integralrechnung sowie dessen Folgerungen und dokumentieren ihr Vorgehen möglichst ausführlich im Heft.	PA	15'	Kopie der GeoGebra Konstruktion
3	Die Paare lösen gemeinsam die dritte Aufgabenstellung des Beweises zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und dokumentieren ihr Vorgehen möglichst ausführlich im Heft. Der gesamte Beweis wird in allen seinen Schritten nochmals besprochen.	PA	10'	Kopie der GeoGebra Konstruktion
4	Die interaktive Zusammenfassung wird Schritt für Schritt abgespielt und mit den eigenen Aufzeichnungen verglichen.	PA	7'	
	Hausübung: Die Schüler/innen verfassen einen zusammenhängenden Text, indem sie mit eigenen Worten den gesamten Beweis (Teile a und b) ausführlich wiedergeben.			

Eventuell: Zwei Unterrichtseinheiten zum Beweis des Hauptsatzes Beginn der 2. Unterrichtseinheit zum Beweis des Hauptsatzes				
5	Zu zweit werden die Ergebnisse der Hausübung verglichen.	PA	7'	
6	Zwei Schüler/innen präsentieren ihre Hausübung.	Plenum	7'	Eventuell Beamer für GeoGebra Konstruktionen
7	Die Schüler/innen bearbeiten die Aufgabenstellung des Beweises, Teil b <i>Integralberechnung</i> und dokumentieren diese im Heft.	EA	7'	
8	Lernplakat zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	GA	20'	
9	Stafettenpräsentation eines Lernplakates	Plenum	7'	

Mikrospirale A5: Übungen zur Integralrechnung

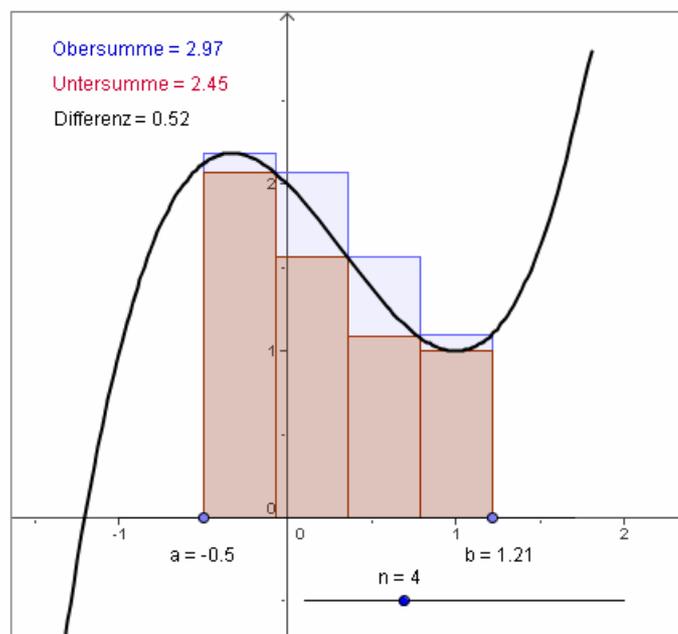
Beginn der 4. Unterrichtseinheit				
Schritt	Lernaktivitäten der Schüler/innen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Die Schüler/innen bearbeiten in Partnerarbeit die Übungen <i>Grundstück</i> und <i>Oldtimer</i> .	PA	20'	
2	Je zwei Paare gehen zusammen und besprechen ihre Lösungen.	GA	5'	
3	6 Gruppen gestalten je ein Lernplakat zur Integralrechnung	GA	15'	Plakate, Stifte
4	Präsentation eines Lernplakates	Plenum	7'	

Lückentext – Bestimmtes Integral

Das bestimmte Integral

In den bisherigen Übungen hast du gesehen, dass für die _____ unter der Funktion $f(x)$ immer gilt:

_____ \leq Fläche $A \leq$ _____



Bei wachsender Anzahl _____ der Rechtecke nähern sich Unter- und Obersumme _____ an. Daher definieren wir die _____ unter der Funktion $f(x)$ im _____ als _____ von Unter- und Obersumme: _____

Diese Fläche heißt **bestimmtes Integral** von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$, das wir so schreiben:

Zur Schreibweise

Das Integralzeichen _____ stellt ein stilisiertes "S" dar und steht für "Summe". Das " dx " steht für die _____ eines Rechtecks beim Grenzübergang. Diese Schreibweise des bestimmten Integrals soll verdeutlichen, dass es sich um den Grenzwert einer _____ handelt.

5. Ergebnisse der internen Evaluation

Der Lernpfad kann als Lernsequenz, in Auszügen mit eigener Unterrichtsorganisation und als Lernspirale verwendet werden. Die methodischen Anleitungen für die Lehrperson sind ausreichend genau und verständlich. Der Lernpfad dient fast ausschließlich dem Erarbeiten neuer Inhalte, die dafür verwendeten Erklärungen und Anweisungen sind verständlich und schlüssig. Wünschenswert wären eine Ergänzung durch Übungs- und Vertiefungsaufgaben sowie Zusatzmaterialien als Wahlangebot, z.B. in Form einer Internetrecherche zur Historie der Integralrechnung, oder Beispiele, die das forschende Lernen ansprechen. Die bei den Applets gegebenen Anweisungen sind sehr detailliert und zielorientiert, so dass das eigene Experimentieren der Schüler/innen hier etwas zu kurz kommt.

Der im Lernpfad gewählte Weg (bestimmtes Integral – Ober-/Untersummen - Stammfunktion – Hauptsatz) wird von den Evaluator/innen als sinnvoll erachtet, obwohl eine andere Reihenfolge denkbar wäre. Die Fachsprache ist korrekt, es ist ein roter Faden erkennbar und in Technologiehinsicht liegt eine ausgewogene Mischung zwischen dynamischer Geometrie-Software und CAS vor, wobei trotzdem die wesentlichen händischen rechnerischen Fähigkeiten nicht zu kurz kommen. Als großer Vorteil wird erachtet, dass mit Geogebra erstmals eine gute Visualisierung von Ober- und Untersumme möglich ist, was sonst nur mit aufwändigem, abstrakten mathematischen Mitteln gelingt.

