2. Wie hat der Einsatz von CAS den Mathematikunterricht verändert?

Gruppe: Heiko Knechtel, Gerhard Pachler, Ingrid Schirmer-Sanef, Hildegard Urban-Woldron

2.1. Inhaltlich:

Die Tätigkeitsbereiche verlagern sich vom reinen Operieren zum Interpretieren, Begründen und Argumentieren. Das CAS nimmt dem Schüler viele Tätigkeiten beim Operieren ab; der Schüler muss aber die Ergebnisse des Operierens interpretieren – sowohl innermathematisch als auch von der Anwendungssituation aus. Auch die heuristische Phase des Mathematiklernens wird besonders gefördert; es entstehen neue Arbeitsformen wie Experimentieren und Testen. Das CAS nimmt dem Schüler in der exaktifizierenden Phase die Rechenarbeit ab und dieser kann sich auf das eigentliche Problem konzentrieren.
Die Auswertung dieser nun in größerer Anzahl möglichen experimentellen Zugänge kann auf mehrere Arten erfolgen: numerisch, grafisch oder symbolisch. Bei numerischen Approximationen kann der Schüler bewusst die Genauigkeit steuern. Der Schüler muss auch lernen kompetent aus einem vorhandenen umfangreichen Datenmaterial auszuwählen, die passenden Werkzeuge in der Toll-Box aufzufinden und geeignete Problemlösestrategien zu entwickeln.
Eine Vision von zukünftigem Mathematikunterricht wäre ein verstärktes fächerübergreifendes und fächerverbindendes Lernen.

2.2. Organisatorisch:

Hier bilden sich neue Formen der Dokumentation schriftlicher Arbeiten heraus. Es stellt sich die Frage, wie weit eine qualitative Skizze einer genauen Zeichnung Platz machen soll, wie die Problemlösung dokumentiert und präsentiert wird und wie der Lehrer die einzelnen Kompetenzen gewichtet und damit schließlich bewertet. Für die notwendigen neuen Prüfungsformen müssen neue Zeitfenster möglich gemacht werden und es müssen neue Richtlinien geschaffen werden, die einen offeneren Unterricht fordern und diese neuen herauszubildenden Kompetenzen fördern. Der Schüler muss auch lernen den Arbeitsumfang einer Aufgabe abzuschätzen und die erforderliche Genauigkeit auszuwählen. Wenn fächerübergreifendes und fächerverbindendes Lernen nicht nur eine Vision bleiben soll ist eine Auflösung des starren Stundenschemas und die Einführung von Projekttagen eine Notwendigkeit.

2.3. Offene Fragen, Schwierigkeiten und Gefahren:

- **Schnittstelle Uni:**
  Die erworbenen „neuen“ Kompetenzen und Fertigkeiten, sowie Kenntnisse im Handling von Computeralgebrasystemen sind derzeit an den Hochschulen noch kaum gefragt. Im Gegensatz dazu werden aber gerade die in den AHS teilweise schon durch neue Wege ersetzten traditionellen Methoden in den ersten Semestern an den Unis verstärkt geprüft.

- **„Vermarktung“:**
  Hier ist vor allem der Kontakt zu KollegInnen gemeint. Es ist im Schulalltag schwierig, die neu gewonnenen Erfahrungen anderen zu vermitteln. Neue Wege zu gehen bedeutet vor allem zu Beginn erhöhten Arbeitsaufwand und mehr Offenheit und wird daher von einigen der FachkollegInnen abgelehnt. Vor allem bei gemeinsamen Prüfungen, wie bei der Matura zeigt sich dann, dass z.B. Fehler im Formalismus von den „Traditionalisten“ überbewertet, jedoch neue Themenschwerpunkte – die durch CAS-Rechner erst möglich werden – kaum oder gar nicht registriert werden. Handlingfertigkeiten werden als selbstverständliche Basis und notwendige Abschätzungen, die eigentlich wirkliches Verständnis für Größenordnung und Problem einer Aufgabe zeigen, als unbedeutend eingestuft.

- **„Vereinsamung“:**
  Der Dialog mit den FachkollegInnen reduziert sich oft auf eine Bejahung bzw. Ablehnung der neuen Unterrichtsformen und –inhalte. Es sei denn, dass durch schulinterne Lehrerfortbildung neue Impulse gesetzt werden. Dadurch kommen Gespräche und Diskussionen verbunden mit dem Austausch an Informationen und Material zustande. Sehr wichtig erscheint daher ein vielfältiges Seminarangebot zu sein, da außer neuen Impulsen, Projektarbeit und dem Erfahrungsaustausch auch ein Treffen „Gleichgesinnter“ stattfindet. Ebenso sollten auch diesbezügliche Informationen an die Schulleitungen gehen, um eine notwendige Sensibilisierung für die Verschiebung von Inhalten und eine veränderte Schwerpunktsetzung zu erreichen.

- **Dichte des Unterrichts:**
  Engagierte LehrerInnen möchten möglichst viel in ihren Unterricht packen und sind daher selten mit dem Erreichten zufrieden. Ein dichter Unterricht mit wenig Muße ist oft die Folge. Einer der Gründe ist auch in den oben behandelten Punkten zu finden, denn das Vergleichbare sind die traditionellen Aufgaben und Fertigkeiten, aber gerade hier werden einige Schwerpunkte nicht mehr gesetzt. So muß dieser benötigte Freiraum durch Ersetzen von Altem gewonnen werden. Der Mut zur Lockerung - auch ohne langjährige Erfahrung mit dem, was bleiben, was ersetzt werden bzw. was ganz neu dazukommen soll – ist wichtig. Neue Strukturen werden sicher Hand in Hand mit den derzeit gewonnenen Erfahrungen die alten ersetzen.

- **Starre Strukturen:**
  Für manche neue Unterrichtsformen ist der starre Stundenplan und die Fächereinteilung eher hinderlich. Eine mögliche Flexibilisierung für Projekt- und fächerübergreifenden Unterricht eventuell auch im Team – wäre wünschenswert.

- **Kreativität:**
  Neue Unterrichtsmodelle zu erproben erfordert sehr viel Kreativität, was wiederum den Zeitaufwand steigert. Ohne entsprechende Lehrbücher bzw. Unterrichtsmaterialien ist es noch schwieriger ständig erfinderisch tätig zu sein. Die differenzierten Prüfungssituationen erfordern und ermöglichen auch andere, neue Arten von Fragestellungen. Die jetzt öfter vorkommenden sogenannten offenen Aufgaben implizieren auch eine Änderung in der Bewertung.

- **Schwerpunktsetzung:**
  Viel mehr als im traditionellen Unterricht muß die Auswahl der Beispiele und der Schwerpunkte überlegt werden. Die Interessen der SchülerInnen werden ebenso wie fächerübergreifende Aspekte und Möglichkeiten des CAS- Systems berücksichtigt. Bei der Leistungsbewertung ist nicht mehr nur die Lösung bzw. das Produkt im Vordergrund, sondern auch der Weg und oft die Begründung und die Auswahl desselben. Es verschieben sich also in vielerlei Hinsicht die Schwerpunkte und ein Gleichklang bei der Leistungsmessung wäre zu diskutieren.

- **Erwartungshorizont:**
  Bei verstärkt offen gestellten Aufgaben ist der Erwartungshorizont genau zu überlegen und auch im Beispiel selbst zu definieren. Andernfalls kann es zu Problemen bei weit über das Ziel hinaus bearbeiteten Aufgaben kommen. Möglich wären Bonuspunkte – aber ersetzen diese dann andere falsch gelöste Aufgaben und verstehen das MitschülerInnen und FachkollegInnen?

