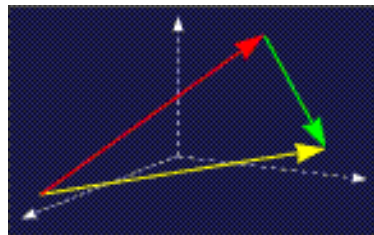
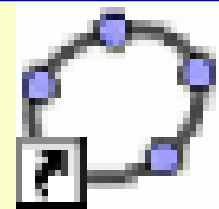


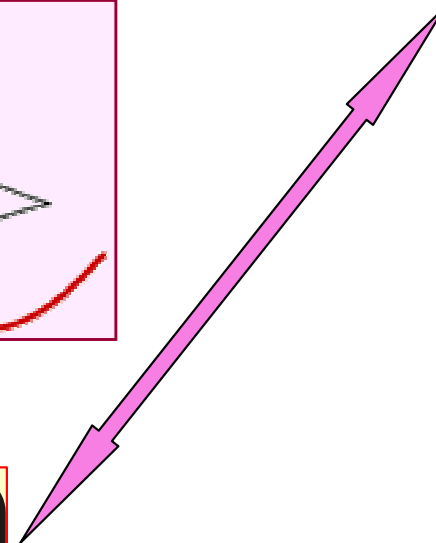
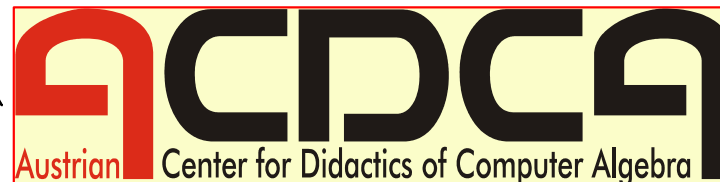
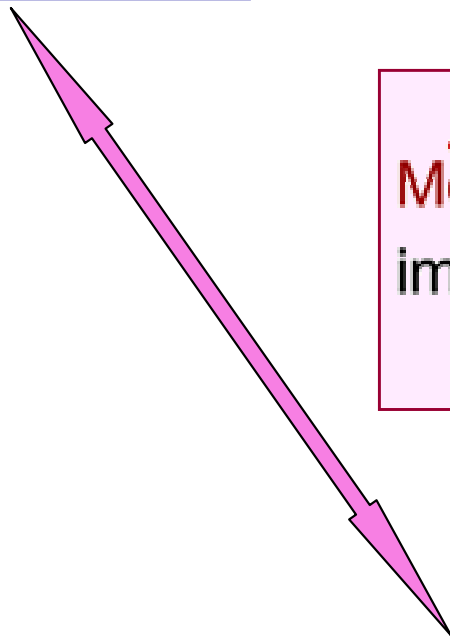
Technologieunterstützte Längsschnitte



mathe online



Geogebra.Ink



Warum Längsschnitte?

➤ **Zum Vernetzen**

Beim Lernen wird Wissen nicht nur angehäuft, sondern verbunden und hierarchisiert. Das führt zu einer kognitiven Struktur im Lernenden ⇔ Aufbau eines Netzes [Vollrath]

➤ **Zum „Wieder-holen-können/müssen“**

➤ **Als Beitrag zur Nachhaltigkeit – zu langfristig verfügbaren Kompetenzen**

➤ **Als stetige Fortsetzung der Einstiegslernpfade des Projekts Medienvielfalt**

➤ **Als Konsequenz auf Ergebnisse erster Standardmessungen**

Bedeutung von Voraussetzungen für Lernerfolg

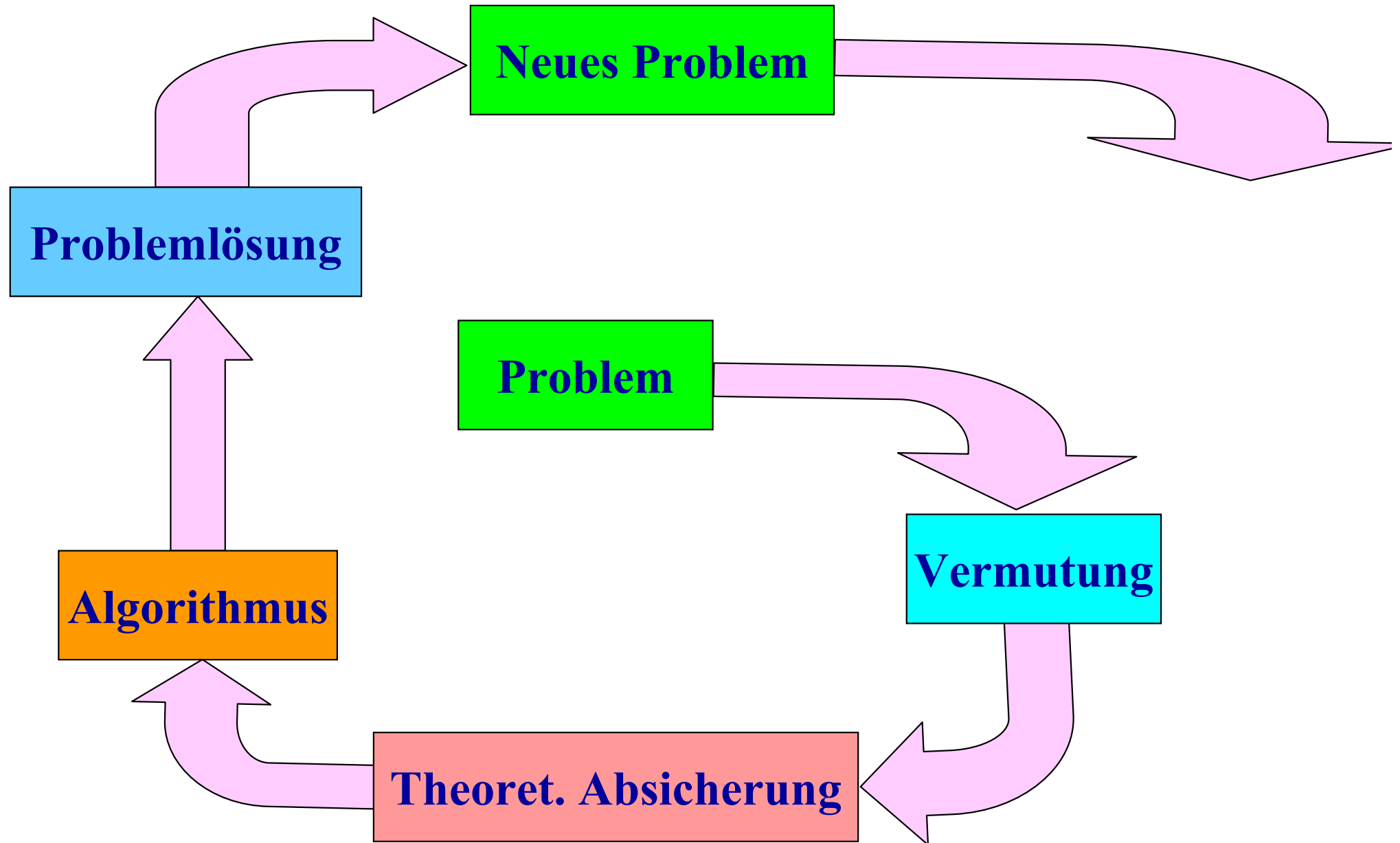


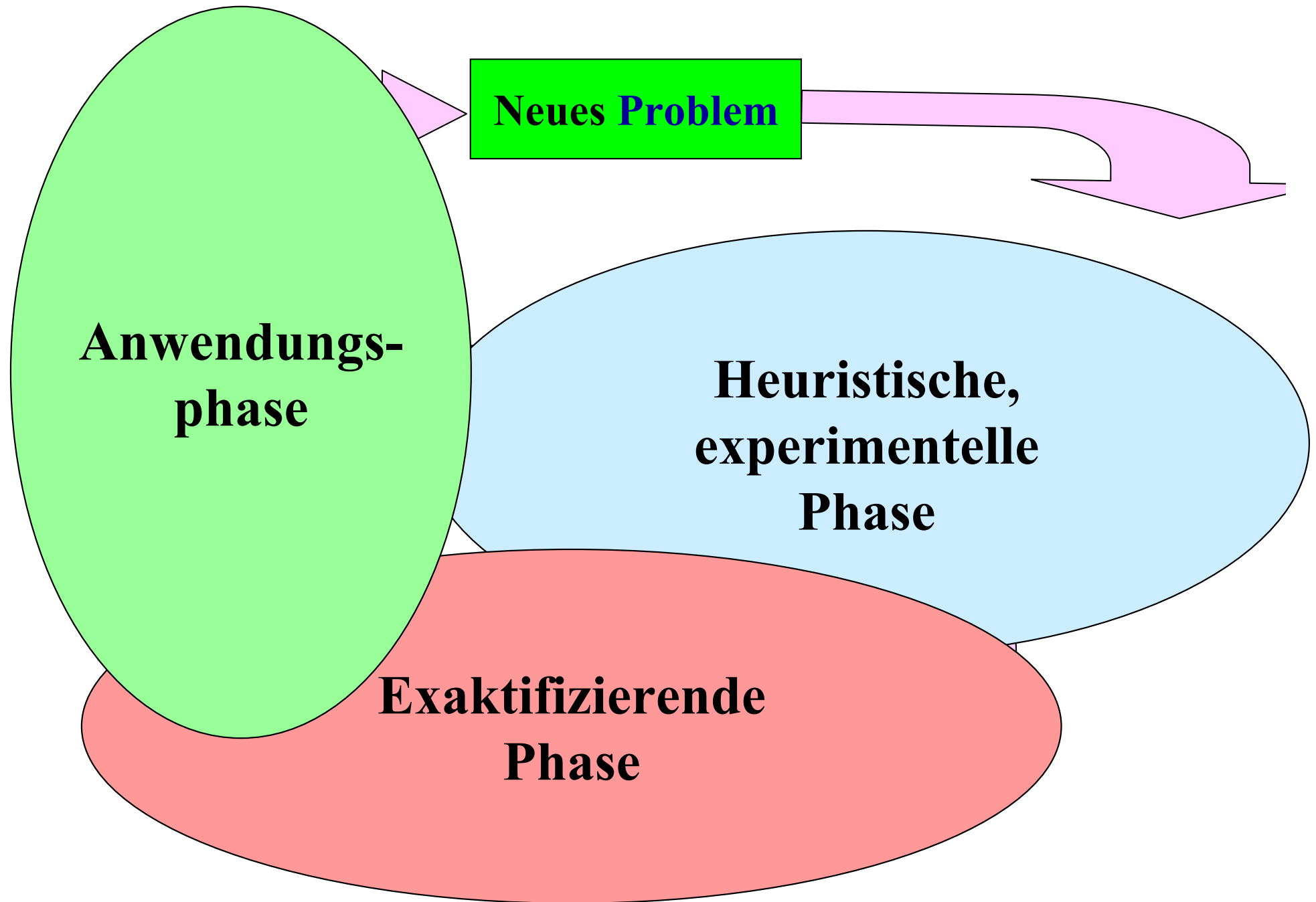
Didaktische Prinzipien als Konstruktionsanleitung für Längsschnitte