Im Evaluationsteam entstand eine Diskussion über Verbesserungsmöglichkeiten in fachdidaktischer Hinsicht. Dazu gehören:

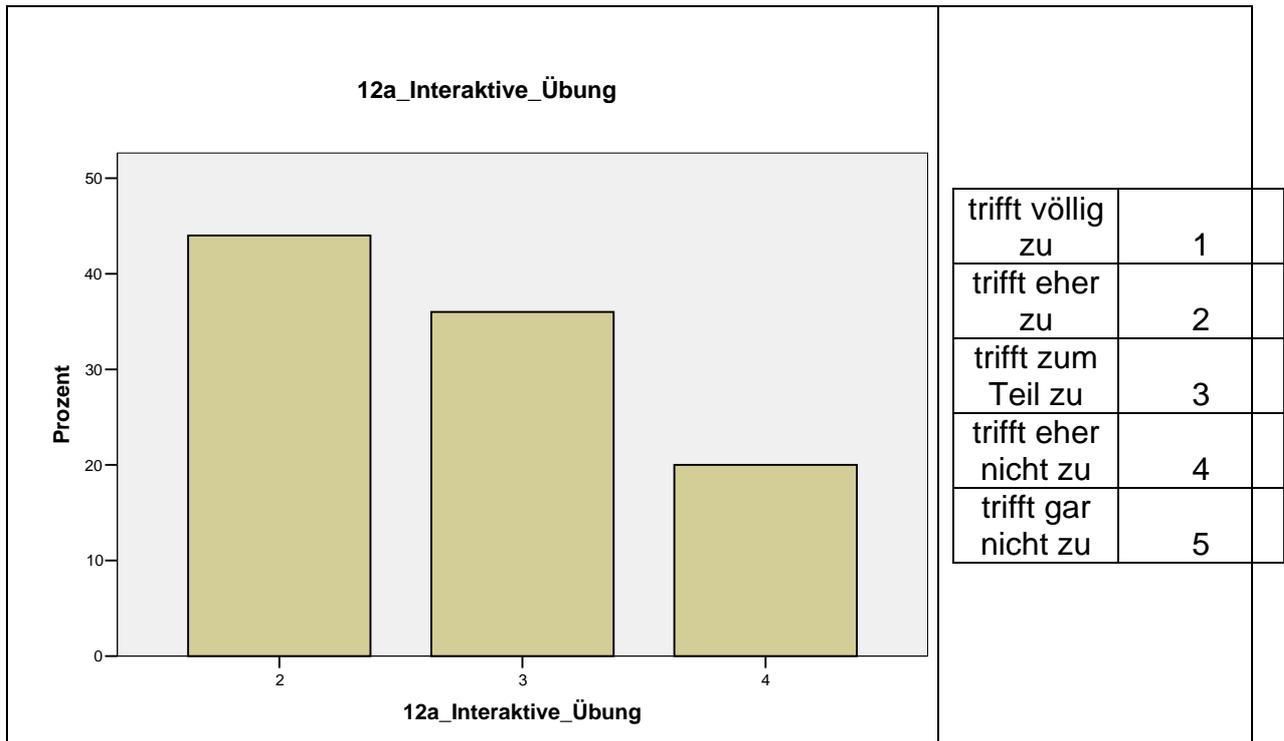
- weniger Arbeiten mit Black Boxes durch vorheriges Einschleifen von händischen Arbeitsaufträgen
- das Summenzeichen und der Summenbegriff expliziter machen
- den Limesbegriff vorher aktivieren
- negative Fläche eventuell durch orientierte Fläche ersetzen
- Übergang schaffen vom Einstiegsbeispiel Grundstück zur ersten Darstellung von Unter- und Obersumme
- neben Geogebra auch Computeralgebra für Berechnungen einsetzen
- Beweis zum Hauptsatz könnte kürzer gefasst sein (eventuell Differenzierung in Kurz- und Langform) und dadurch unter Umständen an Transparenz gewinnen; es wäre auch denkbar, das interaktive Applet zur Darstellung der Flächeninhaltsfunktion A vor dem Beweis zu verwenden und nicht gleichzeitig
- beim Navigationspunkt „Flächeninhaltsfunktion“ wird der Begriff Stammfunktion verwendet, obwohl der erst später kommt.

6. Äußere Evaluation / Feedback der Schüler/innen

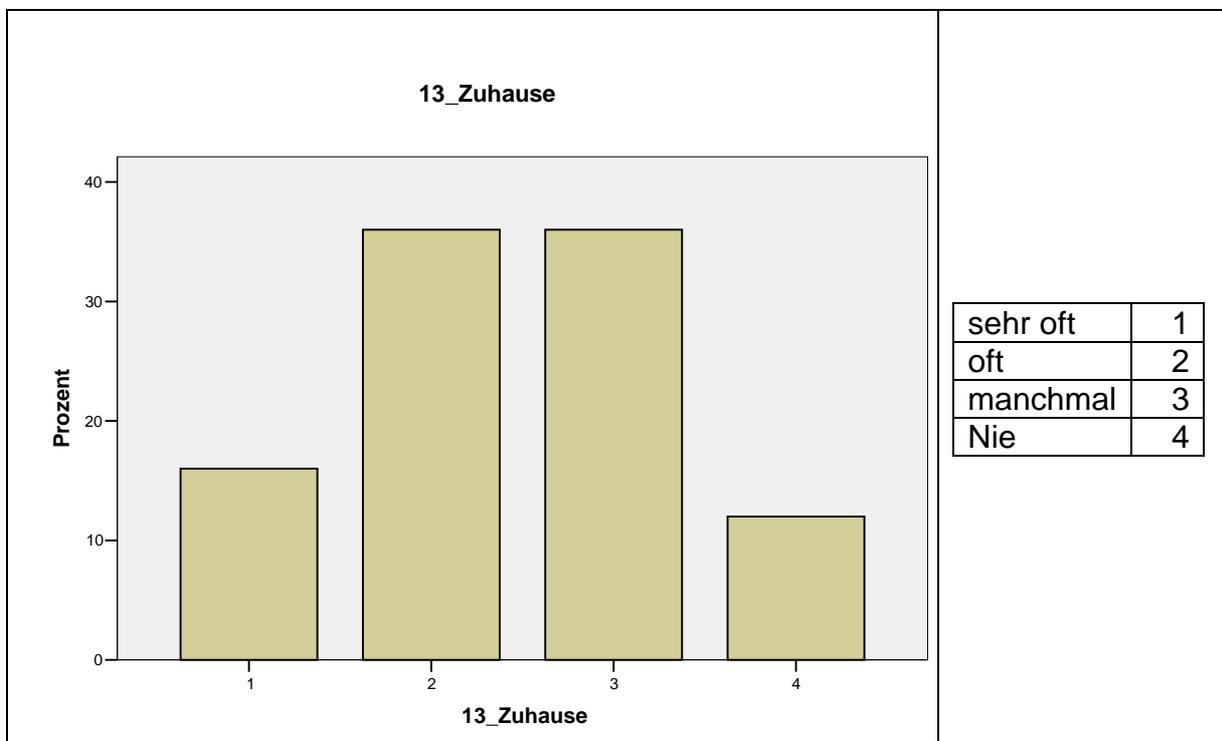
Diesen Lernpfad hat nur eine einzige Schulklasse mit 25 Schüler/innen evaluiert, deshalb sind die Rückmeldungen nicht so aussagekräftig wie bei anderen Lernpfaden.