2.4. Rahmenbedingungen Niedersachsen - Niederösterreich

In **Niedersachsen** (NDS) werden die Bemühungen zur Einführung von CAS, DGS und GTR auf allen Ebenen aktiv und passiv gefördert:

- **Mathematikkommission**
  In NDS hat drei Jahre lang eine Expertenkommission Empfehlungen für einen zukünftigen Mathematikunterricht entwickelt. Folgen dieser Empfehlungen sind u.a. neue Fortbildungskonzepte., neue Richtlinien für die Abiturprüfung, Neuentwicklung von Rahmenrichtlinien. Für die Mitwirkung in Kommissionen wird in NDS häufig Unterrichtsstunden verlagert.

- **Verbindliche Fortbildung**
  Alle Kolleginnen und Kollegen der Fachgruppen Mathematik an den Gymnasien werden 4 Tage lang in ihren Schulen zum Thema neuen Unterrichtskultur beim Einsatz elektronischer Mathematikmedien fortgebildet. Dadurch wird erreicht, dass alle Kollegen sich in diesen Veranstaltungen itensiv mit den neuen Medien und deren Auswirkung auf MU auseinandersetzen.

- **Abiturprüfung**
  In den neuen Richtlinien für die Abiturprüfungen (EPA) sind ausdrücklich alle Rechnersysteme zugelassen. In der integrierten Beispielsammlung werden Prüfungsaufgaben unter Einsatz von GTR/CAS angegeben.
  Die Anzahl der zu bearbeitenden Aufgaben wurde auf zwei gesenkt, um den Prüflingen die Möglichkeit zu geben, ihre Arbeiten angemessen zu dokumentieren. Dies bezieht sich insbesondere auf die bei CAS/GTR-Einsatz deutlich umfangreicheren Texte zu Problemlösung.

- **Rahmenrichtlinien**
  Zur Zeit werden Richtlinien für die Klassen 7-10 entwickelt, die vorsehen, dass alle Schülerinnen und Schüler einen GTR zur Verfügung haben, alle Schulen CAS und DGS und Tabellenkalkulation für Unterricht (PC-Raum) zur Verfügung haben, in mehreren Unterrichtseinheiten CAS , DGS und Tabellenkalkulation eingesetzt werden soll.

In **Niederösterreich** werden die verschiedenen Projekte wie Einsatz von DERIVE, Einsatz von TI-92 im MU wissenschaftlich begleitet. Dabei werden die Teilnehmer aber nicht ganz oder partiell vom Unterricht freigestellt. Hier wird überwiegend durch das persönliche Engagement der Beteiligten die Sache gefördert. Bei der Planung von Prüfungsarbeiten werden in Österreich aber bereits Modelle benutzt, die den Ansprüchen an eine Arbeit mit stärkerer Problemorientierung besser gerecht werden. Hier ist dasd Zeitfenster flexibel unter Beachtung eines Gesamtkontingentes für Prüfungen gestaltbar. So können neben längeren Arbeiten quasi als Ausgleich entsprechende Kurzarbeiten geschrieben werden. Dieses System hat man z.Z. in den unteren Klassen eingeführt.

2.5. Neue Modelle zur Leistungsbeurteilung unter Verwendung des TI92

(Plenumsvortrag : Ingrid Schirmer-Sanef)

Themenbereich	
Neue Formen der schriftlichen Prüfungssituationen	
Inhalte	Ziele
• Konzept für die 5. Klasse[1] • 1. Schularbeit - Rechenfertigkeiten • 2. Schularbeit - Problemlösearbeit • Gedanken zur 2. Schularbeit • Referats-, Facharbeitsliste • 3. Schularbeit - Fragen zu den Facharbeiten	• Fächerübergreifende Wissensschwerpunkte setzen und vernetzen • Anpassung der Schularbeiten an die verschiedenen Aspekte der mathematischen Fertigkeiten • Förderung der eigenständigen Arbeit • Förderung von Fertigkeiten wie Interpretieren und Begründen
Die ausgearbeiteten Schularbeitsaufgaben - *Überprüfung von Rechenfertigkeiten (Vorschlag für das 2. Semester: Überprüfung von Handlingfertigkeiten bez. TI92), Überprüfung der Problemlösekompetenz und Überprüfung des Wissens, das durch Facharbeiten und Referate vermittelt wurde* **- beinhalten neue Konzepte der Leistungsfeststellung und -beurteilung, die auf die veränderte Unterrichtssituation reagieren.**	

[1] Die Angaben beziehen sich auf das Schulsystem in Österreich

2.6. Konzept für die 5. Klasse (Österreich) / RG / BG u. BRG Berndorf

A) SCHRIFTLICHE ARBEITEN:
Die klassische Schularbeit wird durch andere, neue Formen ersetzt bzw. bereichert. In der 5. Klasse / RG gibt es traditionell 6 Schularbeiten à 50min. Diese werden durch je 3 verschiedenartige schriftliche Arbeiten pro Semester ersetzt. Zu Beginn jedes Semesters gibt es eine 30 minütige Schularbeit, bei der entweder Rechenfertigkeiten (eher 1. Sem.) oder Handlingfertigkeiten (eher 2. Sem.) bezüglich TI92 überprüft werden. Die zweite Schularbeit ist eine Problemlösearbeit, die 100 Minuten erfordert und bei der alle von den SchülerInnen ausgewählten Medien verwendet werden dürfen. Weiters gibt es einen 20- minütigen Test pro Semester, bei dem eine Überprüfung des Fachwissens, das in Referaten oder „Facharbeiten" zuvor geboten wurde, überprüft wird. (evt. auch als multiple - choice - Test denkbar)

B) „FACHARBEITEN", REFERATE, EIGENSTÄNDIGE ARBEITEN
Alle SchülerInnen bekommen einmal im Jahr ein Thema für eine „Facharbeit", das sie aus einer Liste, die zu Beginn des Jahres aufgelegt wird, auswählen können.

Dabei gibt es 2 Themenschwerpunkte:
1) fächerübergreifend mit Physik:

bevorzugt Schülerexperimente mit CBR oder Experimente aus der klassischen Schülerversuchssammlung etc. (fachverbindend zu Mathematik im Bereich: Bewegungsaufgaben, Statistik, Anwendung von Funktionen etc.) Exkursion nach Teesdorf (ÖAMTC) - Berechnungen: Bremsweg, Anhalteweg, Überholvorgang etc.

2) angewandte Mathematik: Projekt mit Sparkasse Pottenstein

Es ist vereinbart, dass zu Beginn des Schuljahres eine Exkursion zur Sparkasse Pottenstein stattfindet, bei der die Schüler Gebäude, Funktion und Aufgabe des Institutes kennenlernen. (mit Vortrag von Dir. Mag. Leithner) Weiter kommen Vortragende der Sparkasse in die Schule, um kleinere Referate zu halten und Fragen zu beantworten (Kennenlernen der Leute, erste Kontakte mit Internet - Banking, Leasing etc.)

Die SchülerInnen bekommen auch Einladungen zu Expertenvorträgen, Investmentclubabenden und Betriebsbesichtigungen (z.B. Juni 99 - Austria Tabak) zugesandt.
Weiter steht jedem/r Schüler/in ein/e Betreuer/in der Sparkasse zur Verfügung, wenn er/sie sich für ein Referatsthema aus dem Bereich Wirtschaftsmathematik entschieden hat. Dafür habe ich bereits einen Zeitrahmen von 1,5 bis 2 Stunden mit Dir. Leithner vereinbart.
Ebenso können die Schüler/innen Einsicht in Programme und Daten der Bank nehmen.
(z.B. Leasingmodelle für einzelne Autotypen, Pensionsvorsorgemodelle, statistische Unterlagen für Lebensversicherungen, Finanzcheck, etc.)

Die „<u>Facharbeit</u>“ setzt sich zusammen aus:

- Wählen eines Themas aus der zu Beginn des Jahres vorgegebenen Liste, wobei die Referate gleichmäßig auf das gesamte Schuljahr aufgeteilt werden.
- Eigenständiges Suchen von Unterlagen, Material; Ausarbeitung und Vorlage des Skripts, das von mir vor dem Referat kontrolliert wird.
- Abhalten eines Referates und Verteilen einer kurzen Zusammenfassung an die KlassenkollegInnen
- Test für alle mit jeweils einer kurzen Frage aus jeder „Facharbeit“

  Das Referat und die Zusammenfassung sind Bestandteil der mündlichen Mitarbeitsnote. Dazu passende Beispiele werden in Schul- und Hausübung gegeben.