➤ **Das Spiralprinzip**

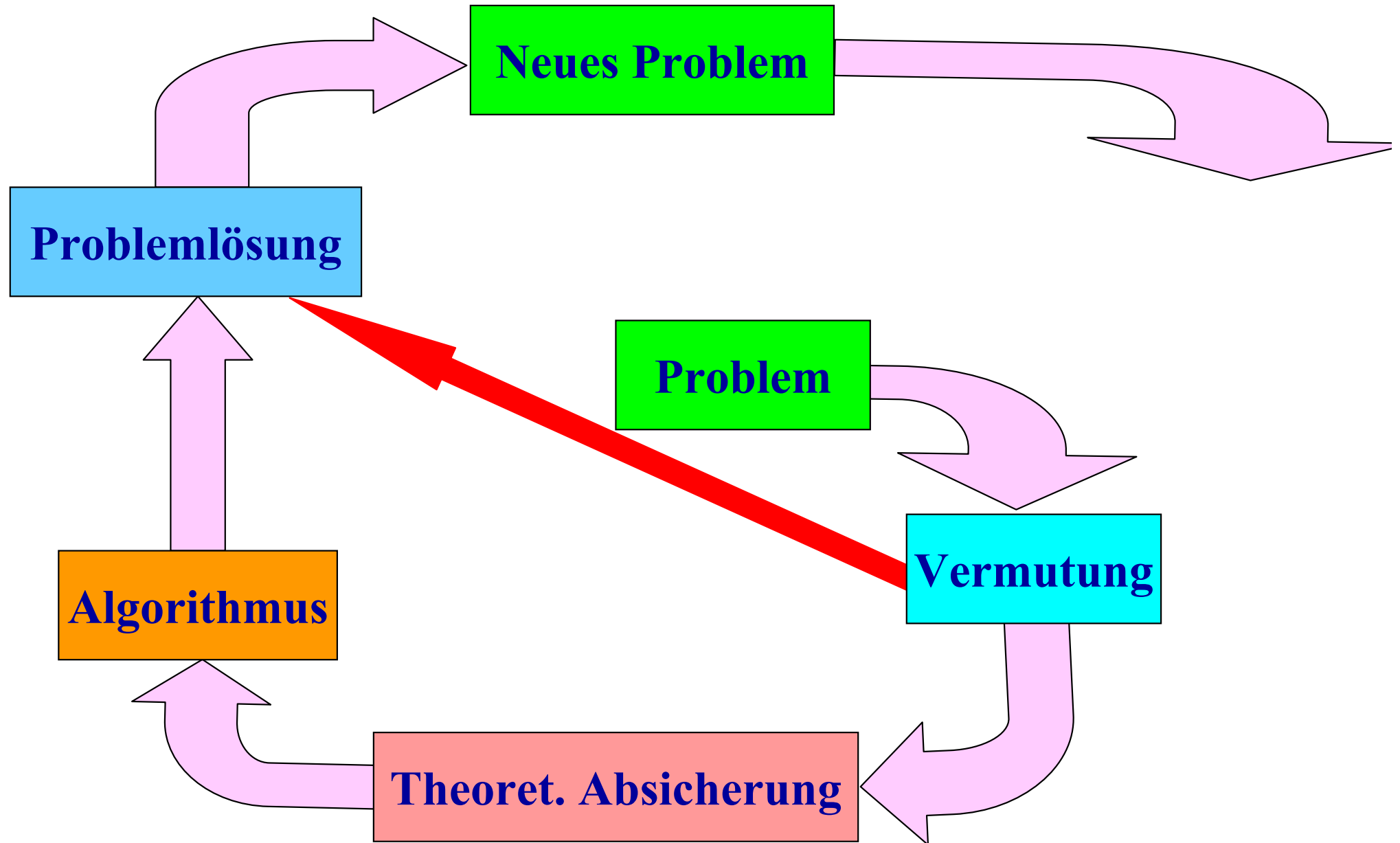
➤ **Die Buchbergersche Kreativitätsspirale**

Der Weg des Lernenden in die Mathematik

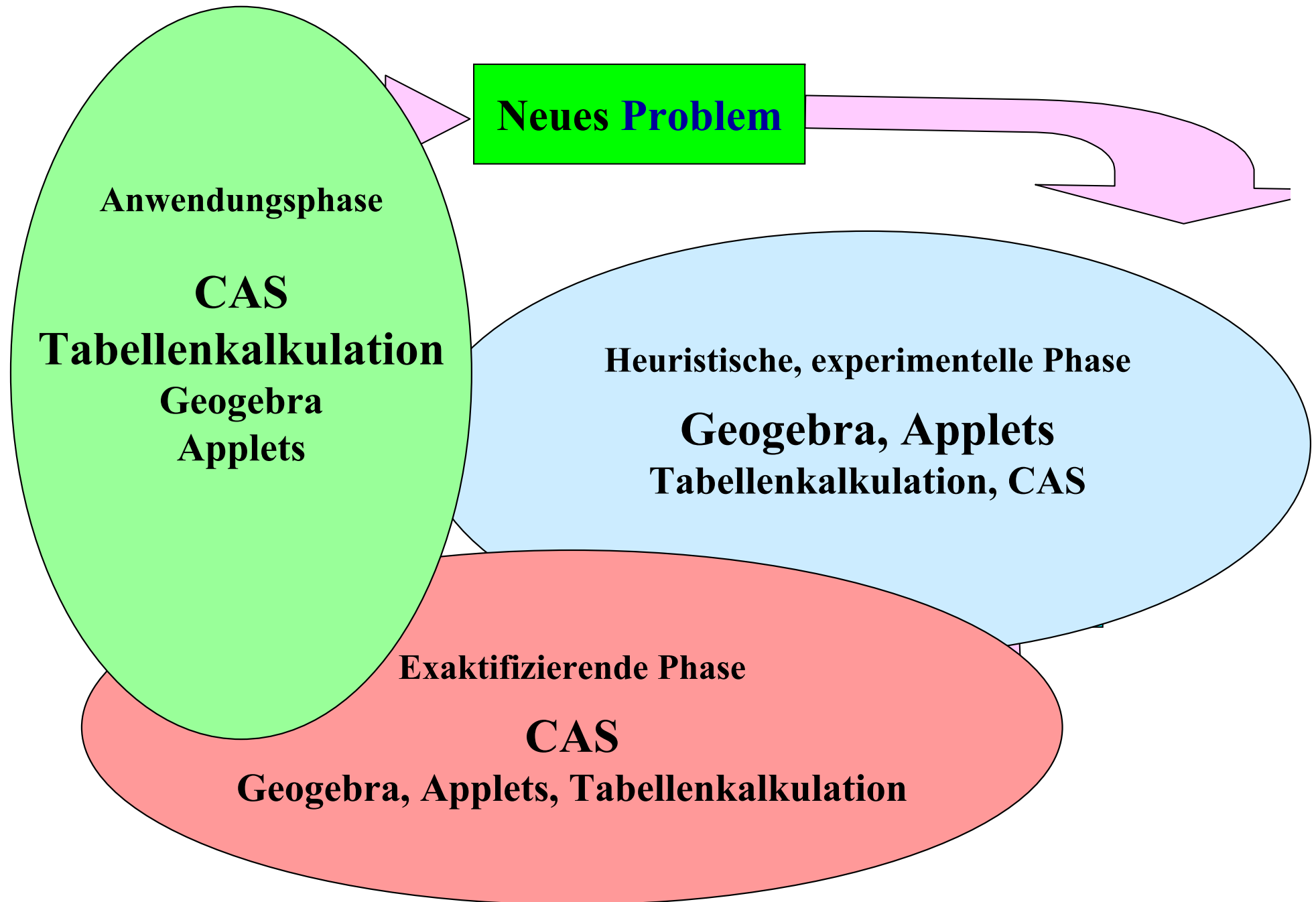




Der Weg des Lernenden in die Mathematik



Zur Bedeutung elektronischer Werkzeuge in den Lernpfaden



Das Spiralprinzip

[Bruner, J.S., 1967]

Dasselbe Thema wird zu verschiedenen Zeitpunkten (z. T. Schulstufen) auf verschiedenen Niveaus behandelt

Zu beachten:

- Die einzelnen Durchläufe dürfen nicht isoliert voneinander bleiben
- Die Standpunktsverlagerung muss bewusst gemacht werden und es sollte auch transparent sein, wozu sie dient.
- Frühere Durchläufe dürfen spätere Erweiterungen nicht behindern.

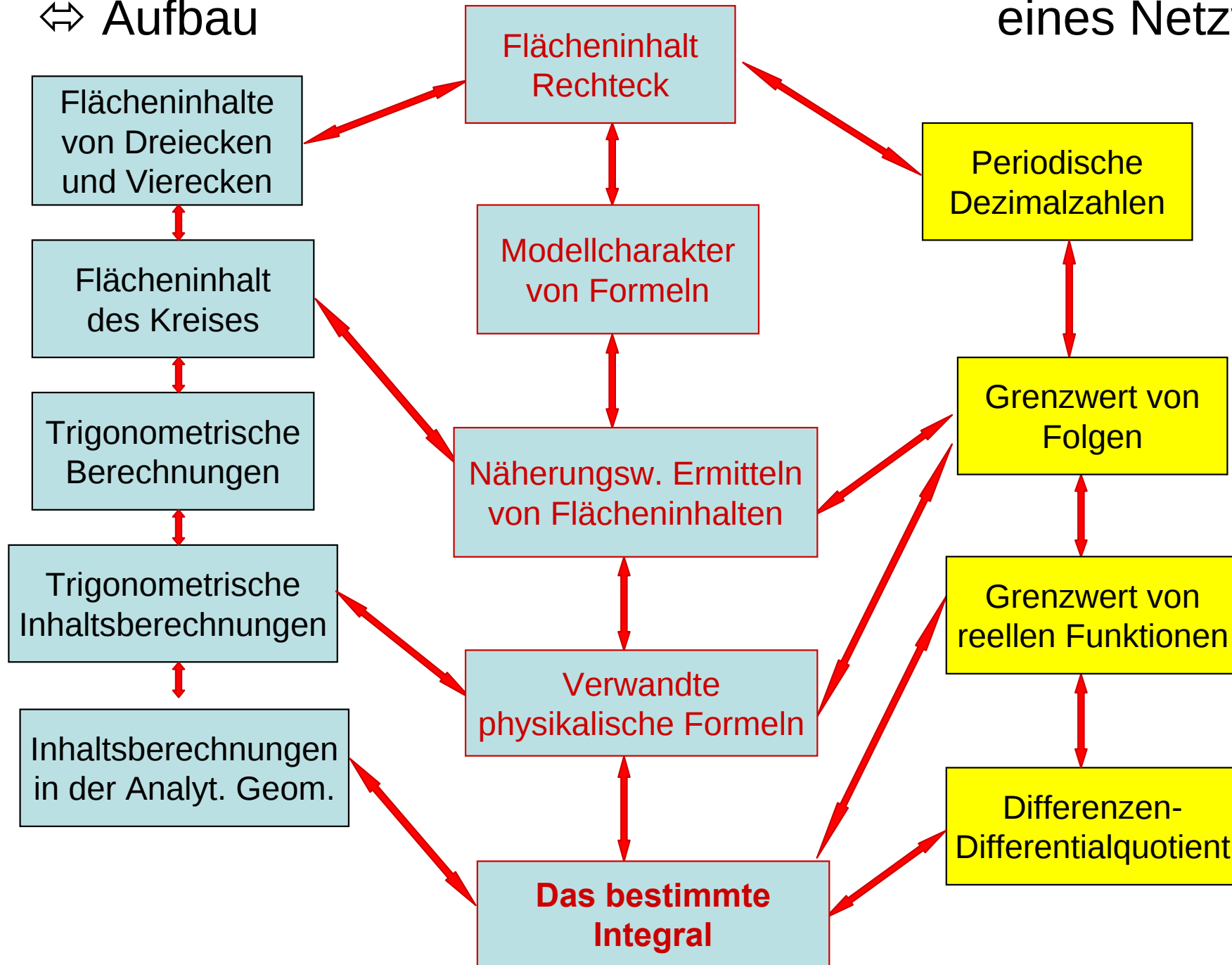


Längsschnitt 1: Vom Flächeninhalt des Rechtecks zum Integral



Langfristiges Lernen als Aufbau einer kognitiven Struktur eines Netzwerkes

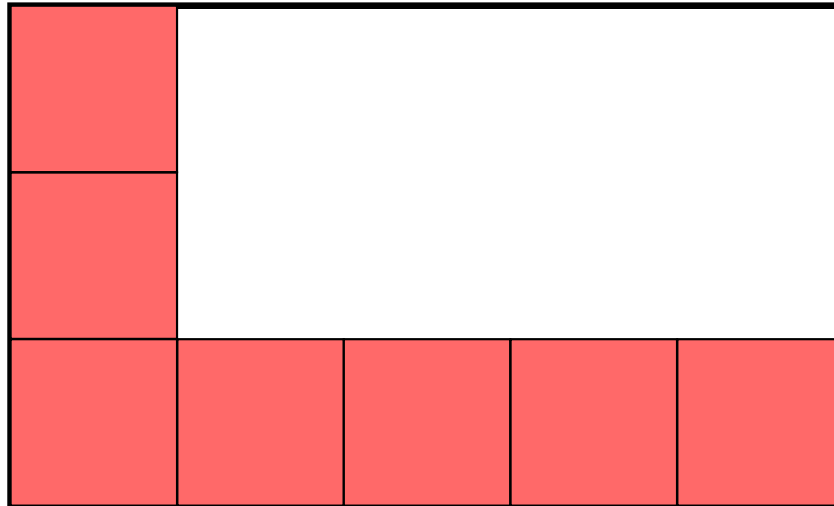
⇔ Aufbau



Flächeninhalt $\Leftrightarrow$ Fliesen zählen

Maßeinheit:

1 FI



$$A = 5 \text{ FI} \times 3 = 15 \text{ FI}$$

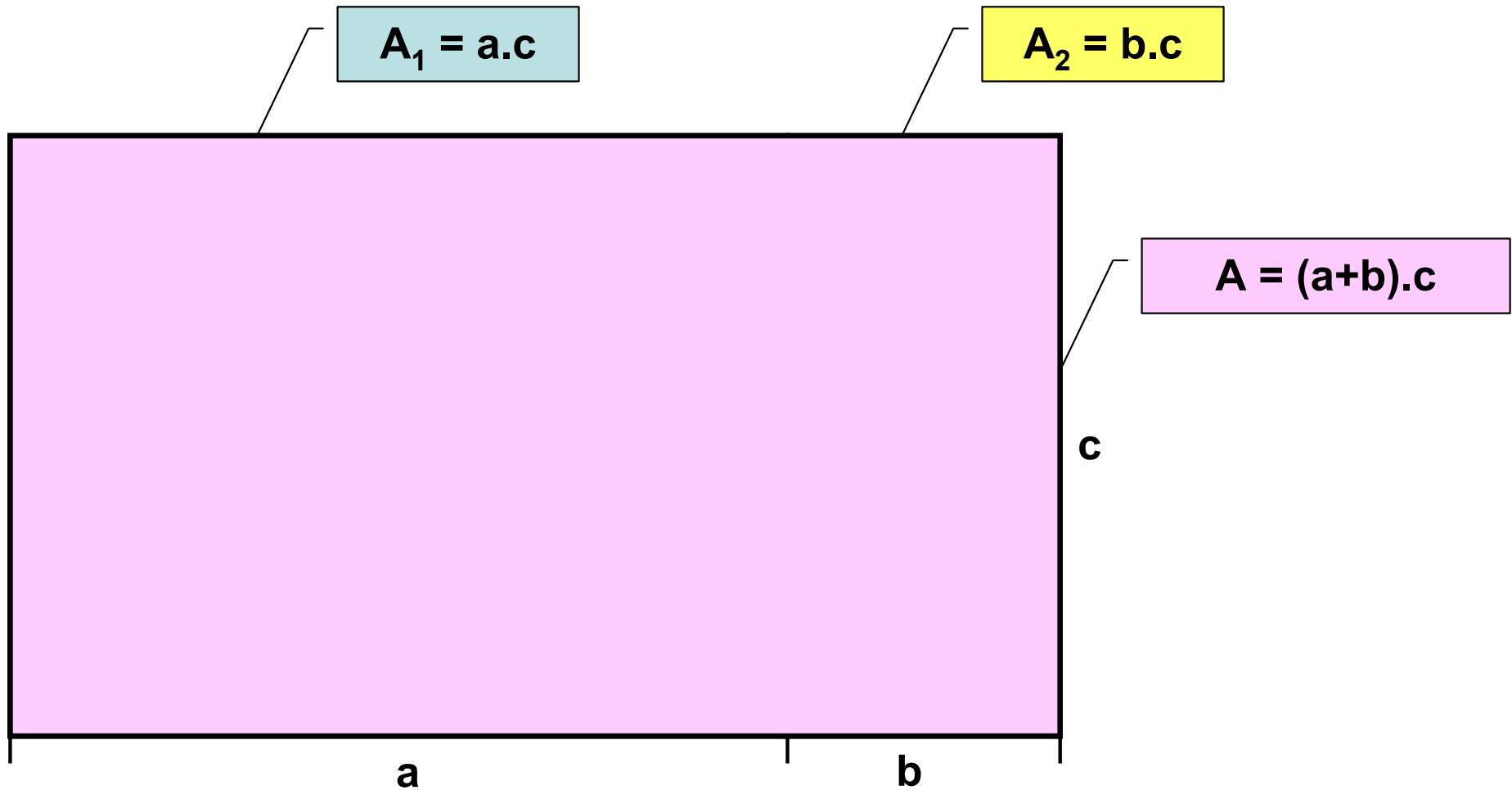


$$A = 5 \times 3 \text{ FI} = 15 \text{ FI}$$



$$A = a.b$$

Rechengesetze plausibel machen

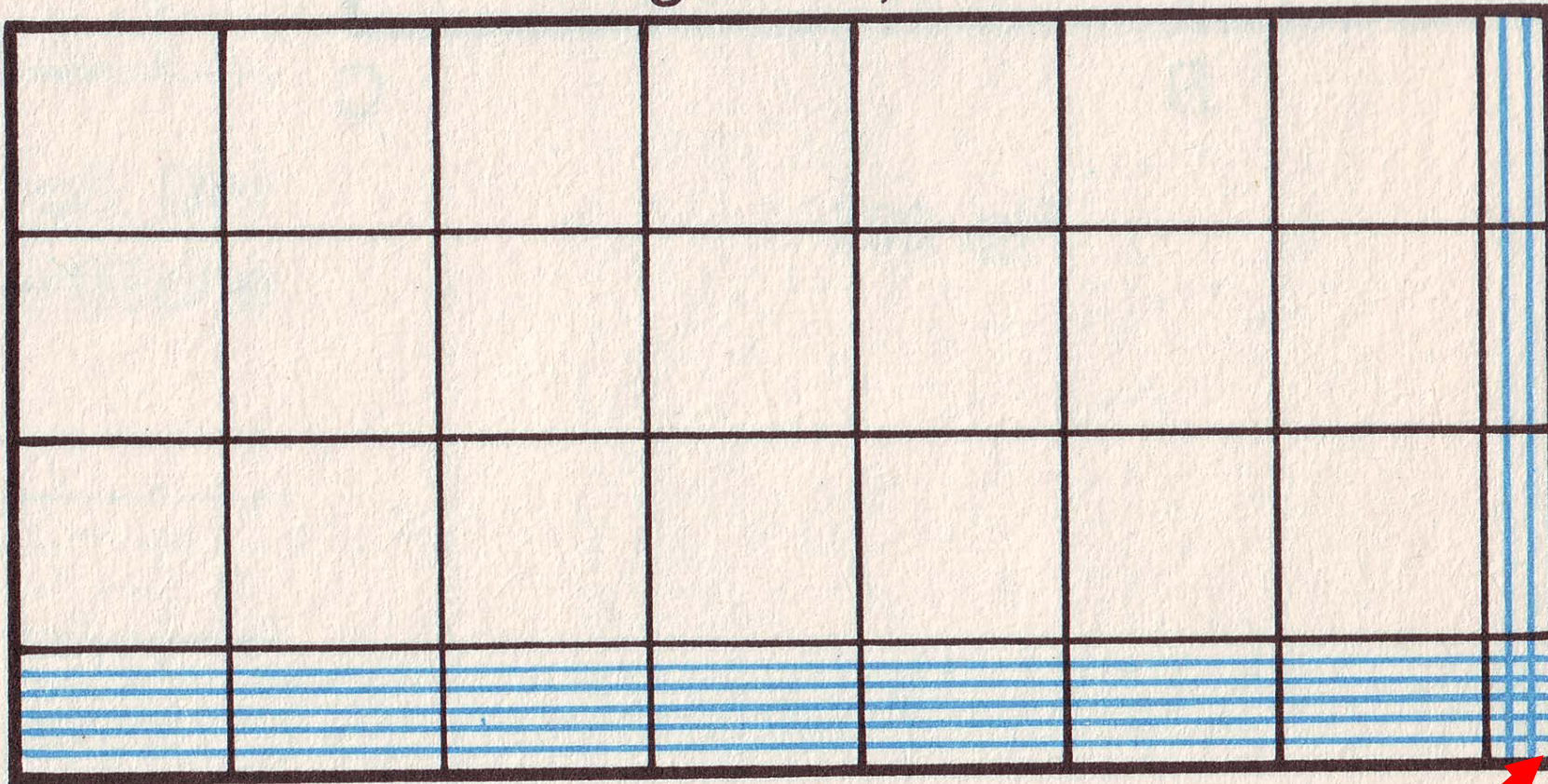


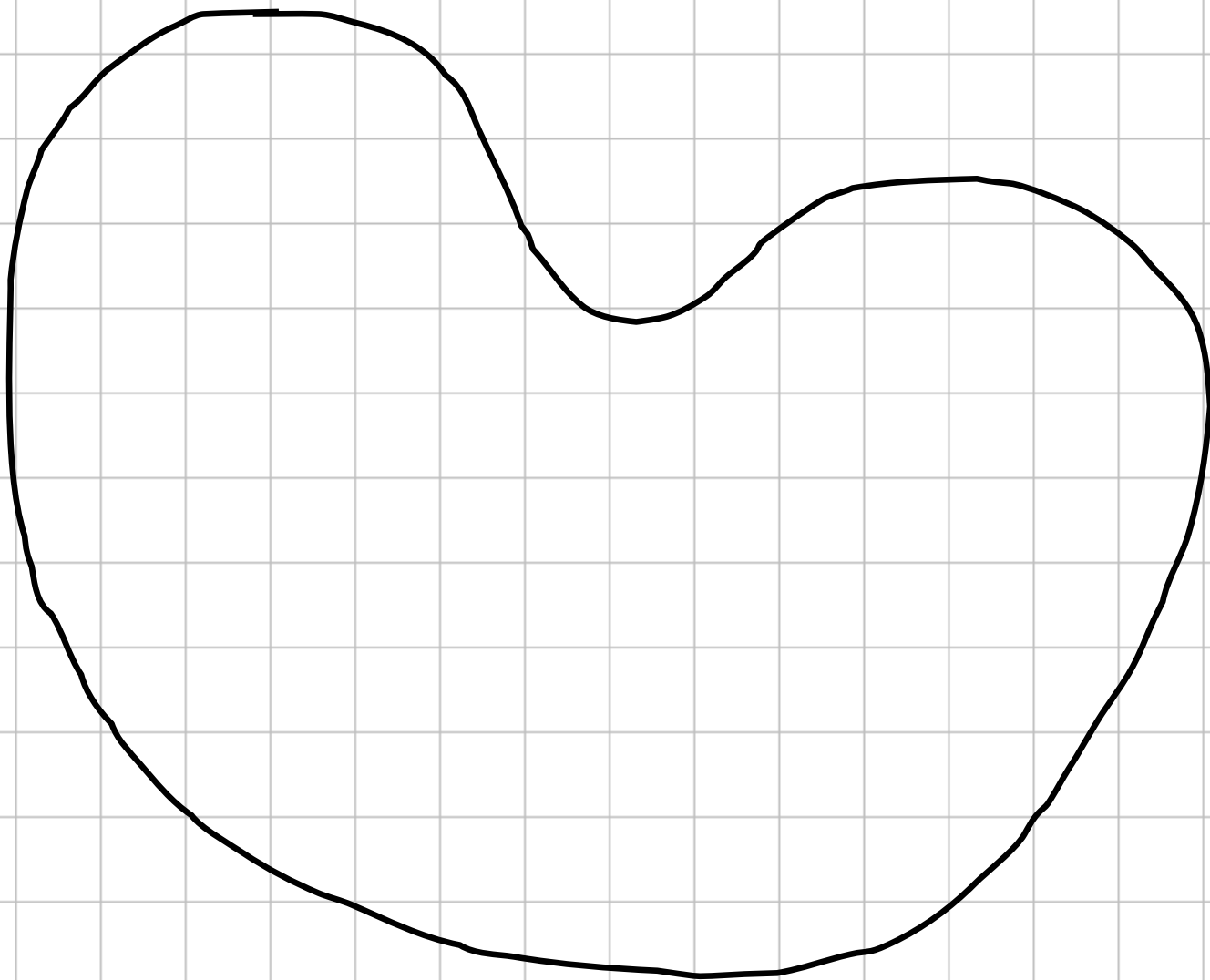
$$A = A_1 + A_2$$

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Länge = 7,3 cm

Breite
= 3,6 cm





hier siehst du eine Karte der Antarktis.