Bei der Akzeptanz des Lernpfades fällt auf, dass nur sehr wenige Schüler/innen völlige Zustimmung zu Fragen nach Verständnis, Links und der generellen Zustimmung zur Arbeit mit dem Lernpfad gibt – allerdings sind auch wenig völlig negative Rückmeldungen zu

verzeichnen. Die interaktiven Übungen werden zu 80 Prozent positiv bewertet – gegenüber 60 % allgemeiner Zustimmung über alle Lernpfade:



Der Lernpfad wurde in verstärktem Maße zu Hause bearbeitet:



Der Lernpfad wurde auch in starkem Ausmaß (60 % der Schüler/innen) zur Übung für Schularbeiten verwendet. Die Zustimmung, wieder mit Lernpfaden arbeiten zu wollen, ist allerdings gering.

Der Lernpfad wurde von den Schüler/innen als fördernd für das Experimentieren und die Möglichkeit, eigene Gedanken auszuprobieren, empfunden. Auch die Neugier und Lust am mathematischen Tun wird eher positiv beantwortet.

Das Verlangen nach persönlicher Betreuung geht aus den Rückmeldungen der Schüler/innen deutlich hervor. Ein zu hohes Maß an „Alleingelassen werden“ wird von den Schüler/innen sehr negativ bewertet.

Einzelne Zitate aus den offenen Fragen:

- *„man konnte selbst viel experimentieren und probieren und hat so selbst zu einer lösung gefunden“*
- *„Ich möchte Sachen von einem Lehrer erklärt bekommen und nicht selber lernen müssen“*

7. Überblick über den Erstellungsprozess

Dieser Lernpfad entstand auf Grundlage von Unterrichtserfahrungen von Gabriele Jauck und Andreas Lindner sowie einer Unterrichtseinheit bei Lehrer-Online von Markus Hohenwarter. Der Zugang über Unter- und Obersummen zum bestimmten Integral ist mit traditionellen Methoden sehr zeitaufwändig. Mit Hilfe neuer Technologien wie GeoGebra oder Derive lassen sich diese einerseits dynamisch visualisieren und andererseits auch symbolisch über unendliche Reihen berechnen. Um auch auf die Schwierigkeit der händischen Berechnung von Unter- und Obersummen einzugehen, haben wir auch dazu entsprechende Beispiele angeführt. Im gesamten Lernpfad stehen computerunterstützte und traditionelle Ansätze nebeneinander, sodass die Lehrperson aus diesen Zugängen wählen kann.

Ein interessanter Diskussionspunkt war der Schritt vom bestimmten zum unbestimmten Integral. Um die Einführung der Stammfunktion zu motivieren, haben wir uns auf die experimentelle Einführung der Flächeninhaltsfunktion geeinigt.

Als Grobstruktur für unseren Lernpfad ergab sich damit:

- Problemstellungen als Einstieg (Grundstück, Wasserverbrauch)
- Unter- und Obersumme
- Bestimmtes Integral
- Flächeninhaltsfunktion
- Stammfunktion
- Hauptsatz und Beweis
- Übungen

In der Pilottest-Phase waren nur wenig Änderungen erforderlich.

Bei der Erarbeitung der Lernspirale als didaktisches Drehbuch war Evelyn Stepancik sehr behilflich, die in diesem Bereich große Erfahrung hat.

Medienvielfalt
im **Mathematikunterricht** 

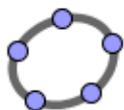
Forschungsprojekt des
Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
bm:bwk

**Medienvielfalt im
Mathematikunterricht**

TEIL 4

**LERNPFAD
KRYPTOGRAPHIE - RSA**

Hollabrunn, Dezember 2006



GeoGebra



Eine Galerie multimedialer Lernhilfen

mathe online

für Schule, Fachhochschule,
Universität und Selbststudium

Lernpfad: Kryptographie - RSA

11. / 12. Schulstufe

(Wahlpflichtfachunterricht, Projektunterricht)

Autoren/innen: Franz Embacher, Petra Oberhuemer, Walter Wegscheider

1. Motivation – Warum wurde das Thema gewählt?

Technologien der Verschlüsselung sind heute Grundlage der weltweiten Kommunikation. Während früher hauptsächlich das Militär Abnehmer und Anwender von kryptographischen Möglichkeiten war, hat die Chiffre, die verschlüsselte Nachricht heute Eingang in das tägliche Leben der westlichen Industriestaaten gefunden. Ohne Verschlüsselung wären Homebanking und alle jene Liebkinder des Internet-Zeitalters, die mit finanziellen Transaktionen über weltweite Netzwerke arbeiten (eCommerce, Onlineshops – eBay, Amazon, ...) undenkbar. Aber auch alltägliche Gegenstände wie die Bankomatkarte arbeiten auf der Basis von Verschlüsselungsalgorithmen.

Die faszinierendste Spielart sind wohl die asymmetrischen Verschlüsselungen, wie z.B. der RSA-Algorithmus. Die Möglichkeit, auch ohne persönlichen Kontakt eine sichere Verschlüsselung aufzubauen, basiert dabei auf handfesten mathematischen Grundlagen. Die Verbindung von mathematischen Grundlagen, die Jahrhunderte lang als geistige „Spielerei“ betrachtet wurden und nun in den letzten 10 – 20 Jahren ungeheure wirtschaftliche Bedeutung erlangt haben, wirft ein eigenes und auch für Schüler/innen motivierendes Licht auf Mathematik.