C) FORMELSAMMLUNG, WEITERE HILFSMITTEL

Im ersten Semester möchte ich bei der Anlage einer Formelsammlung (Heft und/oder TI92) gezielt eingreifen, später jedoch zu eigenständiger Arbeit überleiten.

D) INFORMELLE TESTS, FEEDBACK

Die Schüler/innen werden auf diese speziellen neuen Prüfungssituationen durch passende Übungsphasen und Beispiele in Einzel- und Gruppenarbeit vorbereitet. Ich erwarte mir in diesen Lernsituationen ein entsprechendes Feedback, um den Schwierigkeitsgrad nachfolgender Schularbeiten einschätzen zu können.
Informelle Tests vor den Arbeiten sollen den Schüler/innen ein Feedback über ihren Leistungsstand geben.
Eine nachfolgende Evaluation wird sicher hauptsächlich durch Schüler- und Lehrereindrücke (evtl. auch durch einzuholende Elternmeinungen) und Vergleichstests mit anderen Klassen stattfinden.

E) BEGABTENFÖRDERUNG

Zusätzlich zu den hochgradig eigenständigen und differenzierten Arbeiten möchte ich bei den schriftlichen Arbeiten, wo möglich, eine Bonusaufgabe stellen, um den leistungsfähigeren SchülerInnen einen zusätzlichen Ansporn zu bieten.

1. SCHULARBEIT

Art: ohne TI92
Dauer: 30min
Themen: Festkomma, Gleitkomma, Gleichungen, Ungleichungen
Ziel: Überprüfung von händischen Rechenfertigkeiten und Verständnis in oben genannten Bereichen

1.) Stelle die folgenden Mengen in einem Koordinatensystem dar!

a.) $\{(x,y) \in R^2 | 0 \le x \le 3 \wedge y = 1\}$

b.) $\{(x,y) \in R^2 | 3 \le x \le 7 \wedge -4 \le y \le -2\}$

2.) Löse die Ungleichung in R: Gib die jeweiligen Äquivalenzumformungen an!

$$\frac{6y+5}{7} - 4 < 4 - 4y$$

3.) Drücke die angegebene Größe durch die anderen aus!

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \quad ; \quad R_1 = ?$$

4.) Wandle ins Festkommaformat um!

a.) $4{,}7 * 10^9$

b.) $8{,}59 * 10^{-10}$

1.) 8	24 - 23 : 1
2.) 6	22 - 20 : 2
3.) 6	9 - 15 : 3
4.) 4	14 - 12 : 4
------	unter 12 : 5
24	

<u>2.SCHULARBEIT 17.11.1999</u>

<u>Art:</u> Problemlöseschularbeit, mit TI92 und allen Unterlagen
<u>Dauer:</u> 100 Minuten

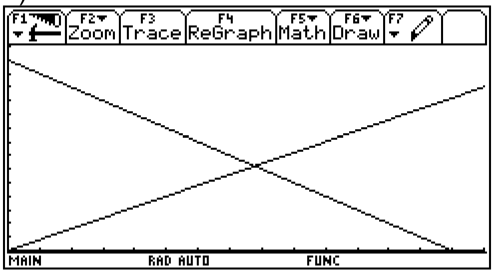
1) Max.mobil (siehe Beilage 1)
Vergleichst du bei den verschiedenen Tarifen die monatliche Grundgebühr mit dem Preis für 1 Minute Gesprächszeit zu österr. Festnetz Mo-Fr/7-20 Uhr, so siehst du, daß bei höherer Grundgebühr der Preis für 1 Minute Gesprächszeit sinkt.
a) Stelle eine Tabelle auf und gib eine lineare Funktion an, die diesen Zusammenhang annähernd wiedergibt.
Gib alle Einstellungen vom TI-92 wieder, die zum Grafikfenster führen, in dem du die Regressionsgerade und die 3 Wertepaare darstellst. (auch Window-Einstellungen)
Zeichne das Grafikfenster in dein Heft!
b) Wenn diese Funktion einen sinnvollen geschäftspraktischen Zusammenhang wiedergibt, welche Kosten/Minute müßte max.mobil seinen Kunden verrechnen, wenn ein Tarif ohne Grundgebühr eingeführt würde.
Interpretiere a und b!

2) Max.mobil bietet verschiedene Handytarife an (siehe Beilage 1). Eine Geschäftsfrau kalkuliert ihre Telefonkosten und sucht die für sie günstigste Variante. Sie weiß, daß sie zu ca. 60 % Festnetze, zu ca.40 % Mobilnetze anruft, wobei die Hälfte davon auf A1, die andere Hälfte auf max.mobil entfällt.
a) Gib eine allgemeine Formel für die Berechnung der monatlichen Handy-Telefonkosten an, wenn mit einer durchschnittlichen täglichen Gesprächszeit von x Minuten Mo-Fr/7-20 Uhr telefoniert wird. Wähle entsprechende Variable für die verschiedenen Gebühren.
b) Anschließend wende diese Formel auf die unterschiedlichen Tarife an.
c) Berechne dann für x=10min die monatlichen Kosten der einzelnen Tarife. Für welchen Tarif würdest du dich entscheiden?
d) Stelle eine obere und eine untere Schranke für die vorraussichtlichen Kosten auf, wenn sich die monatliche Gesprächsdauer im Rahmen von $\pm$ 20% von obigen Angaben bewegt.
e) Bei welcher Gesprächsdauer herrscht Kostengleichheit von jeweils 2 Tarifen? (%-Angaben der Aufteilung auf Telefonate mit Festnetz, A1 und max.mobil wie oben) Welcher Tarif ist unter welchen Bedingungen geeigneter? Diskutiere das Ergebnis!

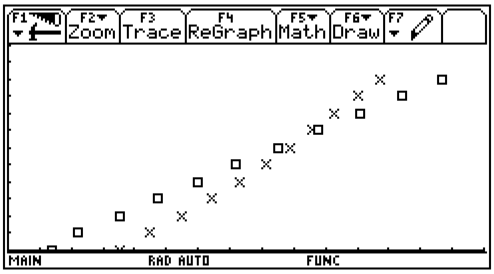
3) Suche dir aus den Wohnungsmarkt-Immobilien-Announcen (siehe Beilage 2) mindestens 8 Angebote (eher mit kleiner Grundfläche) aus und trage die Daten (m² Wohnfläche/ Kaufpreis) in den data-matrix Editor ein.
a) Sortiere die Tabelle nach aufsteigender Wohnfläche. Welche (lineare) Funktion gibt diesen Zusammenhang annähernd wieder? Gib ebenso an, wie du Wertepaare und Funktion im Grafikfenster darstellst! (auch Window-Einstellungen)
b) Wie hoch ist ca. der durchschnittliche Quadratmeterpreis beim Kauf eines Hauses? Welches Angebot findest du besonders günstig? Warum?
Inwiefern kann die Regressionsgerade den wahren Verlauf des Zusammenhanges: Kaufpreis-Wohnfläche nicht wiedergeben? Wie könnte die Funktion wirklichkeitsnäher verlaufen?
c) Schätze ab, welche Wohnungsgröße (von - bis) du am Immobilienmarkt erhalten kannst, wenn du ca. 2 Millionen ATS (Kapital und Kreditmöglichkeiten) zur Verfügung hast?
Wieviel Geld brauchst du mindestens, wenn du ein Haus mit 180m² Wohnfläche kaufen willst? Begründe deine Antwort!

4) Beschreibe verbal folgende grafische Zusammenhänge und erfinde dazu eine passende „Geschichte“; Gib zu deiner „Geschichte“ auch die passenden „window“-Einstellungen an! Beschrifte die Achsen!