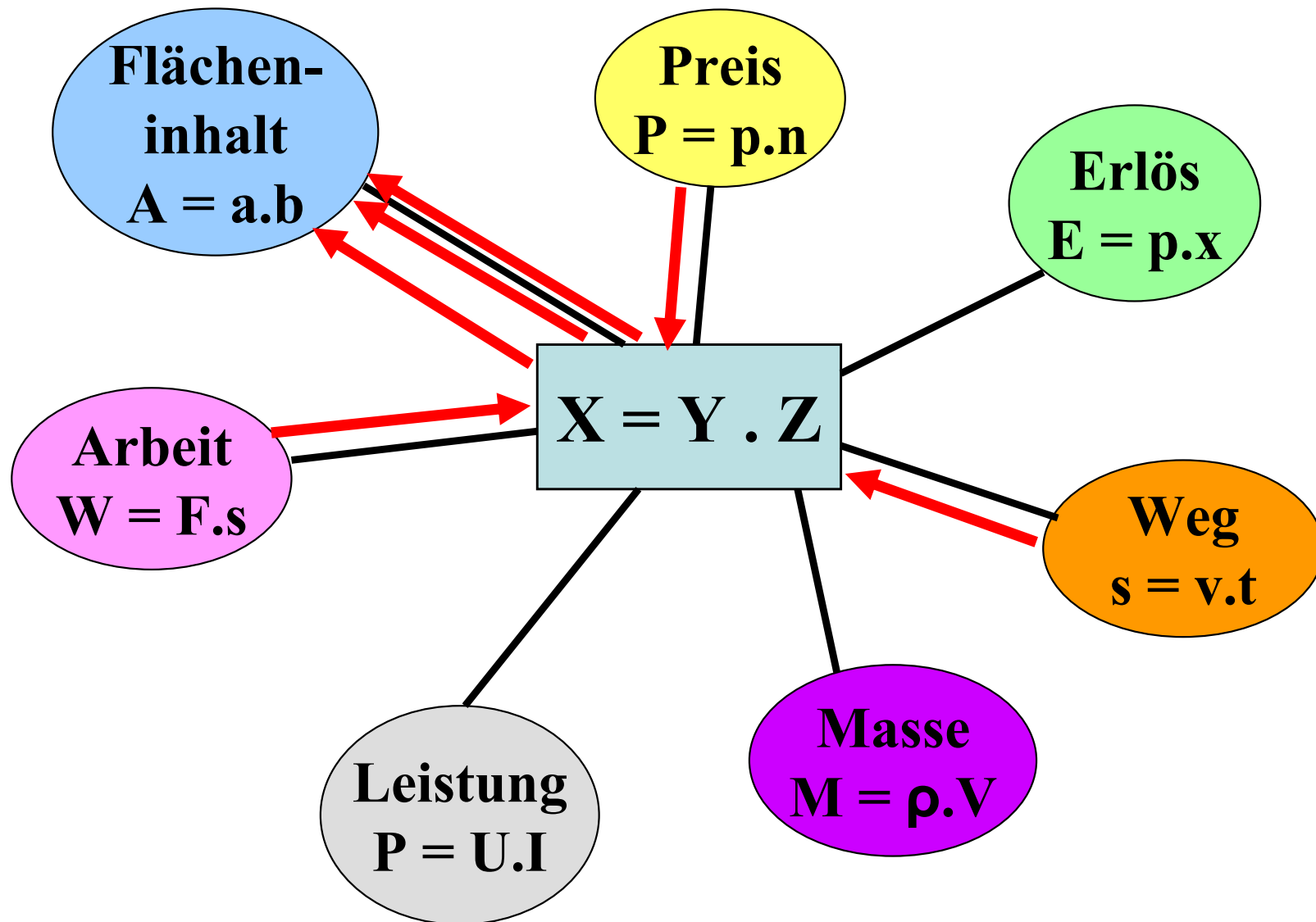


Quelle: PISA 2003

4. Klasse Mathematik:

- **Flächeninhalt eines Rechtecks mit $l = \pi$ und $b = \sqrt{2}$**
- **Flächeninhalt eines Kreises**
- **Näherungsweise Ermittlung von Flächeninhalten**

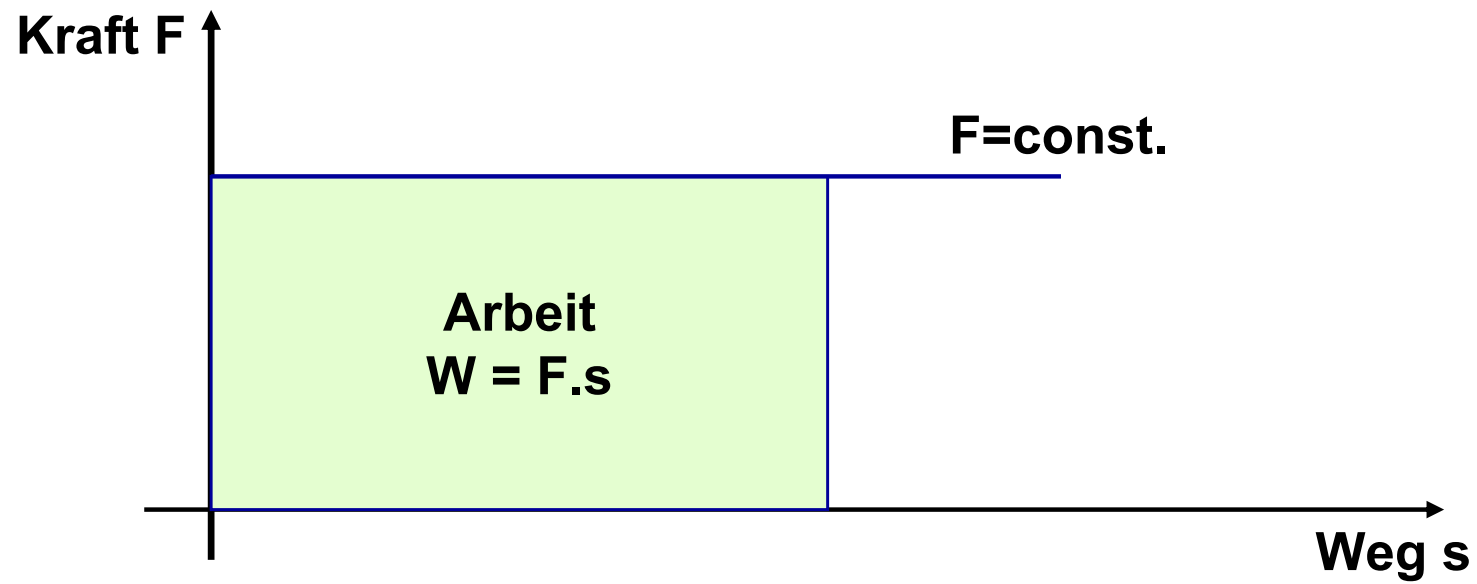
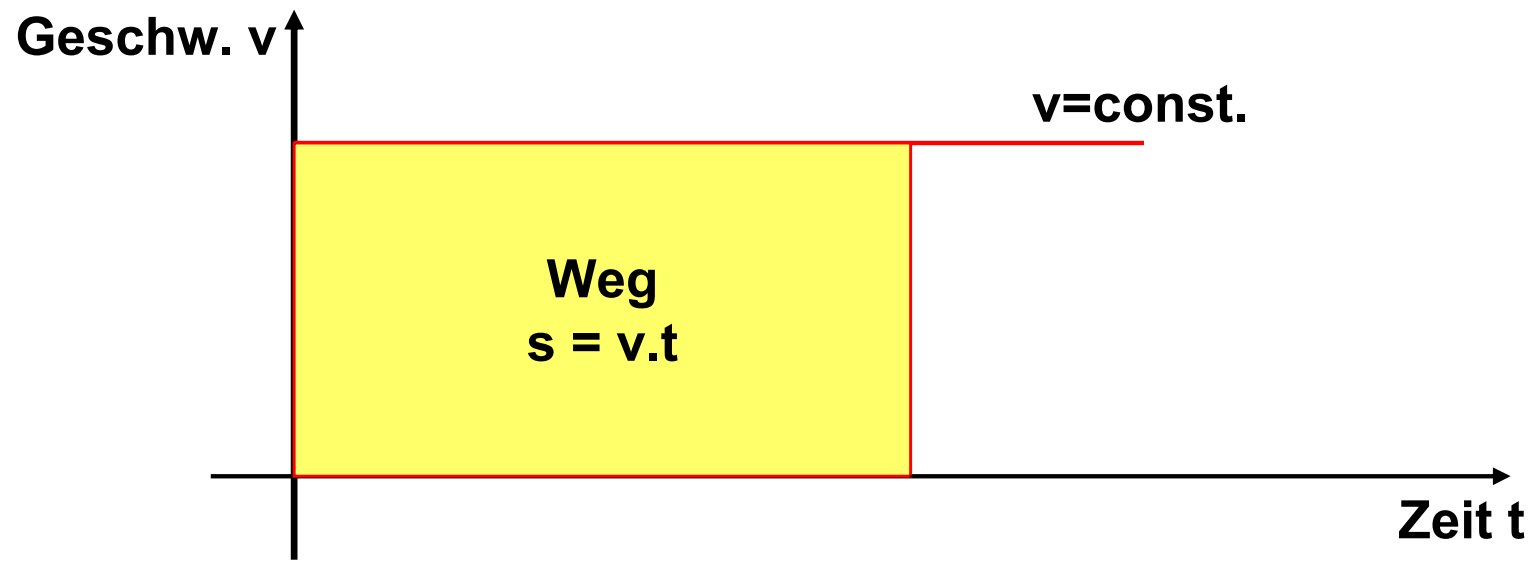
„Verwandte“ des Flächeninhalts $\Leftrightarrow$ Modellcharakter von Formeln