2. Didaktischer Kommentar

Der Lernpfad wurde zum selbstständigen Erarbeiten der Inhalte konzipiert. Mit Hilfe von Visualisierungen (Flash) und einer Spanne von einfachen bis zu realitätsnahen Beispielen, die mit Hilfe eines Computeralgebrasystems umgesetzt werden, soll diese - heute aus der internationalen Kommunikation nicht mehr wegzudenkende - Technik den Schüler/innen verständlicher gemacht werden. Die zugrunde liegende Theorie - Satz von Euler/Fermat, erweiterter euklidischer Algorithmus wird dabei als Nachschlagemöglichkeit angeboten. Eine gute Ergänzung sind Programme wie GnuPG und PGP, mit denen die Realisierung im Alltag gezeigt werden können.

Eine Möglichkeit, wie man den Lernpfad durcharbeiten kann, wird in Form eines *Drehbuchs* - einer kleinen Geschichte mit Arbeitsaufgaben, die das Kapitel systematisch erschließen - mitgeliefert.

Kurzinformation	
Schulstufe	10. - 12. Schulstufe (6. - 8. Klasse AHS / 2. - 5. Klasse BHS)
Dauer	6 - 8 Unterrichtsstunden
Unterrichtsfächer	Mathematik, Informatik
Verwendete Medien	Internet, DERIVE, Flashfilme, spezielle Krypto-Software
Technische Voraussetzungen	Flash, DERIVE
Autoren	Franz Embacher, Petra Oberhuemer, Walter Wegscheider

Voraussetzungen

- Technische Voraussetzungen: Einfache Grundkenntnisse von DERIVE, Umgang mit Internet, Installation und Verwendung einfacher Softwareprodukte
- Fachliche Voraussetzungen: Hilfreich sind grundlegende Kenntnisse der Restklassenrechnung, euklidischer Algorithmus, Primzahlen, ggT

Verlaufsplan/Prozesshinweise

Einstieg

- Die Schüler/innen können über einfache übersichtliche Artikel die Grundbegriffe der Kryptographie nachschlagen.
- Die Schüler/innen sollen mit Hilfe von Flash-Filmen mit ganz einfachen Zahlen die Funktionsweise der asymmetrischen Verschlüsselung kennen lernen.
- Die Funktionsweise des Algorithmus wird mit Hilfe von Übungen (CAS unterstützt) weiter vertieft.
- Seine Einsatzmöglichkeiten (Verschlüsselung, Digitale Signatur) können mit einfachen Beispielen bis hin zum realitätsbezogenen Software-Einsatz erlebt werden.

Neuigkeiten

- Restklassenrechnung
- Satz von Euler-Fermat
- Erweiterter euklidischer Algorithmus, modulare Inverse
- Asymmetrische Verschlüsselung, Hybride Verschlüsselung
- RSA-Algorithmus
- Digitale Signatur

Mögliche Erweiterungen

- Message Digest - Hash-Funktionen
- Diskreter Logarithmus, ElGamal / Elliptische Kurven

Vorteile des Medieneinsatzes – exemplarische Beschreibung der Materialien

Selbständiges Erarbeiten mit Hilfe eines interaktiven Programms

The screenshot shows an interactive program interface for RSA encryption. It features two characters, Alice and Bob, and a central text area with input fields and explanatory text.

Alice's side (left):

- Alice wählt zwei verschiedene Primzahlen: $p = 11$, $q = 17$. Alice berechnet: $n = pq = 187$, $m = (p-1)(q-1) = 160$.
- Weiters wählt Alice eine Zahl a , die zu m teilerfremd ist: $a = 7$.
- Alice ermittelt aus m und a die Zahl $b = a^{-1} \bmod m =$ [input field] ✓

Bob's side (right):

- Bobs Nachricht ist eine Zahl, die kleiner als n ist: $x = 122$.
- Bob verschlüsselt sie gemäß der Formel $y = x^a \bmod n = 45$.

Central text area:

- Bob möchte Alice eine geheime Nachricht schicken...
- 1 Schritt zurück | Zurück zum Start | Voraussetzungen
- Alice gibt die beiden Zahlen n und a als ihren "öffentlichen Schlüssel" bekannt: $n = 187$, $a = 7$.
- Das macht sie etwa mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus.
- Bob übermittelt y an Alice: $y = 45$.

Hilfe für das selbstständige Erarbeiten mit Hilfe eines CAS

```
#11: z3 := 7812
#12: a := NEXT_PRIME(z3)
#13:          a := 7817
#14: GCD(m, a)
#15:          1
```

Damit ist mit den beiden Zahlen n und a der öffentliche Schlüssel fertiggestellt.

Die Verschlüsselung kann damit über die Formel $y = x^a \bmod n$ erfolgen.

Wir verschlüsseln den Text "KRYPTOGRAFIE" - dazu wandeln wir die Buchstaben in Zahlen um und verwenden dafür den international üblichen ASCII-Code. Wir fassen jeweils 6 Buchstaben zu einer Gruppe zusammen und erhalten 12-stellige Zahlen.