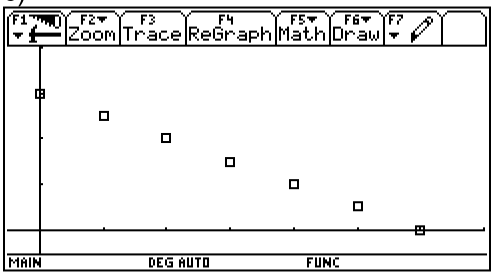
a)



b)



c)



ZB:

a) Lese die mobilkom Tarife für A1 durch und ordne die verschiedenen Tarife den entsprechenden von max.mobil zu. Vergleiche die beiden Geschäftstarife A1 Business und profi-max. Welche Strategie verfolgen die Unternehmen der Mobiltelefonnetze? Diskutiere deine Entdeckungen!

b) Stelle zu Bsp.4.) passende Fragen und beantworte sie auch!

Gedanken zur Problemlöseschularbeit

ad 1) Hier steht das Arbeiten mit dem data-matrix-Editor, das Finden einer Regressionsgeraden und deren Bedeutung im Vordergrund. Daher wurde auch die Frage nach der Bedeutung der Variablen und den Kosten/Minute für einen 0-Grundgebühr-Tarif gestellt. Die Richtigkeit der window - Einstellung gibt das Verständnis des Schülers für die Größenordnungen der Koordinatenbereiche wieder.

ad 2) Der Vergleich von Handytarifen und das Suchen der günstigsten Möglichkeit ist ein dem Alltagsleben von 15jährigen Schülern entsprechendes Problem. Wesentlich für das Bsp. ist das Erschließen von brauchbaren Daten aus Informationen, die nicht vom Lehrer extra zusammengestellt wurden, sondern aus der Realität (Internet) entnommen sind. Es gibt zu viele, d.h. unbrauchbare Daten, wie z.B. die company-Tarife. Diese sind vom Schüler daher einfach zu ignorieren. Das Zusammenstellen einer Formel aus den (geschätzten) %-Angaben entspricht einer eigenen möglichen Kalkulation. Der Schüler muss auch komplexer aufgebaute Tabellen lesen können und Daten, die er aus diesen gewinnt, verarbeiten können. Für die Berechnung der monatlichen Kosten ist ein geschicktes Umgehen mit Variablen, deren Belegung und gespeicherten Formeln, ebenso wie das Verständnis für das Problem an sich, erforderlich. Weiters ist eine problemorientierte Anwendung des %-Rechnens, des Abschätzens von Bereichen und eine Übersetzung der gewonnenen Ergebnisse in die Sprache und Entscheidungsfindung im Alltag von Bedeutung. Die Bedeutung von Schnittpunkten von Funktionen ist zu interpretieren, auf den gegebenen Sachverhalt anzuwenden und die getroffene Entscheidung zu begründen.

ad 3) Aus einer Fülle von Material (Zeitschrift „Besser Wohnen“) sollen vergleichbare Angebote ausgewählt, in den data-matrix-Editor eingegeben, sortiert, graphisch dargestellt und durch eine lineare Regressionsgerade in einen vergleichbaren Zusammenhang gestellt werden. Wesentlich ist hier wieder die Übersetzung von Problemen des Alltages in eine mathematische Sprache. Die Beantwortung der Frage nach einem günstigen Angebot besteht im Verständnis der Positionierung der einzelnen Angebote bezüglich der Regressionsgeraden und des „Wiederlesenkönnens“ der Werte. Zur Interpretationsfrage: Da die Gerade wohl kaum durch den Ursprung verlaufen wird, kann der wahre Verlauf des Zusammenhanges Kaufpreis - Wohnfläche nicht gegeben sein. (d kann je nach Auswahl der Angebote positiv oder negativ sein). Ebenso werden größere Wohnflächen im Verhältnis billiger werden. Solche und ähnliche Überlegungen hat der Schüler in b.) zu tätigen, um einen möglichen treffenderen Verlauf der Funktionskurve zu zeichnen. In c.) wird das Lesen von Graphen und das Abschätzen von Bereichen, ebenso wie das Übertragen eines Intervalls der y-Achse auf das entsprechende Intervall der x-Achse abgefragt.

ad 4) Der Schüler soll Graphen lesen, definieren und beschreiben können. Mit dem „Erfinden einer Geschichte“ wird das richtige Interpretieren von kleinen-großen, positiven-negativen Steigungen bzw. der Nichtlinearität von Zusammenhängen geprüft.

ad ZB) Die Zeit, alle Möglichkeiten für A1 Tarife durchzulesen, wird für den Schüler kaum vorhanden sein. Wird jedoch gezielt nach Grundgebühr und 1 Minute-Gesprächsgebühr (mit Mobil oder Festnetz) gesucht, so ist dazu nicht viel Zeit nötig.
Können die drei sich entsprechenden Tarife aufgelistet werden und erkennt der Schüler, daß jeweilige Gespräche in das Konkurrenznetz gezielt teuer gehalten werden, so ist die in die Tabellendaten übersetzte Firmenstrategie wieder „dechiffriert“ und damit sicheres Umgehen mit Listen und Tabellen bewiesen worden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das gezielte Suchen und Erschließen von Daten, deren eigenständige Bearbeitung, das Finden und Definieren von Bezügen und Zusammenhängen, sowie anschließendes Interpretieren und Begründen von Ergebnissen den Hauptanteil an dieser Schularbeit haben.

Referats-/Facharbeitsliste für die 5C / Schuljahr 1999 / 2000

A) Mathematik und Physik, großteils CBR unterstützt;

1) Es wird gedehnt ... (1)
Dehnung als Funktion von der Anzahl v. Münzen etc.
Federkonstante, Fehlerrechnung, Mittelwert, Abweichung,

2) Auf den Spuren eines Graphen ... (3)
Zeit-Weg-Geschwindigkeit
a) Diagramme
b) vorgegebene Diagramme „nachgehen“
c) konstante Geschwindigkeit-Weg bestimmen
d) „Wo trifft man sich?“ Schnittpunkte berechnen, Bewegungsaufgaben

3) Ein Ball rollt ... (2)
a) Funktion der Höhe - schiefe Ebene, Gravitation
b) kinetische - potentielle Energie

4) Ein Ball springt ... (2)
a) Steigung eines Graphen, Höhe, Geschwindigkeit
b) Maximum bestimmen, Funktionen anpassen

5) Ein Ball fällt ... (1)
Experimente zu zusammengesetzten Funktionen,
quadratische Funktionen, Parabel, Loch in der Konservendose

6) Unfallszenario ... (1)
elastischer, unelastischer Stoß / Reflexionsgesetze / Reibung (verschiedener Untergrund)

7) Es schwingt ... (1)
Schwingungsdauer, Funktion

B) Mathematik und Wirtschaft, großteils in Zusammenarbeit mit der Sparkasse Pottenstein;

1) Ein Auto verliert an Wert ... (1)
Abschreibungsmodell, Restwertberechnung, Steuer, Finanzamt, Übereinstimmung mit dem tatsächlichen Wertverlust?

2) Ein Auto wird finanziert ... (1)
Leasingmodelle etc. Tabellenkalkulation

3) Wohin mit der alten Wohnung? ... (1)
Verkaufen oder vermieten - der Immobilienmarkt, staatliche und sonstige Förderungen

4) Was kann ich mir leisten? ... (1)
Finanzcheck der Banken, Planung von Ausgaben, Tabellenkalkulation

5) Man kommt zur Ruhe ... (1)
Pensionsvorsorgemodelle, Anlagemöglichkeiten;

6) Man braucht mehr Geld als man hat ... (1)
Kredite, Spesen, Kontenführung

7)Man hat mehr Geld als man braucht ... (1)
Sparmodelle

8) Für Spekulanten, Spieler und Supermathematiker ... (1)
der Aktienmarkt; Vorsorgemöglichkeiten, Charts, Funktionen angleichen, analysieren etc.