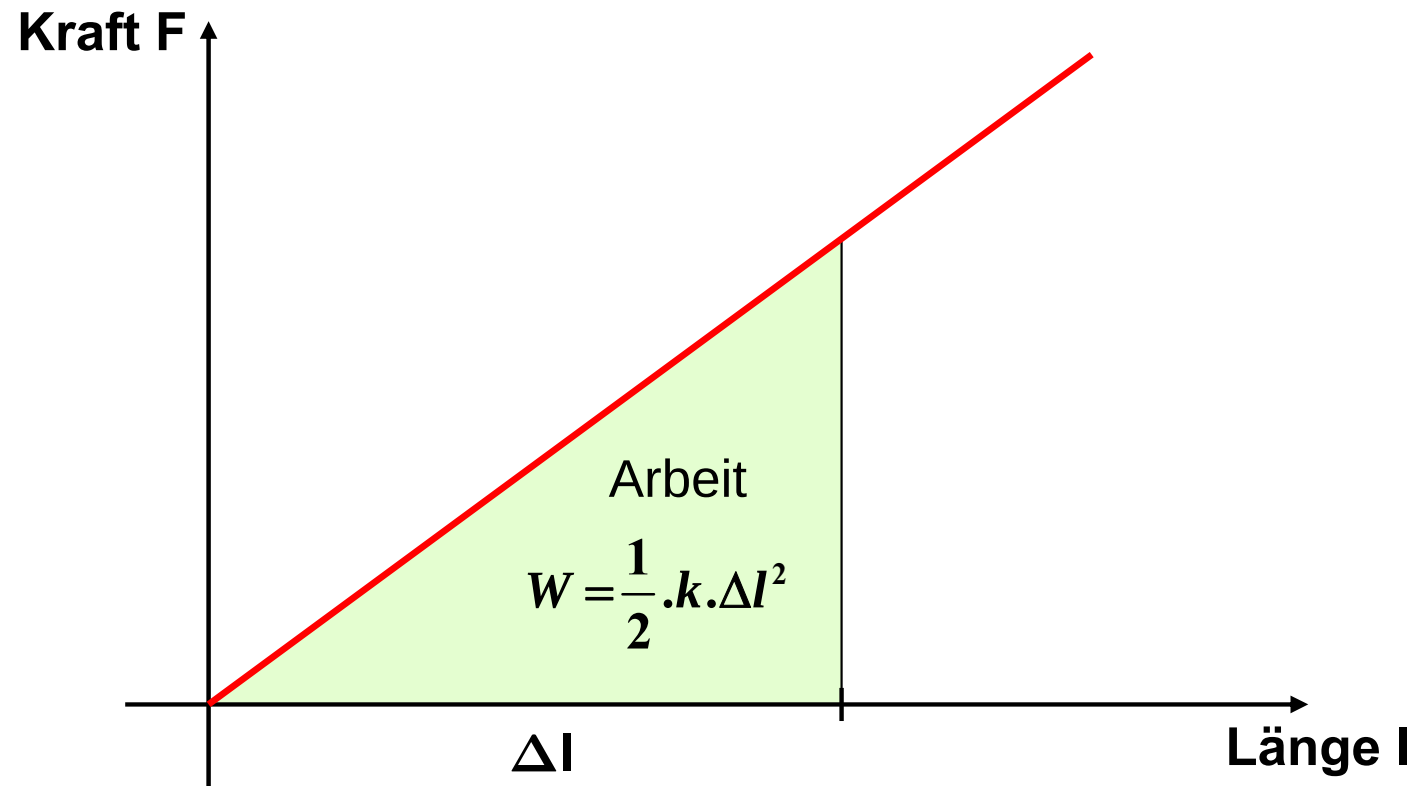


5. Klasse und/oder 6. Klasse Physik

Verwandte physikalische Formeln

- **Arbeit ist Kraft mal Weg**
- **Weg ist Geschwindigkeit mal Zeit**





„Expander“ – es gilt das Hooksche Gesetz:
Die Kraft ist proportional der Längenänderung

$$F = k \cdot \Delta l$$

6. Klasse Physik Arbeit im Gravitationsfeld



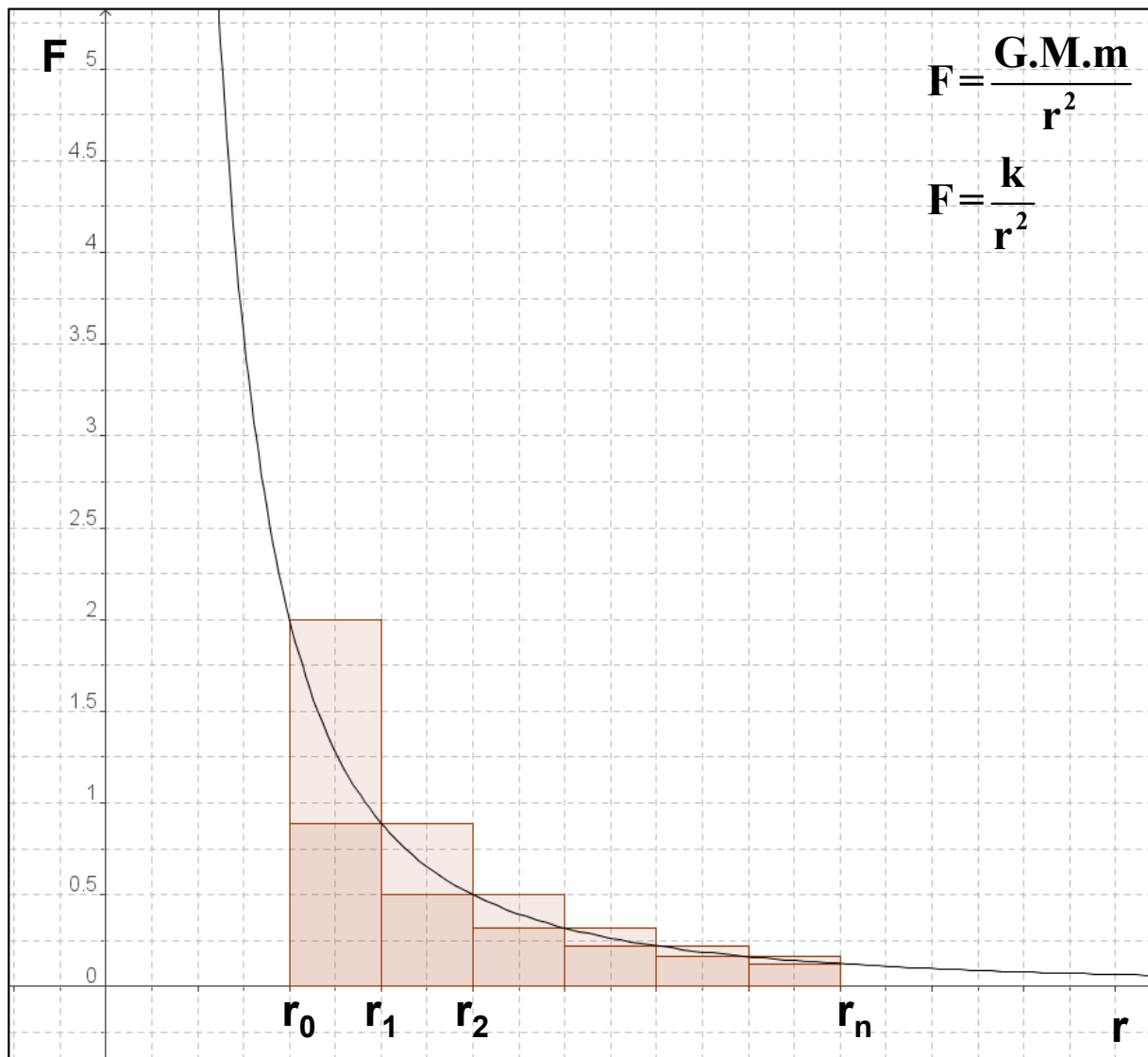
Wie groß ist die Arbeit um eine Rakete der Masse m von der Erdoberfläche r_0 auf eine Umlaufbahn r zu bringen?

Die Masse der Erde sei M

Gravitationsgesetz:

$$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$$

$$F = \frac{k}{r^2}$$



Arbeit im Gravitationsfeld

Arbeit = Kraft x Weg

⇔ **Flächeninhalt unter der „Kraftkurve“**

$$W_{grav} = G.M.m.\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

$$W = \frac{k}{r_0^2} \cdot (r_1 - r_0) + \frac{k}{r_1^2} \cdot (r_2 - r_1) + \frac{k}{r_2^2} \cdot (r_3 - r_2) + \dots + \frac{k}{r_{n-1}^2} \cdot (r_n - r_{n-1})$$

$$W_0 = \frac{k}{r_0^2} \cdot (r_1 - r_0) + \frac{k}{r_1^2} \cdot (r_2 - r_1) + \frac{k}{r_2^2} \cdot (r_3 - r_2) + \dots + \frac{k}{r_{n-1}^2} \cdot (r_n - r_{n-1})$$

$$W_u = \frac{k}{r_1^2} \cdot (r_1 - r_0) + \frac{k}{r_2^2} \cdot (r_2 - r_1) + \frac{k}{r_3^2} \cdot (r_3 - r_2) + \dots + \frac{k}{r_n^2} \cdot (r_n - r_{n-1})$$

$$W_o = \frac{k}{r_0^2} \cdot (r_1 - r_0) + \frac{k}{r_1^2} \cdot (r_2 - r_1) + \frac{k}{r_2^2} \cdot (r_3 - r_2) + \dots + \frac{k}{r_{n-1}^2} \cdot (r_n - r_{n-1})$$

$$W_{\text{komp}} = \frac{k}{r_0 \cdot r_1} \cdot (r_1 - r_0) + \frac{k}{r_1 \cdot r_2} \cdot (r_2 - r_1) + \frac{k}{r_2 \cdot r_3} \cdot (r_3 - r_2) + \dots + \frac{k}{r_{n-1} \cdot r_n} \cdot (r_n - r_{n-1})$$

$$W_{\text{komp}} = k \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \dots - \frac{1}{r_{n-1}} + \frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n} \right)$$

$$W_{\text{komp}} = k \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_n} \right)$$



$$W_{\text{grav}} = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

2. – 8. Klasse: „Nähert sich beliebig“ - Grenzwert



7. Klasse Mathematik:

- **Differenzenquotient - Differentialquotient**

8. Klasse Mathematik:

- **Bestimmtes – unbestimmtes Integral**

A4 ⇔ Argumentieren und Begründen

➤ Deduktive Schlusskompetenz

Beispiel:

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_a^b x^2 dx$$

unter Nutzung der Definition des Integrals. Verwende z. B. die Idee der "Mittelsummen"