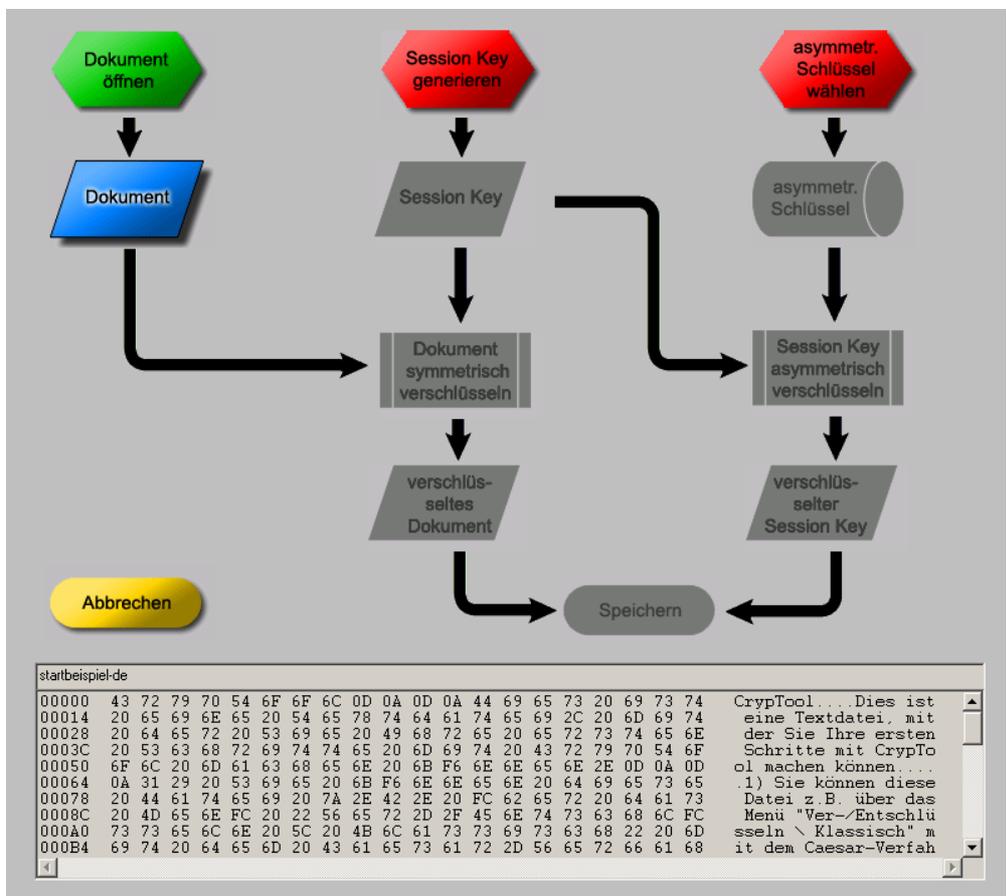
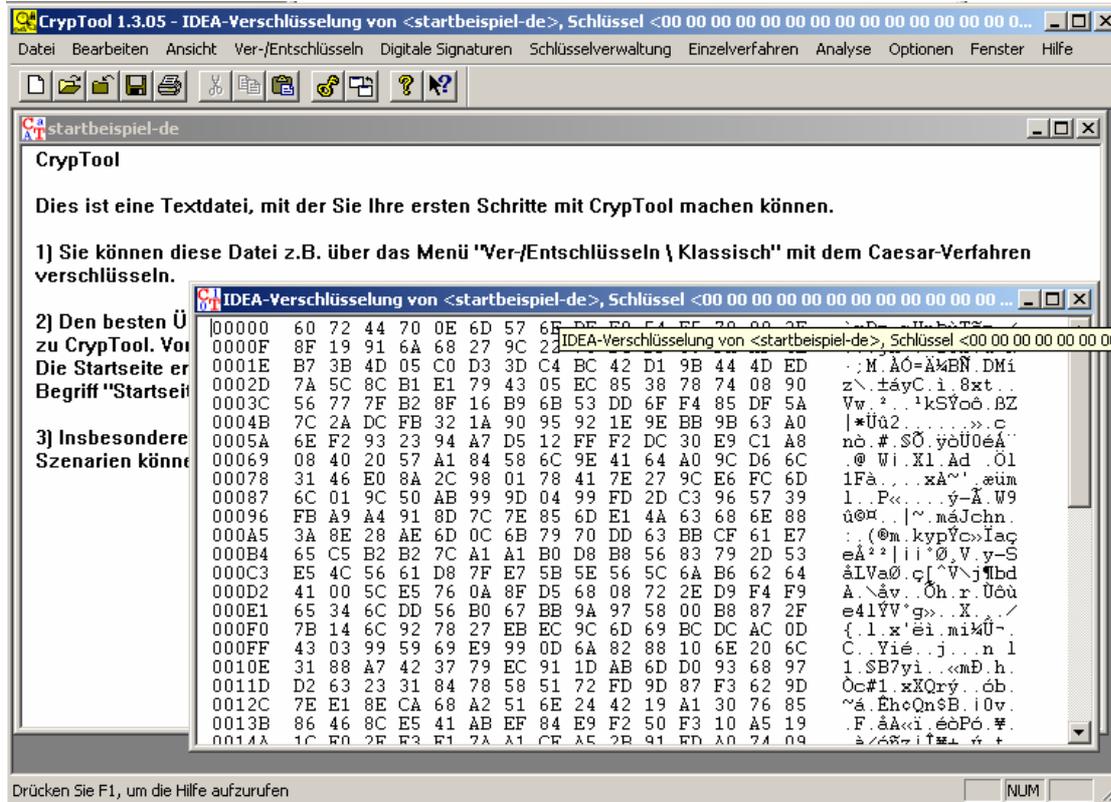
K	R	Y	P	T	O
75	82	89	80	84	79
G	R	A	F	I	E
71	82	65	70	73	69

Wir verwenden den DERIVE-Befehl: **POWER_MOD(x, a, n)** - Resultat von $x^a \bmod n$.

```
#17: y1 := POWER_MOD(758289808479, a, n)
#18:          y1 := 527044673712659
#19: y2 := POWER_MOD(718265707369, a, n)
#20:          y2 := 403187965321648
```

Einbeziehung freier Softwareprodukte

am Beispiel „Cryptool“



3. Drehbuch / Drehbücher – Methodisch-didaktische Anleitungen

3.1. Unterrichtsorganisation – Arbeitsanweisungen für Schüler/innen

Der Lernpfad ist eine E-Learning-Sequenz, die in erster Linie dem eigenständigen Erarbeiten unabhängig von einer bestimmten Unterrichtsorganisation dienen soll. Die Sequenz kann auch in der Erwachsenenbildung bzw. in weiterführenden Bildungsanstalten (Universitäten, Fachhochschulen) eingesetzt werden.

Die Anweisungen für die Schüler/innen sind verpackt in ein „Drehbuch“, in dem über den Ablauf einer einfachen Geschichte versucht wird, den Anwender des Lernpfads gesteuert durch die Materialangebote durchzuführen. Diese stehen aber auch getrennt und einzeln zugreifbar zur Verfügung. Die Arbeitsanweisungen sind dabei getrennt in eine verpflichtende Teile – sozusagen einer „Minimalversion“ – und optionale Teile, mit denen Randbereiche und Ergänzungsbereiche abgedeckt werden können.