9) Man wechselt ... (1)
Fremdwährung, -Kredite, Euro;

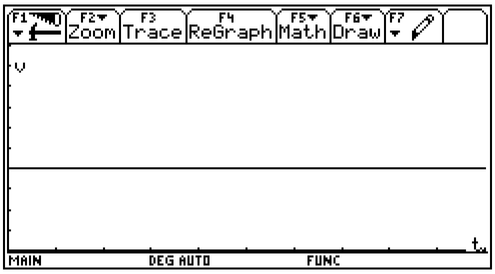
3.Schularbeit 26.1.2000

Dauer: 20 min
Art: Fragen zu den im 1.Semester gehaltenen Referaten
Punkte: 1) 2 2) 3 3) 4 4) 4 5) 3 6) 3 7) 5 gesamt: 24
VIEL GLÜCK!!!!!

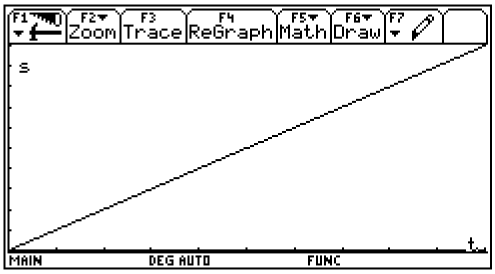
1) Die Steigung der Funktion: Dehnung einer Schraubenfeder in Abhängigkeit von der Anzahl der Gewichtsstücke, mit denen die Feder belastet wird - gibt Auskunft über

- Anzahl der Gewichtsstücke ☐
- Bauart und Material der Feder ☐
- Ausdehnung der Feder ☐
- .... ☐

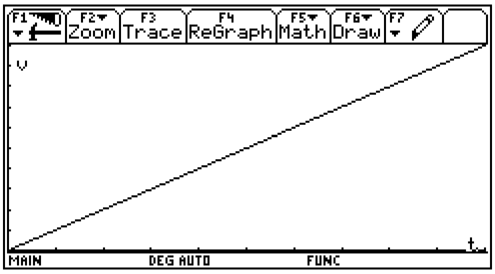
2) Ein Auto fährt mit konstanter Geschwindigkeit. Welcher Graphik entspricht dieser Bewegung?



☐

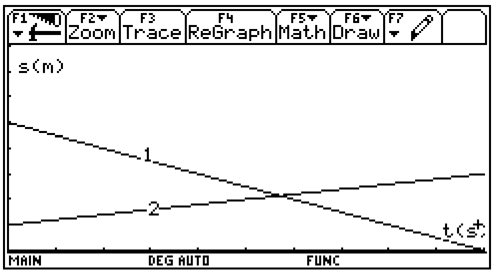


☐



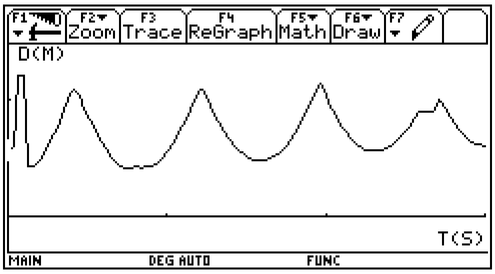
☐

3) 2 Schüler begegnen einander:



Der 1.Schüler geht ..... m und der 2. Schüler ..... m vom Meßgerät entfernt weg. Treffpunkt: nach ..... Sekunden in .... m Entfernung. Der ...... Schüler geht langsamer als der ..... Schüler.

4) Ein Ball springt ....



Für die Aufnahme dieses Diagramms, hat sich das CBR

- in der Höhe des losgelassenen Balles ☐
- am Boden ☐
- oberhalb des losgelassenen Balles ☐

befunden.

Die Geschwindigkeit des Balles beträgt 0, wenn .... Wird die Entfernung des Balles zum Boden als Funktion der Zeit aufgetragen, so erkennt man die Punkte, in denen die Geschwindigkeit des Balles sehr groß ist, daran, dass die Kurve durch diese Punkte

- sehr flach verläuft ☐
- sehr steil verläuft ☐
- waagrecht verläuft ☐

5) Ein Ball fällt zu Boden. Die Geschwindigkeit des Balles zwischen Loslassen und Aufprall am Boden

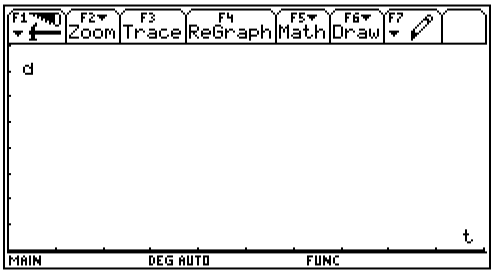
- wird immer größer ☐
- wird immer kleiner ☐
- bleibt immer gleich ☐

Der Weg, den der Ball zurücklegt, ist eine

- linear steigende ☐
- quadratische ☐
- linear fallende ☐

Funktion der Zeit.

6) Überholmanöver zweier Radfahrer:
Zeichne für die beiden Radfahrer eine mögliche „Bewegungsgeschichte“ in das Diagramm ein.



7) Ein Auto hat einen tatsächlichen Wertverlust,

- der jedes Jahr gleich groß ist. ☐
- der in den ersten Jahren groß ist dann aber mit der Zeit immer geringer wird. ☐
- der mit den Jahren ständig ansteigt. ☐

Ein Auto hat einen steuerlichen Wertverlust,

- der jedes Jahr gleich groß ist. ☐
- der in den ersten Jahren groß ist aber dann mit der Zeit immer geringer wird. ☐
- der mit den Jahren ständig ansteigt. ☐

Wird ein Auto .... Jahre lang von der Steuer abgeschrieben, so ist der Wert nach drei Jahren ....vom Einkaufswert. Dieser Betrag heißt ....

Antworten auf die Leitfragen des Zentrums für Schulentwicklung

A) Beschreibung meiner Zielsetzungen

1) **Ist-Zustand: -** Schwerpunkt beim Abprüfen lexikalen Wissens
Zielsetzung: - Fähigkeit aus verfügbaren Quellen lexikales Wissen deutlich größeren Umfangs zu entnehmen und anzuwenden
Begründung: - lexikales Wissen geht schnell verloren
Wiederholungs- und Strukturerkennungskompetenz bleibt länger erhalten und ist vielseitig anwendbar

2) **Ist-Zustand:** - wirklichkeitsfern gedrillte Aufgaben von scheinbarer Komplexität mit geringer praktischer Anwendbarkeit
Zielsetzung: - die Wirklichkeit ist nicht immer ganzzahlig; faktisch ist das Erkennen der prinzipiellen Struktur und der für die Aufgabenstellung erforderlichen Genauigkeit maßgeblich
Begründung: - non scholae sed vitae discimus

3) **Ist-Zustand: -** der lehrerzentrierte Unterricht behindert die Eigenständigkeit und die Fähigkeit der SchülerInnen eigene Arbeiten zu vertreten
Zielsetzung: - die SchülerInnen sollen ermuntert werden, ihre Ausarbeitungen eigenverantwortlich in verschiedenen Formen (schriftliche Arbeiten, Referate, Versuche, Beispiele, schriftliche Handouts an die MitschülerInnen) darzustellen
Begründung: - im Arbeitsleben muß das Produkt nicht nur entwickelt, sondern auch verkauft werden

B) Schülerreflexionen

Siehe beiliegende Schülerkommentare
Die Motivation in dieser Klasse erscheint mir sehr hoch, da sich 8 von 18 SchülerInnen für das Wahlpflichtfach Mathematik angemeldet haben.

C) Eltern- und Kollegenmeinungen

Eltern: fast durchgängig positiv bis begeistert
KollegInnen: unterschiedlich, aber tendenziell positiv

D) Probleme

Die Problemschularbeit muss gestrafft werden.
Die Schnittstelle: Matura - Hochschule ist aufgrund unterschiedlicher Lehrerphilosophien nicht reibungsfrei.