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i = -2 + \frac{6}{n} \cdot i$$

$$\xi_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \frac{1}{2} \left[a + \frac{b-a}{n} \cdot (i-1) + a + \frac{b-a}{n} \cdot i \right] =$$

$$\dots = \dots = \frac{-2n + 6i - 3}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot f(\xi_i) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{6}{n} \cdot \frac{(-2n + 6i - 3)^2}{n^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{6}{n} \cdot \frac{4n^2 + 36i^2 + 9 - 24ni + 12n - 36i}{n^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{24n^2 + 216i^2 + 54 - 144ni + 72n - 216i}{n^3} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24n^3 + 36n \cdot (n+1)(2n+1) + 54n - 144n \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 72n^2 + 36 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}}{n^3} =$$

$$= 24 + 72 - 144 \cdot \frac{1}{2} = 24 E^2$$

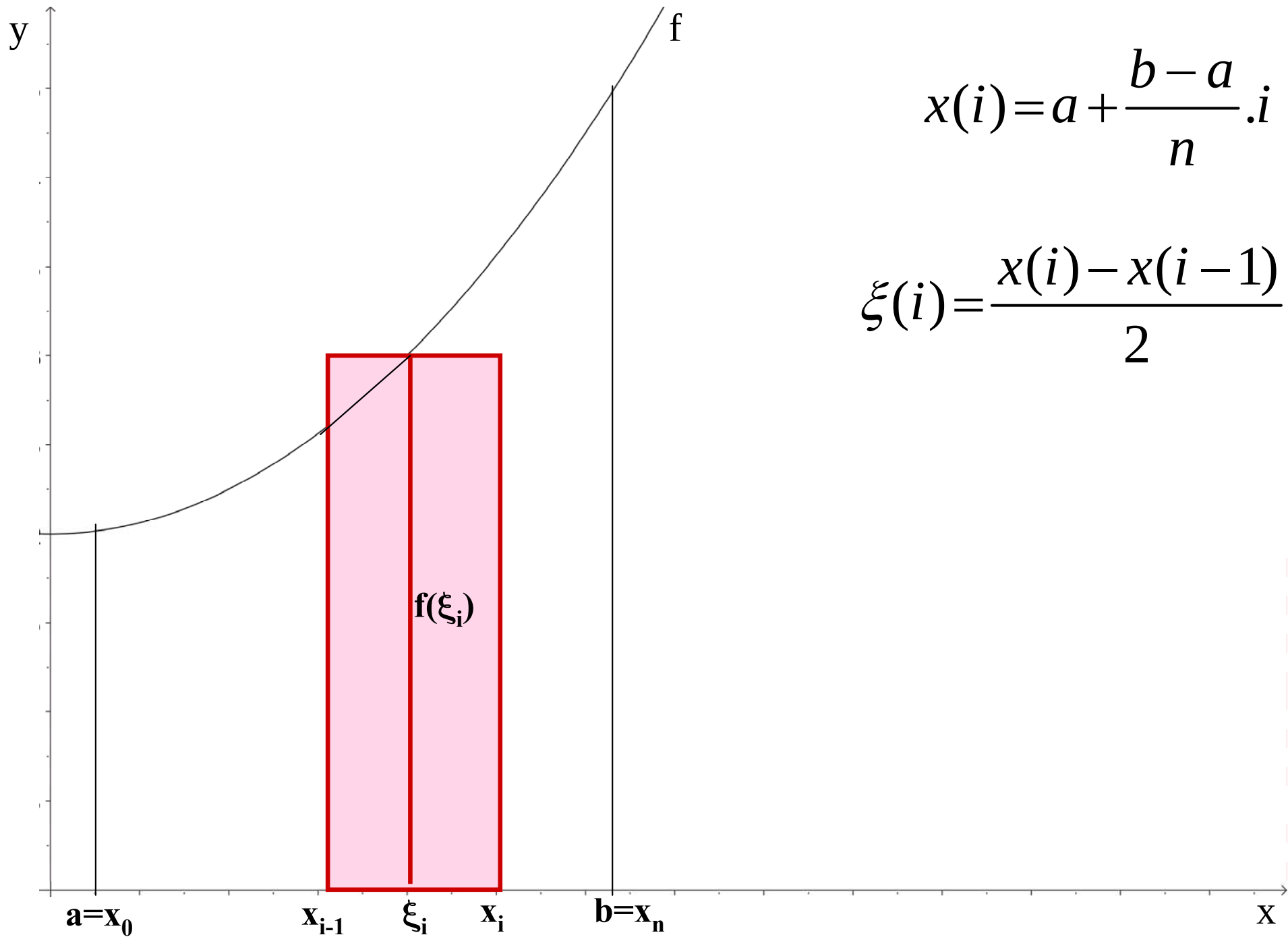
$$\text{PROBE } \int_{-2}^4 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-2}^4 = \frac{72}{3} = 24 E^2$$

VERWENDETE FORMEL

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Mittelsummen



Ober- und Untersumme mt Hilfe der Technologie berechnen können

F1	F2 Algebra	F3 Calc	F4 Other	F5 PrgmIO	F6 Clean Up	
■ $a + \frac{b-a}{n} \cdot i \rightarrow x(i)$ ■ $1/2 \cdot (x(i-1) + x(i)) \rightarrow \xi(i)$ ■ $x^2 \rightarrow f(x)$ ■ $f(\xi(i))$ Done Done Done $\frac{(a \cdot (2 \cdot i - 2 \cdot n - 1) - b \cdot (2 \cdot i - 1))^2}{4 \cdot n^2}$						
f(ξ(i))						
MAIN		RAD AUTO		FUNC 4/30		

Ober- und Untersumme mit Hilfe der Technologie berechnen können

F1	F2	F3	F4	F5	F6	
	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	

■ $f(\xi(i))$

$$\frac{(a \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot n - 1) - b \cdot (2 \cdot 1 - 1))}{4 \cdot n^2}$$

■ $\sum_{i=1}^n \left(\frac{b-a}{n} \cdot f(\xi(i)) \right)$

$$\frac{-(a-b) \cdot (a^2 \cdot (4 \cdot n^2 - 1) + 2 \cdot a \cdot b \cdot (2 \cdot n^2 + 1))}{12 \cdot n^2}$$

$\Sigma((b-a)/n * f(\xi(i)), i, 1, n)$

MAIN
RAD AUTO
FUNC 5/30

Ober- und Untersumme mit Hilfe der Technologie berechnen können

F1	F2	F3	F4	F5	F6	
	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{b-a}{n} \cdot f(\xi(i)) \right)$

$$\frac{-(a-b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)}{3}$$

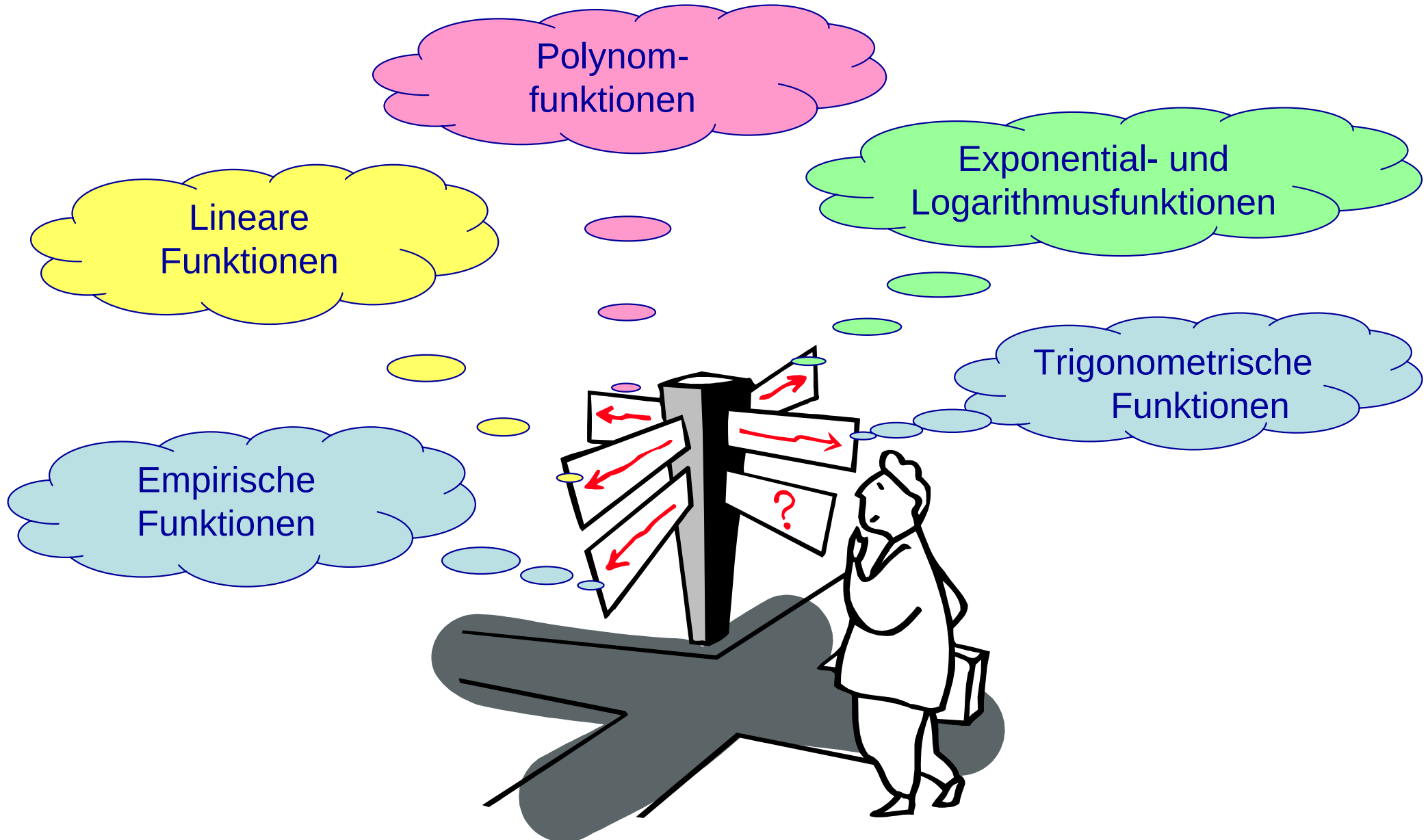
■ $\text{expand} \left(\frac{-(a-b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)}{3} \right) \quad \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

... $\text{pand}(-(a-b) * (a^2 + a * b + b^2) / 3)$

MAIN
RAD AUTO
FUNC 7/30

Längsschnitt 2:

Funktionen von der 1. bis zur 8. Klasse

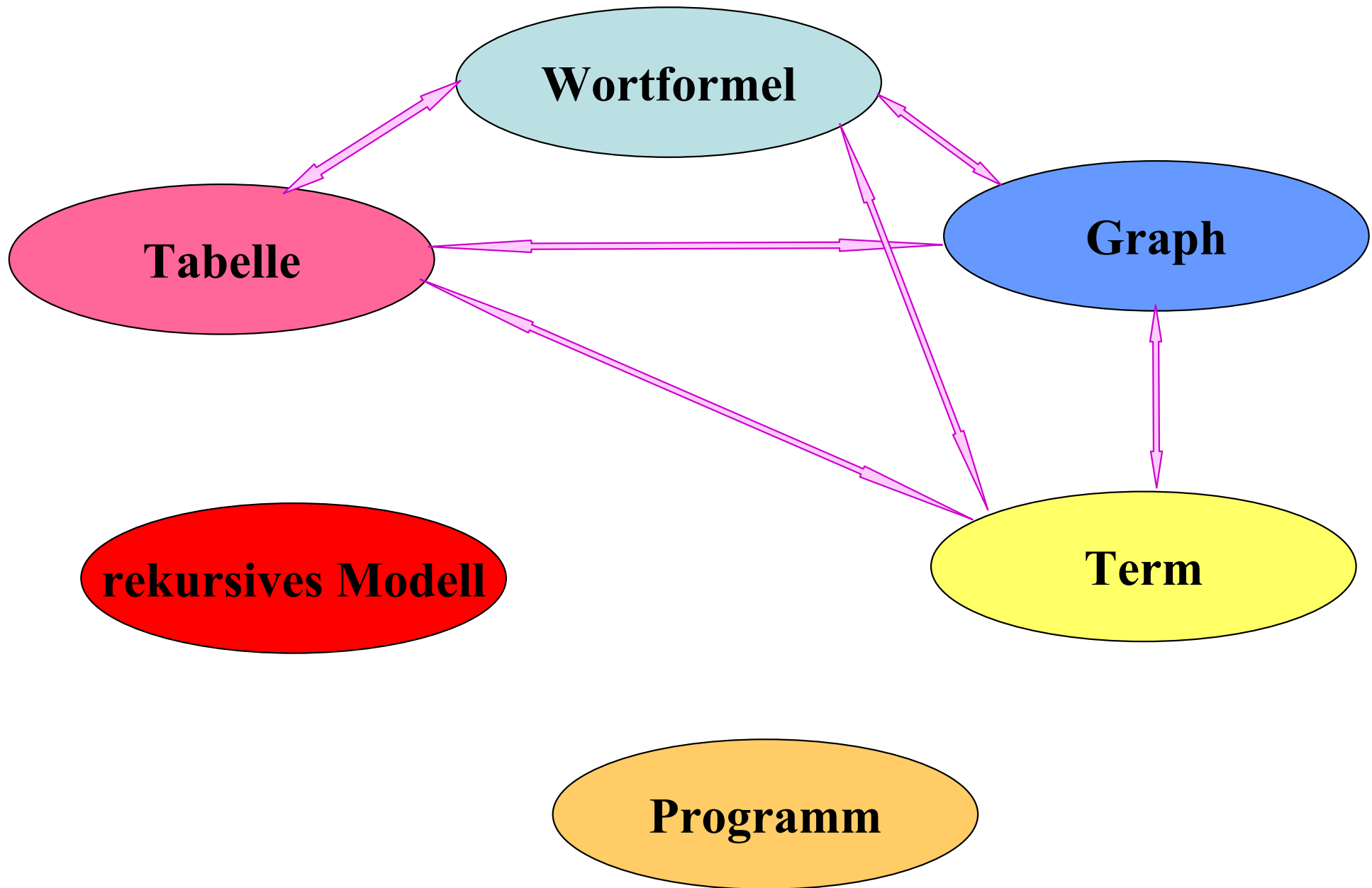


Funktionenlernen „an Prototypen“

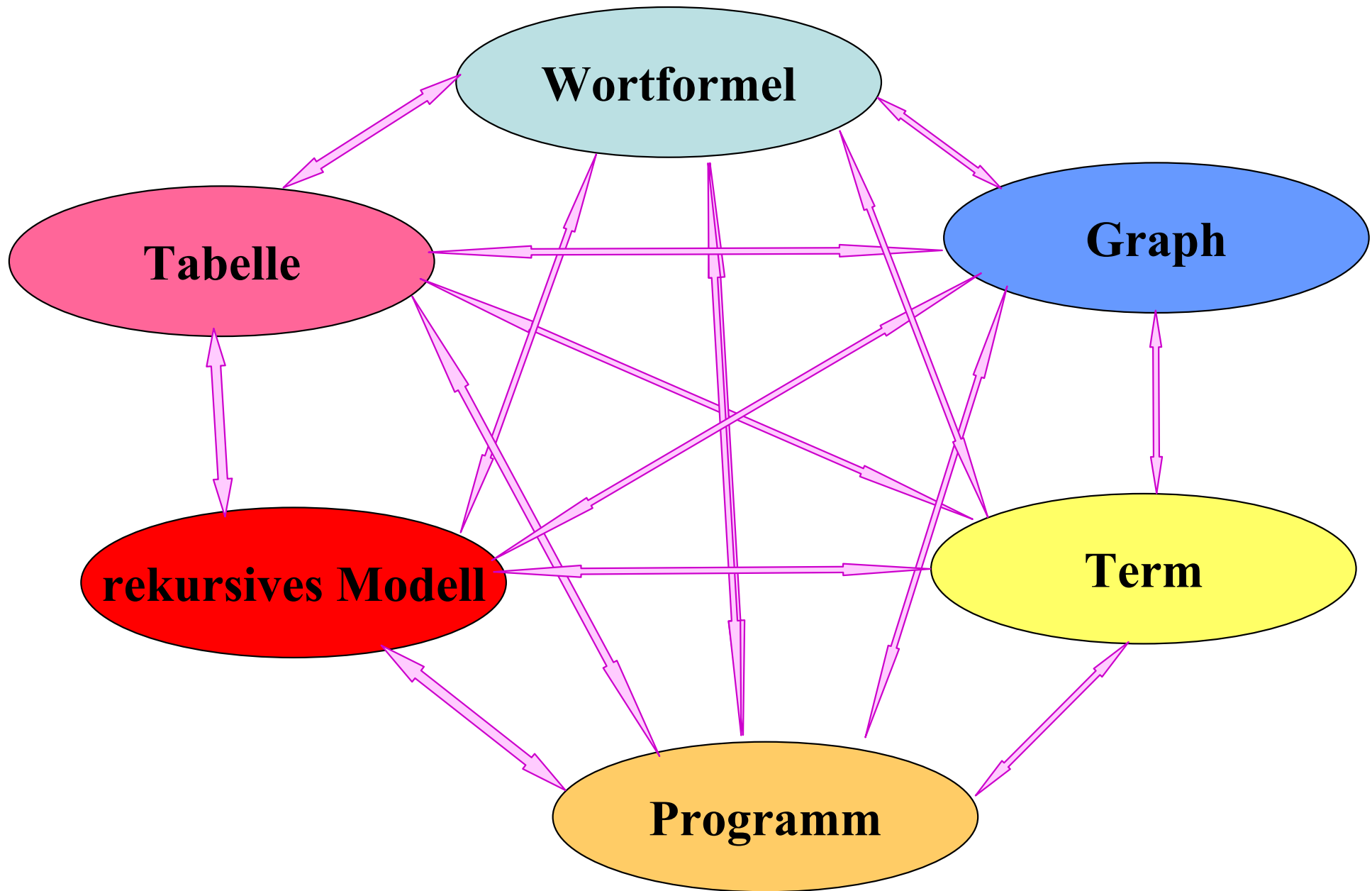
Der Computer als Medium für Prototypen:

Allgemeinbegriffe werden mittels prototypischer Repräsentanten kognitiv verfügbar gemacht. Der Computer bietet nicht nur eine größere Vielfalt an Prototypen an, sondern insbesondere auch solche, die ohne ihn nicht verfügbar wären.

[W. Dörfler, 1991]



Prototypen von Funktionen



Teilausschnitt zu Längsschnitt 2: Wachstumsprozesse von der 3. bis zur 8. Klasse

Rechnen mit Potenzen
Grundregel II

Rekursive
Wachstumsmodelle

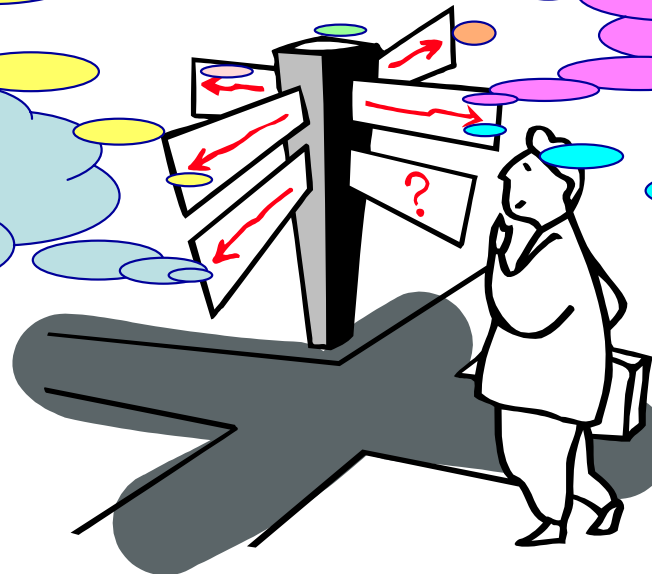
Grundregel III
Übergang von
diskreten zu
kontinuierlichen
Modellen

Prozentualer
Wachstumsfaktor

Termdarstellung reeller
Wachstumsprozesse

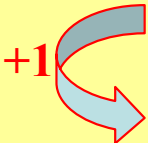
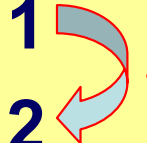
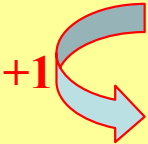
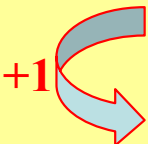
Wachstumsfaktor 2
Grundregel I

Differential-
gleichungen



Beispiel 1:

Wachstum einer Pflanze

Tag	Fläche in dm ²
 1. 2.	 1 2
3.	4
 4. 5.	 8 16
6.	32
7.	64
8.	128
 9. 10.	 256 512
11.	1024
....	????

Wachstum einer Pflanze

Tag	Fläche in dm^2
1.	1
2.	2
3.	4
4.	8
5.	16
6.	32
7.	64
8.	128
9.	256
10.	512
11.	1024
....	????

The diagram illustrates the growth of a plant over 11 days. The left column shows the day number (1 to 11) and the right column shows the area in dm^2 (1 to 1024). The area doubles every day. Red arrows indicate the growth factor: +3 for the first two days and .8 for the subsequent days.

Grundregeln des exponentiellen Wachstums

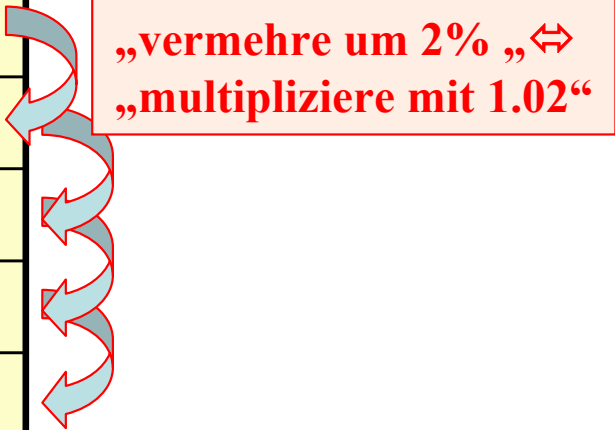
Grundregel I:

Zu gleichen Zeiten gehört der gleiche
Wachstumsfaktor (bzw. Abnahmefaktor)

Deutsch	Mathematik
„so erhält man“	=
„das Dreifache von“	•3
„p% von “	•p/100
„vermehre um p%“	•(1+p/100)

Beispiel: Julia legt am Anfang eines Jahres 100 Euro auf ein Sparbuch zu einem Zinssatz von 2%. Wieviel Geld kann sie nach 10 Jahren erwarten?

Zeitpunkt	Geldbetrag
Anfang 2006	100
2007	102
2008	104,04
2009	106,12
2010	108,24
2011	110,41
2012	112,62
	...
...	...
...	...
2016	121,90



„vermehre um 2% „⇔“
„multipliziere mit 1.02“

Beispiel (3): Von einer radioaktiven Substanz zerfallen stündlich 3%.
 Nach welcher Zeit bei einer Ausgangsmenge von $m_0 = 200$ mg
 nur mehr die Hälfte vorhanden (Halbwertszeit)?

Zeitpunkt	Substanzmenge
Montag, 10 ^h	200 mg
11 ^h	194
12 ^h	188,2
13 ^h	182,5
14 ^h	177,1
15 ^h	171,7
16 ^h	166,5
...	...
...	...
...	...
Dienstag, 8 ^h	102,3
9 ^h	99,3

„vermindere um 3% „ $\Leftrightarrow$ “
 „multipliziere mit 0,97“

Modellbilden ⇔

Übersetzung von der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik

Problem: Schuldentilgung durch Ratenzahlung

Übersetzung Phase 1: Wortformel
„was passiert jedes Jahr?“

**Das Kapital wird verzinst
und die Rate wird abgezogen**

Übersetzung Phase 2: Mathem. Sprache
Rekursives Modell

$$K_{\text{neu}} = K_{\text{alt}} \cdot (1 + p/100) - R$$

Beispiel: Herr Maier nimmt einen Kredit von 10000 Euro zu 6% auf und zahlt jeweils am Ende des Jahres 1200 Euro zurück (ganzjährige Kapitalisierung):
Nach wieviel Jahren hat Herr Maier den Kredit zurückgezahlt?

Zeitpunkt	Geldbetrag
Anfang 2006	10.000,00
2007	9.400,00
2008	8764,00
2009	8.089,80
2010	7.375,2
2011	6.617,70
2012	5.814,80
...	...
...	...
2017	1.017
2018	-122

„Verzinsung – minus Rate“ $\Leftrightarrow$
„multipliziere mit 1.06 und
subtrahiere 1200“

Beispiel: Sterile Insektentechnik (SIT)

Eine Insektenpopulation mit anfangs u_0 Weibchen und u_0 Männchen möge bei natürlichem Wachstum pro Generation jeweils auf das r -fache anwachsen. Zur Bekämpfung der Population wird pro Generation eine bestimmte Anzahl s von sterilen Männchen freigesetzt, die sich mit der Naturpopulation völlig vermischt. Modellannahme $u_0=1$ Million, $r=3$.