Geschichte

Einstieg - Teil 1

Bob erhält einen seltsamen Anhang!

```
-----BEGIN PGP PUBLIC KEY BLOCK-----  
Version: GnuPG v1.4.2 (MingW32)  
Comment: Generated by WinPT 0.10.0
```

```
mQELBENkuu8BCADBkV6icsmAQv/fn/7fOZJxNsyRtVTLeDuZay3paz5qT7krwLU2  
hCZ53Cp1tQotqNo2EATwBwFRzVhEmouEvP1LtZYOm0rO0tKYLX0ro225gG83NO+q  
oYFUnGfqWXI3rGuCm8CbC4MJf06i1/2G9WcWACU3LoEjb7twI5BeT+UCqbf5Ih2  
3nVR0KONRey5ysJh5gADyyQFE7KGn5gwePBOydOV2qAK8pR0S4jsjr1jd0MbZRa5  
9/b3p7PqZoc4vzIxfrYRo4I3q6CcXqTJ74J0Mk4zOo/5+HshouLKQKeild7LvQs0  
/7BPrglSC0Pib2mCrykydAgBS8/+B7Gne7nlAAyptDFTYWJpbmUgV2Vnc2NoZWlk  
ZXIqPHNhYmluZS53ZWdzY2hlaWRlckBjaGVsbG8uYXQ+iQE2BBMBAgAgBQJDZLrv  
AhsPBgsJCAcDagQVAggDBBYCAwEChgECF4AACgkQJ6h05CkjdPmFawf+NkyMa+u4  
YffYKxa+hUqzj5xQvzUyGHSpjWWz2zACzyDaTq4LzFiGCDJvS0AFLuoQMkSiDzTa  
Ybv2EnFdFnmZraJg8UzszK7xaWqJ7rWzdZZl6Fi4YbIkXZXNQA/VekWsvnKYA2Qy  
Nb5QOVSvLzZGbkvtON+j73tpSl4cpTSiEU1wSynvqxranFwcs2ItzIfGD0ioCyjD  
4naggRP/uiJldnOQIwLsKTxmptLSvlrM0Kbo5IozzTFJc3Yy8Jz69RyXvAwY/G9u  
I4tXeZy2njDEZUQVd+Fve4uhwnmZ7u2uhNy6Ge9hE8MqyzBxyvKlIx4xZdHg/qOy  
RPKYDCVjP1UC/g==  
=4fs7  
-----END PGP PUBLIC KEY BLOCK-----
```

Bob bekommt von *Alice* eine Nachricht mit einem seltsamen Anhang. In der Mail schreibt *Alice*, dass *Bob* ihr seine Bankdaten schicken soll - aber **chiffriert!**

Alice sammelt Briefmarken - *Bob*, mit dem sie auf Grund ihrer gemeinsamen Sammelleidenschaft seit mehreren Monaten (seit einem zufälligen Treffen in einem Chatroom) einen regen Briefverkehr hat, konnte ihr einige wertvolle Ergänzungen zu ihrer Sammlung schicken. Sie möchte sie zurückzahlen. Die Übermittlung von Bankdaten per Mail im **Klartext** hält *Alice* aber für zu riskant.

Bob denkt darüber nach und findet, so unrecht hat *Alice* gar nicht - aber all die Begriffe: **PGP**, **chiffriert**, **Klartext** - damit kennt er sich nicht wirklich aus.

Arbeitsaufträge

Aufgaben:

Erkundige Dich im Überblick und kleinen Kryptographie-Glossar, was die Begriffe:

- Ver-/Entschlüsselung, Chiffrierung, Dechiffrierung
- Kryptologie
- Kryptographie
- Klartext / Geheimtext

bedeuten.

Informiere Dich über die Person von Phil Zimmermann und sein bekanntes Programm PGP. Versuche im Internet (z.B. engl. Wikipedia) etwas über die abenteuerliche Geschichte der Entstehung und Verbreitung dieses Programms in Erfahrung zu bringen.

Dokumentiere die Geschichte von PGP mit einer kurzen Präsentation - achte darauf, dass dabei auch die oberhalb aufgezählten Begriffe klar dargestellt werden.

Einstieg - Teil 2

Bankomatkarte und digitale Signatur - ein Angebot der Bank

Bob erkundigt sich bei seiner Bank, ob sie ihm beim Problem der Verschlüsselung seiner Bankdaten weiterhelfen kann. Im Zuge des Gesprächs erhält er von der Bank ein Angebot, die Funktionen seiner Bankomatkarte zu erweitern. Im Schreiben ist die Rede von **Digitaler Signatur** und starker Verschlüsselung mit **RSA-Verfahren**. Mit Hilfe der Karte soll man bequemer ohne die beim Online-Banking üblichen PIN- und TAN-Codes die Bankgeschäfte erledigen können und noch dazu mit höherer Sicherheit.

Das Bankschreiben erklärt auch noch die Vorteile. Während es sich beim PIN/TAN-Verfahren um eine symmetrische Verschlüsselung handelt, ist das RSA-Verfahren asymmetrisch - Empfänger/in und Sender/in müssen sich in diesem Fall nicht persönlich vorher treffen, um die für eine Chiffrierung notwendigen Schlüssel auszutauschen.

Arbeitsaufträge

Aufgaben:

- Lies dir den Überblick zur symmetrischen Verschlüsselung durch. Wo liegen die Stärken und Schwächen von symmetrischer Verschlüsselung im Zeitalter weltweiter elektronischer Kommunikation? **Dokumentiere** Deine Überlegungen.
- **Informiere** Dich über die Begriffe PIN- und TAN-Code?
- **Optional:** Monoalphabetische Verschlüsselung - was versteht man unter einer Cäsar-Chiffre? - versuche, die beiden Übungen im Textabschnitt zu lösen. **Dokumentiere** die Arbeit in Deinem Heft.
- **Optional:** Polyalphabetische Verschlüsselung - Verschlüsse mit Hilfe des Vigenere-Quadrats ein Wort mit mindestens 10 Zeichen Länge und wähle als Schlüsselwort den Nachnamen Deines Nachbarn. **Kontrolle:** Gib das Ergebnis Deiner Chiffrierung an den besagten Nachbarn weiter. Dieser soll Dein Phantasiewort entschlüsseln.
- Erarbeite die folgenden Fragestellungen mit Hilfe des Kapitels über Asymmetrische Verschlüsselung und **dokumentiere**:
 - Erkläre das Problem der Schlüsselverteilung!
 - Arbeite mit dem Klartext: *KRYPTOFIX* mit Deinem Nachbarn die Übung zur Idee der Vorhängeschlösser, die *Diffie* und *Hellman* zur asymmetrischen Verschlüsselung gebracht hat, durch.
 - Arbeite die Übungen zur eleganten Lösung des Problems der Schlüsselübergabe durch.
 - Was sind die Grundprinzipien einer Public Key / Private Key-Verschlüsselung?