E) Rahmenbedingungen hinsichtlich Fortführung des Modells:

Schulstandortspezifischer Mindestkonsens ist erforderlich.

A) THESE

Die klassische Kurvendiskussion ist tot! An ihre Stelle kann z.B. das Anpassen von Funktionen an Datenmengen treten.

Autor: Heiko Knechtel, Bückeburg
e-mail: HKnechtel@aol.com

Beispiel: Luftballon - Einführung in die Regression (Grundkurs Klasse 12)

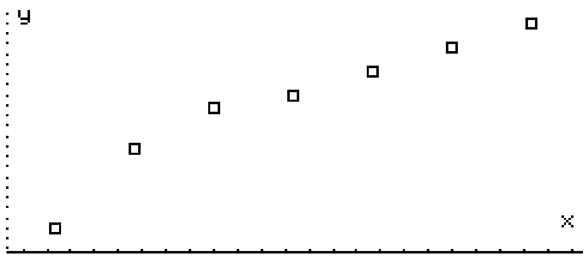
Wenn man einen Luftballon aufbläst, ändert sich mit dem Volumen auch der Umfang. Gibt es einen funktionalen Zusammenhang bzw. eine Funktionsgleichung, der dieses (näherungsweise) bestätigt?

Phase 1: Experimentieren – Partner/Gruppenarbeit
Mehrere Luftballons werden (bis zum Platzen) aufgeblasen, dabei werden bei jedem Atemstoß der zugehörige Umfang des Ballons mit einem Maßband gemessen. Man ist bemüht, möglichst gleichmäßig zu pusten, um die Anzahl als Maß für das Volumen zu benutzen. Vergleichsweise führt eine Gruppe das Experiment mit einer Ballpumpe durch. Einige Gruppen bemühen sich, den Ballon jedesmal in Kugelform zu bringen.

Phase 2: Auswertung – Tabellieren der Daten und graphische Darstellung
Die Daten werden in den Taschencomputer eingegeben und anschließend wird ein Datenplot durchgeführt.

DATA	Anz Pusten	Umfang
	c1	c2
1	1	43
2	2	55.6
3	3	62
4	4	64
5	5	67.5
6	6	71.5
7	7	75

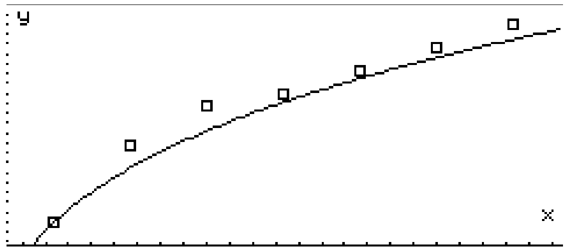
c1=



Phase 3: Diskussion des Graphen – Aufstellen einer Vermutung für einen funktionalen Zusammenhang
In den unterschiedlichen Graphen der einzelnen Gruppen läßt sich eine gemeinsame „Form“ erkennen. Es wird vermutet, daß diese „Form“ der Graph einer Wurzelfunktion oder einer Logarithmusfunktion ist. Der Ansatz über die Logarithmusfunktion wird nach kurzer Diskussion verworfen, da einige Eigenschaften der Logarithmusfunktion durch die Daten nicht erfüllbar sind.

Phase 4: Experimentelle Bestimmung deiner zugehörigen Funktionsgleichung – Nutzung der Tabellenkalkulation des TC

In der TC-Tabelle werden zwei Parameter eingegeben und die Funktion damit berechnet. Gleichzeitig wird diese Funktion zusammen mit dem Datenplot dargestellt und visuell begutachtet. Einige Gruppen experimentieren eher planlos, die überwiegende Anzahl arbeiten sehr gezielt. Es wird schnell erkannt, daß sich a weitgehend festlegen läßt und nur noch b manipuliert werden muß.



DATA	Anz Pus…	Umfang	Paramet…	a*x^b
	c1	c2	c3	c4
1	1	43	"a="	43.
2	2	55.6	43	52.5735
3	3	62	"b="	59.1335
4	4	64	.29	64.2785
5	5	67.5		68.5756
6	6	71.5		72.299
7	7	75		75.6044

c4=c3[2]*c1^c3[4]

Mit dem Befehl c3[2] kann man im Tabellenkopf direkt auf eine Zelle der Tabelle, hier auf den Wert von a, zugreifen. Durch Variation dieses Wertes wird die gesamte Tabelle

Phase 5: Suche nach Gütekriterien für die Approximation – Fehler, absoluter Betrag des Fehlers, quadratischer Fehler

Die Frage, "Welche Funktion ist nun die beste?", führt schnell zu einer Suche nach Gütekriterien. Die Fehleruntersuchung läßt sich sehr leicht mit der Tabellenkalkulation durchführen. Die Überlegungen zur Bestimmung des quadratischen Fehlers werden durch den Aspekt der unterschiedlichen Gewichtung von dichten und weit entfernten Punkten motiviert.

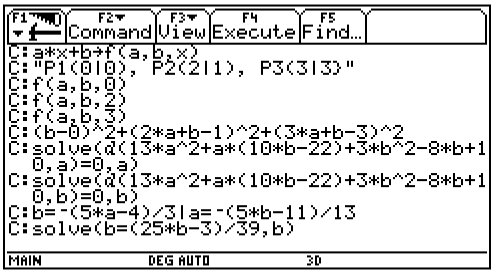
Im Anschluß wird gefordert, daß die Summe der quadratischen Fehler möglichst gering wird. Nach der Einbettung dieser Forderung wird wieder in den Gruppen experimentiert und jeweils eine optimale Approximationsfunktion bestimmt.

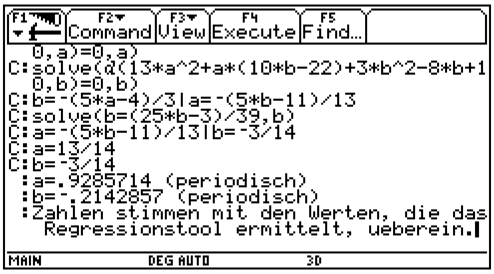
DATA	a*x^b	Fehler	Quadrat	Summe
	c4	c5	c6	c7
1	43.	0.	0.	19.6145
2	52.5735	3.02647	9.15951	
3	59.1335	2.8665	8.2168	
4	64.2785	-.278518	.077572	
5	68.5756	-1.07562	1.15696	
6	72.299	-.799005	.638408	
7	75.6044	-.604368	.365261	

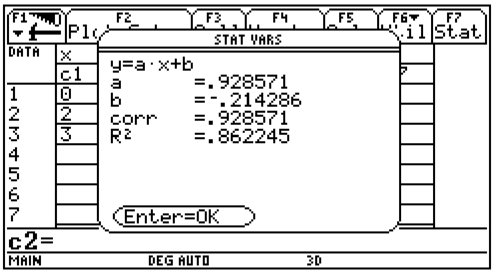
c7=sum(c6)

Phase 6: Verallgemeinerung des Verfahrens – Herleitung der linearen Regressionsfunktion

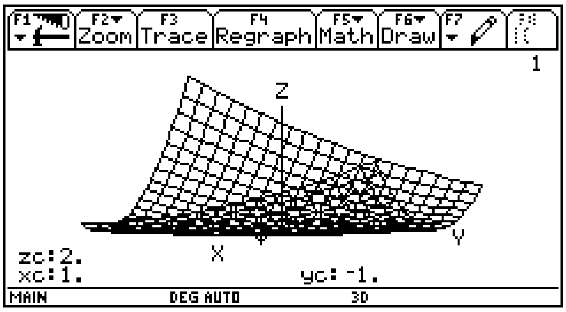
Für die Herleitung der optimalen Approximationsfunktion wird eine zweistellige Funktion untersucht, die von den Parametern a (Steigung) und b (y-Achsenabschnitt) abhängt. Der Begriff der partiellen Ableitung wird eingeführt und mit seiner Hilfe wird die Funktion bzgl. a und b optimiert.