Siehe computerunterstütztes Unterrichtskonzept

Sterile Insektentechnil S.I.T.

F1 F2 F3 F4 F5 F6

▲PLOTS

$$u1 = \frac{r \cdot (u1(n-1))^2}{u1(n-1) + s} \quad | \quad r = 3 \text{ and } s = 4$$

$$u11 = 1.8$$

$$u2 = \frac{r \cdot (u2(n-1))^2}{u2(n-1) + s} \quad | \quad r = 3 \text{ and } s = 4$$

$$u12 = 2.2$$

$$u3 = \frac{r \cdot (u3(n-1))^2}{u3(n-1) + s}$$

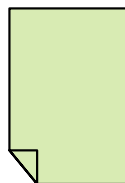
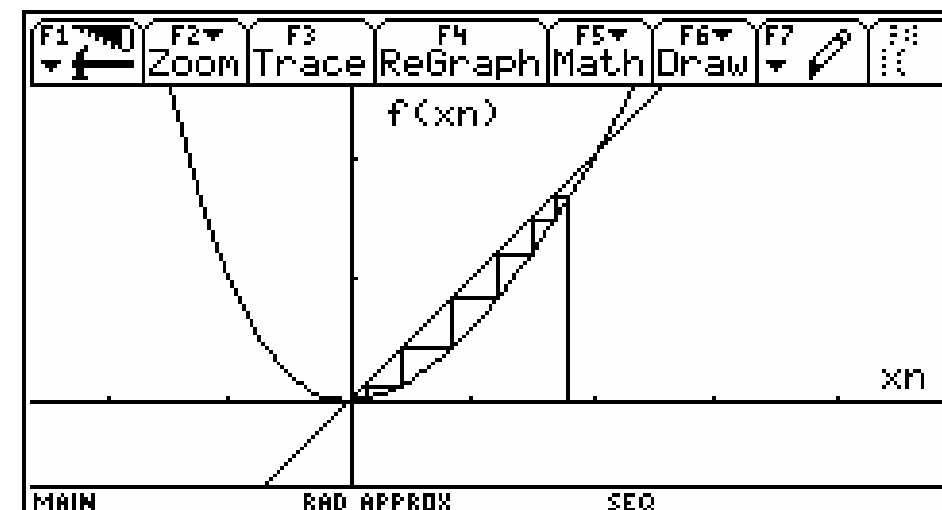
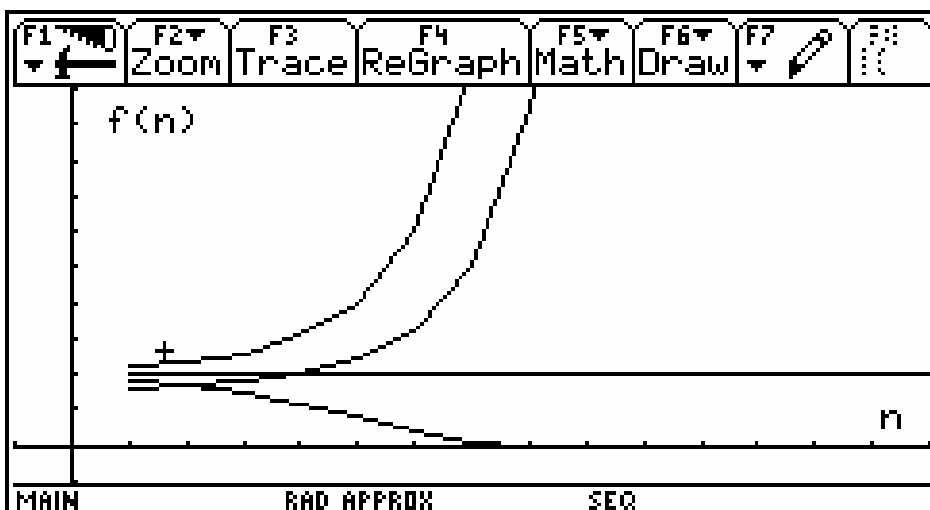
$$u1(n) = r \cdot (u1(n-1))^2 / (u1(n-1) + s)$$

MAIN RAD APPROX SEQ

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7

n	u1	u2	u3	u4
0.	undef	undef	undef	undef
1.	1.8	2.2	1.6	2.
2.	1.6759	2.3419	1.6696	2.
3.	1.4845	2.5945	1.7908	2.
4.	1.2054	3.0622	2.0082	2.
5.	.83736	3.9834	2.4158	2.
6.	.43484	5.9628	3.2329	2.
7.	.12791	10.706	5.0305	2.

n=0.
 MAIN RAD APPROX SEQ



Grundregeln des exponentiellen Wachstums

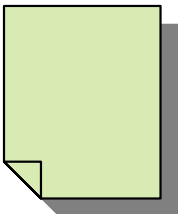
Grundregel I:

Zu gleichen Zeiten gehört der gleiche
Wachstumsfaktor (bzw. Abnahmefaktor)

1. Standpunktsverlagerung

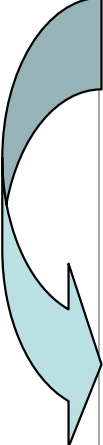
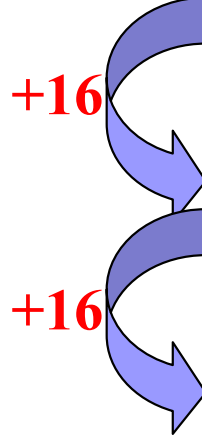
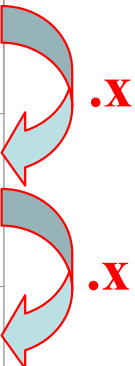
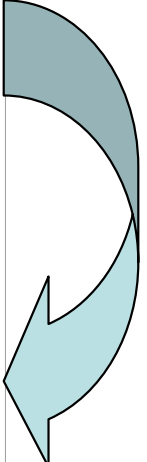
Grundregel II:

Zur n -fachen Zeit gehört die n -te Potenz
des Wachstumsfaktors



Beispiel (5): Verdopplungszeit der Erdbevölkerung 32 Jahre

Wieviele Menschen nach der Hälfte der Zeit?

		Jahr	Bevölk.zahl		
		1972	3,8 Mrd		
		1988	??		
		2004	7,6 Mrd		

Gesucht: Wachstumsfaktor x, so dass $x \cdot x = 2$

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Grundregeln des exponentiellen Wachstums

Grundregel I:

Zu gleichen Zeiten gehört der gleiche
Wachstumsfaktor (bzw. Abnahmefaktor)

1. Standpunktsverlagerung

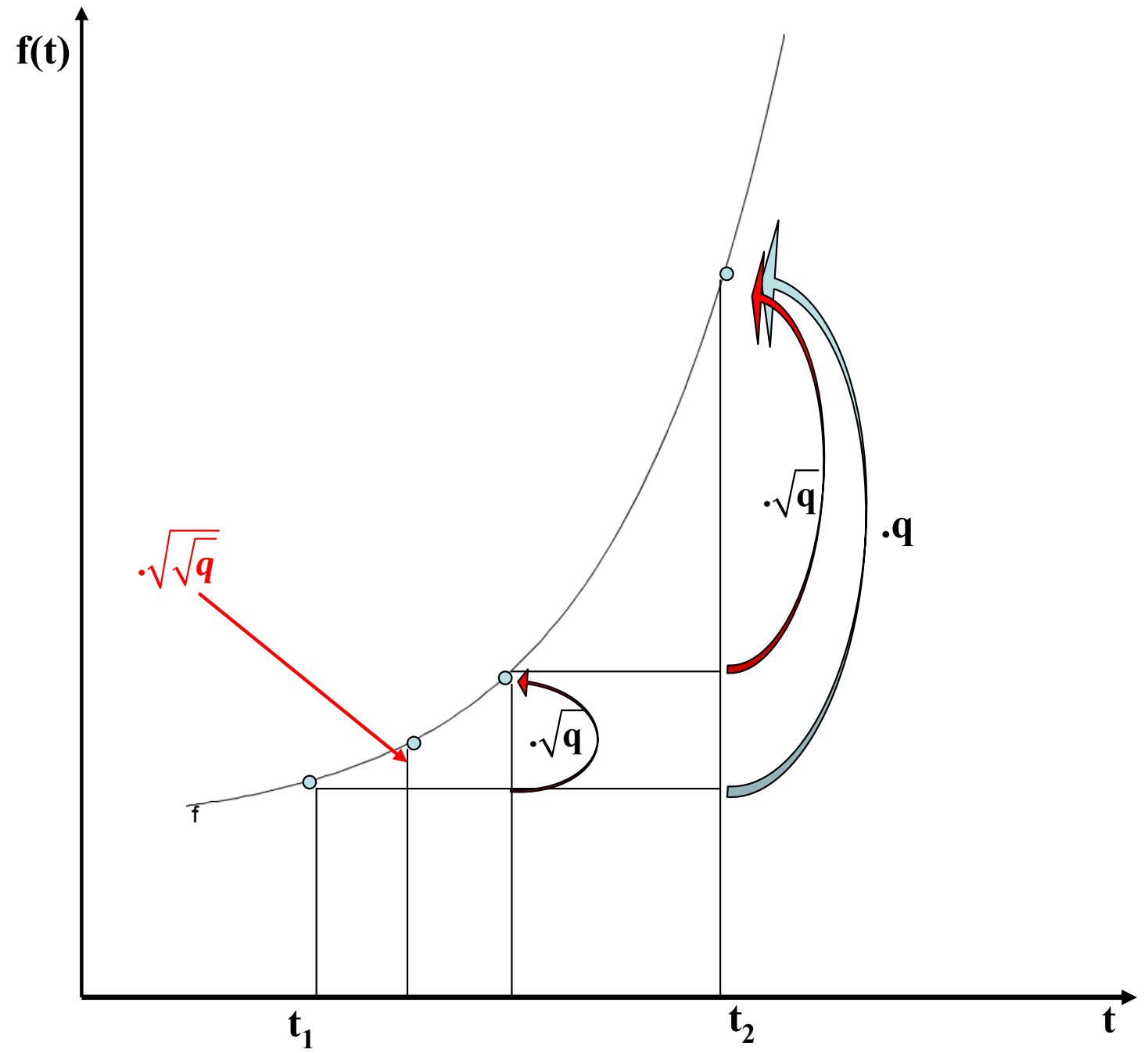
Grundregel II:

Zur n -fachen Zeit gehört die n -te Potenz
des Wachstumsfaktors

2. Standpunktsverlagerung

Grundregel III:

Zur halben Zeit gehört die Quadratwurzel
des Wachstumsfaktors

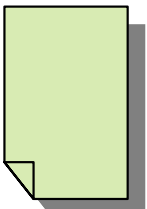


Folgerung:

Sind 2 Punkte mit voneinander verschiedenen positiven Funktionswerten gegeben, so gehört dazu genau eine Wachstumsfunktion, die für alle Zeitpunkte definiert ist. Diese nimmt alle positiven Werte an.

Oder allgemeiner:

Durch 2 Punkte der oberen Halbebene, die auf keiner Parallelen zu den Achsen liegen, geht genau eine Wachstumsfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Diese ist bijektiv.



6. Klasse

3. Standpunktsverlagerung

Grundregel IV:

Für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt:

Zur r -fachen Zeit gehört die r -te Potenz
des Wachstumsfaktors

Definition:

Reelle Funktionen mit einer Zuordnungsvorschrift der Gestalt

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid x \rightarrow c \cdot a^x \quad (a \in \mathbb{R}^+)$$

heissen Exponentialfunktionen