Anschließend wird der **theoretische Hintergrund** beleuchtet.

- Ganzzahldivision
- Rechnen mit Restklassen
- Primzahlen
- Faktorisierung
- Satz von Euler/Fermat
- Erweiterter Euklidischer Algorithmus
- Sicherheit der verwendeten Algorithmen

und das RSA-Verfahren mit Hilfe von einem Java-Applet vorgestellt. Parallel dazu erhält der Schüler / die Schülerin eine Einführung, wie man sich dem Problem mit Hilfe eines Computeralgebrasystems (am Beispiel *DERIVE*) nähern kann.

3.2. Anleitungen für Lehrer/innen

Es handelt sich um eine freistehende E-Learning-Sequenz ohne zusätzlich ausgewiesene Anleitungen und Materialien für Lehrer/innen. Alle Hinweise, Materialien, Links etc. stehen sowohl den Schüler/innen als auch den Lehrer/innen zur Verfügung.

3.3. Weitere Materialien

Java-Applets zu RSA-Algorithmus und Digitaler Signatur.

4. Ergebnisse der internen Evaluation

Eine Rahmengeschichte (Drehbuch) begleitet den Schüler / die Schülerin durch den gesamten Lernpfad. Diese versucht, durch für den Schüler / die Schülerin nachvollziehbare Problemstellungen die Einführung neuer Begriffe und mathematischer Inhalte zu motivieren. Der Lernpfad beinhaltet und verlinkt auf viele Zusatzmaterialien (Skripten und freie Software) und Verzweigungen zu verwandten Themen – allerdings birgt das auch die Gefahr, dass sich die Schüler/innen in der Fülle „verlieren“. Die technologischen Hilfestellungen werden genau dort angeboten, wo sie erstmals benötigt werden. Ein Problem ist der benötigte Zeitaufwand, der schnell die vorgeschlagenen 6 – 8 Einheiten übersteigt.

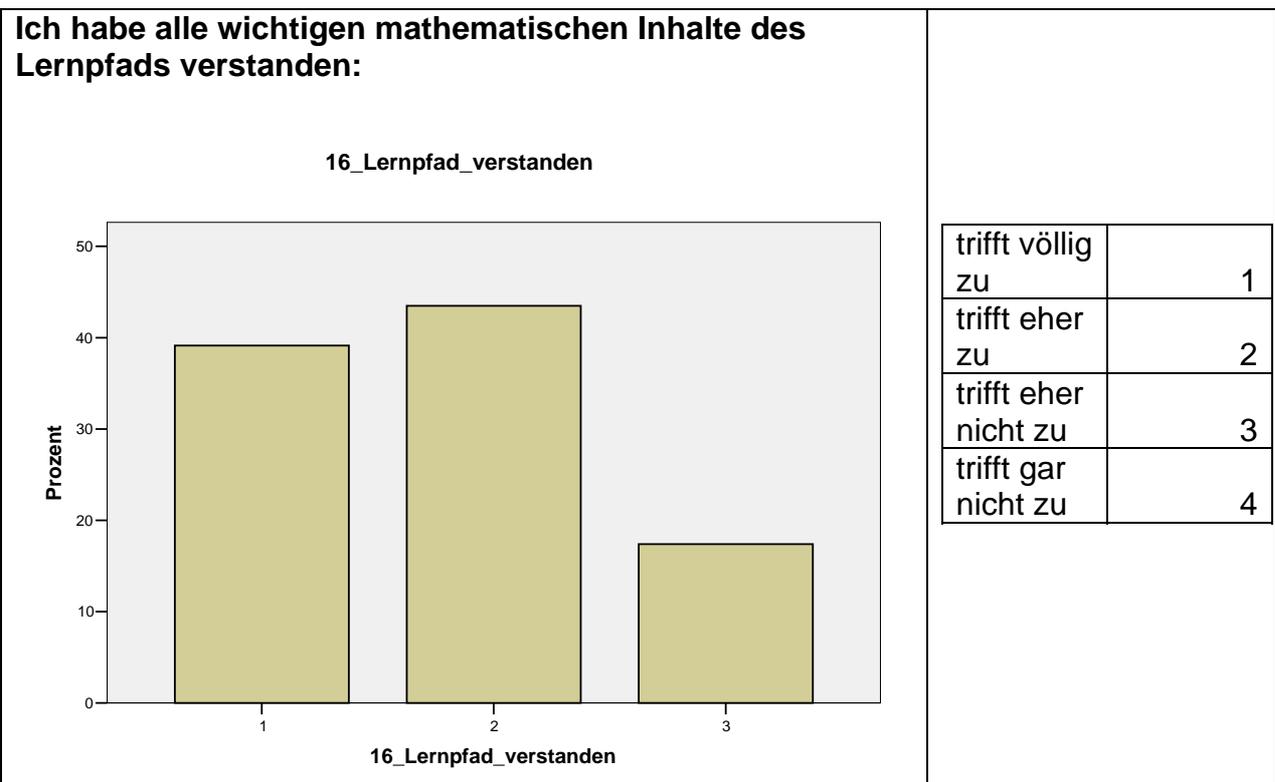
Es gibt durch die Fülle viele Möglichkeiten zur inneren Differenzierung und damit Wahlmöglichkeiten. Partner- und Gruppenarbeit bietet sich an manchen Stellen des Lernpfades (vor allem in Übungsphasen) an, wurde bisher aber noch nicht berücksichtigt.