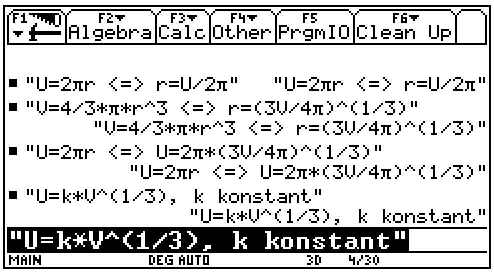
Man kann die Fehlerquadratsummenunktion, die ja von den beiden Parametern a und b abhängt, als 3D-Graph darstellen. Die Trace-Möglichkeiten sind aber so bescheiden, dass sie keine wesentliche Erkenntnis erbringen. Man kann den Bereich nur grob einschränken.



Jetzt wird auch das Regressionsmodul des TC erforscht, das für die lineare Regression den berechneten Wert bestätigt. Für die „Power-Regression“ wird für das Ballonbeispiel ein geringfügig besserer Wert bzgl. der Quadratsumme gefunden.

Phase 7: Verifikation der Modellannahme

Als Abschluss wird noch die Modellannahme verifiziert. Da der Ballon im Idealfall eine Kugel ist, kann man die Abhängigkeit zwischen Umfang und Volumen symbolisch "berechnen":



Also ist die Modellannahme mit $y=a \cdot x^b$ sinnvoll gewesen. Darüber hinaus liegt der Zahlenwert für b, den man experimentell oder per Regression ermitteln kann "nahe" bei dem theoretischen Wert von 1/3.

B) Wie kann ein Curriculum für das Themenfeld Stochastik in der Sekundarstufe I (Klasse 7 -10) aussehen?

Heiko Knechtel, Bückeburg
MNU Tag 2000 Hannover, T^3 Winterakademie 2001, Spital

Der Stellenwert der Stochastik für die Schule ergibt sich einerseits aus ihrer außermathematischen Bedeutung (Bewertung und Analyse von Datenmaterial als Grundlage für lebensrelevante Entscheidungen, Bewertung von Chancen und Risiken, Abschätzung von Fehlern) und andererseits aus ihrer Relevanz im Sinne des Modellierens. Sie erfüllt in besonderer Weise die beiden Aspekte von Mathematik: als Sprache mit innermathematischen Begründungs- und Exaktheitsstandards und als solche zur Beschreibung der Erfahrungswelt. Gerade durch das partielle Überwinden der klassischen Ja/Nein-Strategien wird ihr Wert für Bildung deutlich und damit ist sie als ein zentraler Bereich *der* Mathematik nicht durch andere Teilgebiete ersetzbar. Darüber hinaus bietet sie gute Möglichkeiten grundlegende Kompetenzen zu erwerben, Hypothesen zu formulieren, Argumente gegeneinander abzuwägen, konkurrierende Hypothesen zu würdigen. Im Wechselspiel zwischen theoretischem Modell, experimenteller Praxis und Simulation werden inner- und außermathematische Aspekte der Stochastik für den Schüler sowohl theoretisch als auch handlungsorientiert erfahrbar.

Die Stochastik in der Sekundarstufe I bietet Vernetzungsmöglichkeiten mit anderen Teilgebieten der Mathematik und anderen Fachbereichen:

- Geometrie: Symmetrie, geometrische Wahrscheinlichkeiten, Monte-Carlo-Methoden
- Algebra: Termstrukturen, binomische Formeln, Potenzrechnung
- Biologie: Vererbungslehre, empirisches Gesetz der großen Zahlen
- Physik, Chemie: Auswertung von Messreihen, Elimination des Zufallsfehlers
- Geistes- und Sozialwissenschaften: Darstellung und Manipulation von Daten und Statistiken, Testverfahren

Im Zentrum des Stochastikunterrichts steht die Datenanalyse: Darstellung, Auswertung und Interpretation von Daten. In der Sekundarstufe I ist es notwendig, dass die grundlegenden Intention der Stochastik im Sinne von „den Zufall berechenbar machen“ deutlich wird. Hierzu gehört insbesondere:

- Datenerfassung und Auswertung
- Wahrscheinlichkeiten als Prognosen für zukünftige relative Häufigkeiten
- Wahrscheinlichkeitsrechnung im historischen Kontext
- Beschreibung und Modellierung von Entscheidungsprozessen, algebraische Berechnungen im Modell
- Simulationen
- Methoden zur Beurteilung von Hypothesen, zur Interpretation von Fehlern

In der Sekundarstufe I sollen die wesentlichen Grundbegriffe und Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik eingeführt werden. Als zentrales Werkzeug steht hierbei das Baumdiagramm zur Verfügung. Interpretative Anteile sollen gegenüber den numerischen betont werden. Ein zu starker Formalismus (Axiomatik, Ereignisalgebra, formale Behandlung der Pfadregeln über bedingte und totale Wahrscheinlichkeiten) sowie eine einseitige Betonung des Laplace-Modells sind insgesamt zu vermeiden.
Die Begriffe "Zufallsgröße" und "Erwartungswert" sollen nur propädeutisch behandelt werden.

Für die Darstellung und Auswertung statistischer Daten einerseits und die Simulation stochastischer Experimente andererseits sind an geeigneter Stelle technische Hilfsmittel wie graphische Taschenrechner, Tabellenkalkulationsprogramme und Simulationsprogramme einzusetzen.

Daten und Prognosen

Ein Ziel des Stochastikunterrichtes ist die Datenanalyse und darauf basierend das Erstellen und Bewerten von Prognosen.

Aufgabe der Statistik ist die zielgerichtete Auswertung von Daten. Um experimentelle Untersuchungen bei stochastischen Prozessen durchführen zu können, muss als Handwerkzeug die Darstellung und einfache Auswertung von Daten beherrscht werden. Bekannte Vorkenntnisse aus dem Bereich der beschreibenden Statistik sind in diesem Zusammenhang kontextbezogen aufzubereiten und zu vertiefen. Zur Unterstützung der Visualisierung und zur Auswertung sollen technische Hilfsmittel (GTR; Tabellenkalkulation o.a.) eingesetzt werden. Manipulationen bei der Erhebung und bei der Darstellung von Daten sind im Unterricht zu thematisieren.

Der Begriff der Prognose ist als Grundlage für einen allgemeinen Wahrscheinlichkeitsbegriff zu behandeln, der auch den Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriff erfasst. Vor der Durchführung eines Experimentes ist es sinnvoll eine Erwartungshaltung bezüglich des Ausganges in Form einer Prognose zu erzeugen , die nach der Durchführung kritisch überprüft und ggf. revidiert wird. Erst im Anschluss an diese Gegenüberstellung von Voraussagen und experimentellen Ergebnissen sollte man zu einer altersgemäßen theoretischen Erklärung übergehen. Um das Problembewusstsein der Schüler hierfür zu stärken, werden bei realen Experimenten überwiegend Nicht-Laplace-Objekte gewählt.

Inhalte und Verfahren	**Hinweise und Vernetzungen**
Zielgerichtet Daten sammeln, auswerten und geeignet darstellen • Daten gewinnen: Experimente – Beobachtungen – Erhebungen (Zufallsgeneratoren/Simulation, Umfragen, Zählungen, Internet, Presse,...) • Datentyp erkennen (nominal, qualitativ in Abgrenzung zu quantitativ) • Lagemaße (Mittelwert, Median) bestimmen • Eindimensionale Datenmengen darstellen (Tabelle, graphische Darstellung als Streifen-, Kreisdiagramm, Histogramm) • Technische Hilfsmittel zur Simulation, Darstellung und Auswertung von Daten einsetzen **Wahrscheinlichkeitsbegriff (Prognose)** Prognosen – relative Häufigkeit – Wahrscheinlichkeit Prognosen bei Nicht-Laplace-Zufallsobjekten, Verbesserung der Prognose durch Erkenntnisgewinn Empirisches Gesetz der großen Zahlen (propädeutisch) Laplace-Wahrscheinlichkeiten als Sonderfall: Klassische Zufallsexperimente (Münze, Urne, Würfel, Glücksrad) Berechnen von Wahrscheinlichkeiten Ereignisse, besondere Ereignisse	• Fachübergreifendes und projektbezogenes Arbeiten • Handlungsorientiertes und experimentelles Arbeiten • Einbeziehung und Vertiefung geometrischer und algebraischer Grunderfahrungen • Symmetrie, Funktionsbegriff, Zahlbegriff, Mittelwert, Wahrscheinlichkeitsbegriff als fundamentale Ideen

Die Darstellungen eindimensionaler Datenmengen können durch die Boxplotdarstellung erweitert werden, diese bieten auch einen Anlass einfache Streuungsmaße zu behandeln.

Mehrstufige Zufallsexperimente und Baumdiagramme

Als universelles Hilfsmittel zur Untersuchung mehrstufiger Experimente werden Baumdiagramme als Visualisierungshilfe benutzt. Baumdiagramme sind ein Werkzeug, die bei stochastischen Modellierungen einen einfachen Zugang ermöglichen.

Einfache mehrstufige Zufallsexperimente sollen von den Schülern durchgeführt und entsprechend ausgewertet werden. Mit Hilfe eines Baumdiagramms werden Wahrscheinlichkeiten berechnet, die Pfadregeln werden aus den bekannten Eigenschaften der relativen Häufigkeiten plausibel.

Das Abwägen von Chancen führt bei Glücksspielen auf intuitive Weise zu der Untersuchung des zu erwartenden Gewinns und ermöglicht so einen propädeutischen Zugang zum Begriff des Erwartungswertes. Zentraler Aspekt kann hierbei die Frage sein, bei welchem Einsatz ein Glücksspiel fair ist.

Inhalte und Verfahren	**Hinweise und Vernetzungen**
Mehrstufige Zufallsexperimente • Darstellungen mittels Wahrscheinlichkeitsbäumen. • reduzierte Baumdiagramme mit Hilfe von geeigneten Zufallsgrößen (propädeutisch) • Modellbildung (Ziehen mit/ohne Zurücklegen) Pfadregeln – Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten • Multiplikationsregel • Additionsregel Ein klassisches Problem der Stochastik Gewinn/Verlust als Zufallsgröße (propädeutisch) Erwartungswert bei Glücksspielen • faire Spiele	• Handlungsorientiertes und experimentelles Arbeiten • Strukturiertes Arbeiten: zielgerichtete Reduktion auf das Wesentliche • Anwendung algebraischer Verfahren (Bruchrechnung, Prozentrechnung,...) • Einbeziehung historischer und kultursozialer Kontexte • Modellbildung und Simulation, Mittelwert als fundamentale Idee

Rückwärtiges Schließen im Baumdiagramm

Bei Betrachtung der Ergebnisse eines Experimentes oder einer Erhebung kann in einer Rückschau nach der Möglichkeit gefragt werden, die **Wahrscheinlichkeiten für rückwärtige Schlüsse** zu berechnen. Die dazu erforderliche Auswertung der Ergebnisse führt unter Ausnutzung der bereits bekannten Pfadregeln auf intuitive Weise zu den Aussagen der Bayes-Formel, ohne dass der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit explizit formuliert bzw. formal behandelt wird.

- Man bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass **die Beobachtung eingetroffen ist („möglich für das Indiz“)**,
- man bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass **die vermutete Ursache der Grund für diese Beobachtung war („günstig für das Indiz“),**
- man dividiert wie bei Laplace **: p(„günstig für das Indiz“) / p („möglich für das Indiz“)** und erhält so eine vereinfachte Form der Bayes-Regel, die für die Schüler dieser Altersstufe gut handhabbar ist.

Alternativ zu den Baumdiagrammen können derartige Fragestellungen auch mit der **Vierfeldertafel** bearbeitet werden.

Inhalte und Verfahren	Hinweise und Vernetzung
• **Vierfeldertafel** • Berechnung der **Wahrscheinlichkeit von Rückschlüssen** mit Hilfe von **Baumdiagrammen**. • Erarbeitung der **Bayes-Formel** in „Anlehnung“ an die Laplace-Definition von Wahrscheinlichkeit ($p = \frac{g}{m}$) in der einfachen Form $p(\text{Rückschluss auf ein Indiz}) = \frac{p(\text{"günstig" für das Indiz})}{p(\text{"möglich" für das Indiz})}$	• "Umkehrung" der Blickrichtung als heuristische Strategien

Zusatz:
- Berechnung von **Ursachenwahrscheinlichkeiten in mehrstufigen Prozessen**; **Verbesserung von Hypothesen durch Informationszuwachs**.

Neue Einsichten oder Beobachtungen führen häufig zu der Erkenntnis, dass **Entscheidungen revidiert werden müssen**. Die bereits in der Klassenstufe 7 erfahrene Einsicht, dass sich subjektive Wahrscheinlichkeiten aufgrund neuer Informationen ändern können, führt zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten von „Ursachen“ innerhalb eines Entscheidungsprozesses mit Hilfe von Baumdiagrammen.
Das **wiederholte Anwenden der Bayes-Formel im Sinne eines iterativen Prozesses** ermöglicht das **Abwägen des Risikos von Fehlentscheidungen**.

Bernoulliketten und Alternativtests

Bei der Untersuchung von Spezialfällen von stochastischen Experimenten und Erhebungen spielen Bernoulliexperimente und Bernoulliketten eine zentrale Rolle. Hierbei ergeben sich gegenüber den in Klasse 7/8 behandelten Verteilungen neue Aspekte, die insbesondere mit Elementen der Algebra verknüpft werden. Ausgehend von den bekannten Baumdiagrammen kann man mit der Untersuchung der Anzahl der Wege mit bestimmten Eigenschaften zum Pascaldreieck und dem Binomialkoeffizienten gelangen. Die Binomialkoeffizeinten und die Binomialverteilung, deren Werte direkt vom GTR abgerufen werden können, sind nur Mittel zum Zweck, um weitergehende Probleme zu lösen.
Das Baumdiagramm ist das zentrale Visualisierungsmittel. Eine Vertiefung der Kombinatorik soll nicht erfolgen.

Binomialkoeffizienten sind ein **Werkzeug**, um bei stochastischen Modellierungen die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten einfach darstellen zu können. In diesem Zusammenhang sollten an geeigneter Stelle **Simulationen** eingebunden werden.

Mit Hilfe der Bernoulliketten sollen einfache Alternativtests untersucht werden. Neben der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der beiden Alternativen sollen die Fehlerarten und ihre Bedeutung in der Praxis untersucht werden. Die interpretativen Teile sollen betont werden.

<table>
<tr><th>Inhalte und Verfahren</th><th>Hinweise
und Vernetzung</th></tr>
<tr><td>Baumdiagramme bei Bernoulliketten
• Anzahl der Wege im Baumdiagramm mit genau k „Einsen“, Binomialkoeffizient als Begriff
• Pascaldreieck
• Simulationen mechanisch (Galton Brett) /elektronisch
Wahrscheinlichkeiten in Bernoulliketten

Alternativtests
• Hypothesen und ihre Wahrscheinlichkeiten
• Fehler und ihre Wahrscheinlichkeiten
• Interpretationen von Fehlern</td><td>Termstrukturen und Muster im Pascaldreieck
• Binomische Formeln
• Potenzen
• Reihen
• Sierpinski Dreieck</td></tr>
</table>

Zusatz:
Zur Abgrenzung der bereits bekannten unterschiedlichen Urnenmodelle kann exemplarisch das „Lotto-Problem“ als Ziehen ohne Zurücklegen behandelt werden. Bei der Problemlösung können gleichwertig direkte (mittels Baumdiagramm) und formelmäßige Zugänge zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten behandelt werden.