Bei der Berechnung des umgekehrten euklidischen Algorithmus zur Berechnung der modularen Inversen könnte eventuell als Alternative (bessere automatisierbare Algorithmisierung – Programmierung) noch ein kürzerer Rechengang vorgestellt werden.

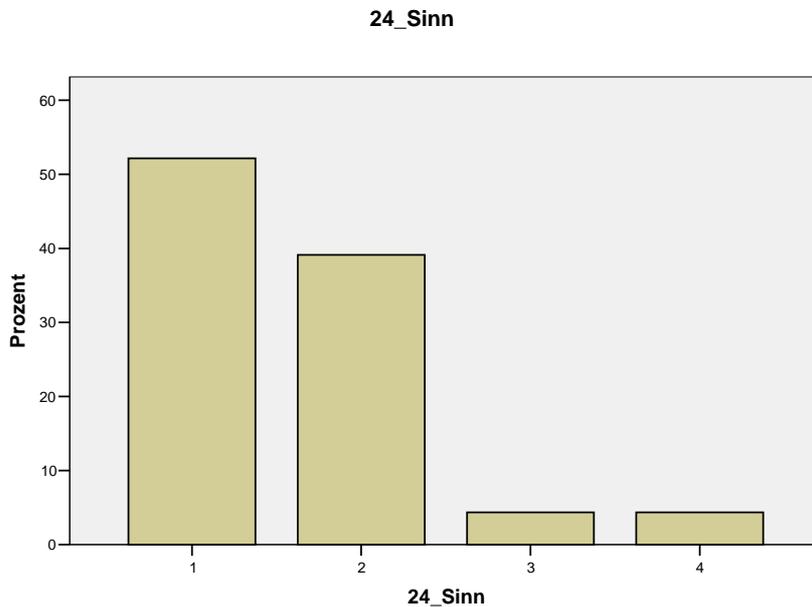
5. Äußere Evaluation / Feedback der Schüler/innen

23 Schüler/innen gaben Rückmeldungen zu diesem Lernpfad.

Alle (100%!) geben an Mathematik zu mögen. Die Sprache wird von allen als verständlich eingestuft. Fast 40% wählten bei der Frage, ob die interaktiven Übungen beim Verständnis geholfen haben, die Option 1 (trifft völlig zu), neben 35% bei Option 2 (trifft zu). Dasselbe Ergebnis zeigt sich auch bei der Frage, ob alle wichtigen mathematischen Inhalte des Lernpfads verstanden wurden (85%), ob Sinn und Bedeutung der neu erlernten Begriffe klar geworden sind (90%), ob Zusammenhänge zu anderen Teilgebieten der Mathematik erkennbar wurden (80%). Trotzdem geben weniger als die Hälfte der Schüler an, wieder mit einem Lernpfad arbeiten zu wollen – im Gesamtdurchschnitt waren dies etwa 70%.



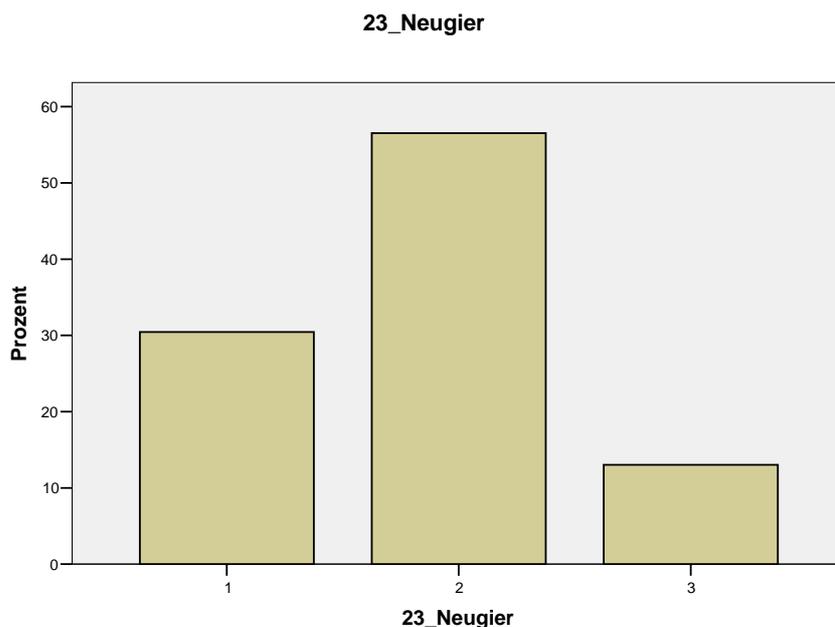
Der Sinn und die Bedeutung der neu erlernten Begriffe sind mir durch den Lernpfad klar geworden:



trifft völlig zu	1
trifft eher zu	2
trifft eher nicht zu	3
trifft gar nicht zu	4

85% haben diesen Lernpfad mit Neugier, Engagement sowie Lust am Denken und mathematischen Tun absolviert, was für diese Schulstufe weit über dem Gesamtdurchschnitt liegt.

Ich habe diesen Lernpfad mit Neugier, Engagement sowie Lust am Denken und mathematischen Tun absolviert:



trifft völlig zu	1
trifft eher zu	2
trifft eher nicht zu	3
trifft gar nicht zu	4

Bei einer eventuellen Interpretation der Ergebnisse muss sowohl die geringe Größe der Stichprobe, als auch der Kreis der Schüler/innen (Wahlpflichtfach Mathematik) in Betracht gezogen werden.

Auszüge aus den positiven Rückmeldungen:

„...dass man genau gesehen hat, was passiert, wenn ICH etwas verändere ...“

„Der schrittweise Aufbau, welcher gekoppelt mit den Animationen den Lernfortschritt gesichert hat.“

6. Überblick über den Erstellungsprozess

Der Lernpfad wurde im Rahmen des Projekts „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ erstellt und getestet. Zuerst wurde das Grundkonzept einvernehmlich festgelegt. Anschließend wurden die Java-Applets von Franz Embacher erstellt. Im Herbst 2005 wurde der theoretische Teil des Lernpfads fertig gestellt – Umgebungsinformationen, Hintergrundwissen und CAS-Umsetzung. Nach einer ersten Evaluationsphase wurde das Drehbuch erstellt und zusätzliche passende Softwareangebote aus dem Open-Source-Bereich hinzugefügt.