Mag. Gerhard Hainscho

Rechnen mit komplexen Zahlen

Themenbereich	
Komplexe Zahlen und Funktionen	
Inhalte	**Ziele**
• Verschiedene Darstellungsformen komplexer Zahlen am TI-92 • Spezielle Befehle für komplexe Zahlen • Vorschlag zur Einführung der komplexen Zahlen im Unterricht • Programmbeispiel für die Visualisierung komplexer Funktionen • Formelsammlung	• Den Umgang mit komplexen Zahlen am TI-92 beherrschen. • Eine Diskussion der Sinnhaftigkeit bzw. Existenz komplexer Zahlen durch Andeutung des historischen Wegs ihrer Einführung provozieren. • Durch bestimmte Art von Visualisierung Interesse für komplexe Funktionen wecken.
Überblick über die Möglichkeiten, die der TI-92 im Umgang mit komplexen Zahlen bietet.	

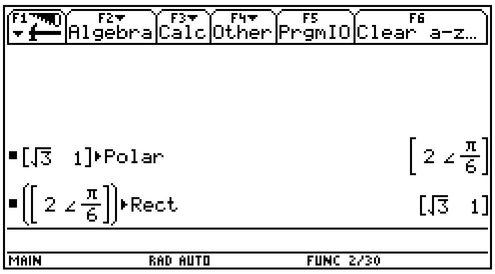
Eingabe und Darstellung

Für die Eingabe komplexer Zahlen ist jede der Formen $a + bi$ / $r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ / $r \cdot e^{i\varphi}$ möglich. Mit *Plus-Modul* können komplexe Zahlen auch als $(r\angle\varphi)$ eingegeben werden. Die Darstellung der Ergebnisse hängt nicht von der Form der Eingabe, sondern nur von der mit MODE gewählten Grundeinstellung für Complex Format und Angle (dringende Empfehlung: RADIAN) ab.

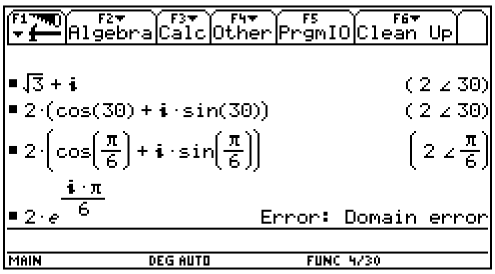
Nr	Eingabe	Darstellung		
		Real	Rectangular	Polar
1	√(3)+i	$\sqrt{3}+i$	$\sqrt{3}+i$	$e^{\frac{i\cdot\pi}{6}}\cdot 2$
	2*(cos(π/6)+i*sin(π/6))	$\sqrt{3}+i$	$\sqrt{3}+i$	$e^{\frac{i\cdot\pi}{6}}\cdot 2$
	2*e^(i*π/6)	$\sqrt{3}+i$	$\sqrt{3}+i$	$e^{\frac{i\cdot\pi}{6}}\cdot 2$
2	conj(√(3)+i)	$\sqrt{3}-i$	$\sqrt{3}-i$	$e^{\frac{-i\cdot\pi}{6}}\cdot 2$
	conj(2*(cos(π/6)+i*sin(π/6)))	$\sqrt{3}-i$	$\sqrt{3}-i$	$e^{\frac{-i\cdot\pi}{6}}\cdot 2$
	conj(2*e^(i*π/6))	$\sqrt{3}-i$	$\sqrt{3}-i$	$e^{\frac{-i\cdot\pi}{6}}\cdot 2$
3	real(√(3)+i)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
	real(2*(cos(π/6)+i*sin(π/6)))	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
	real(2*e^(i*π/6))	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
4	imag(√(3)+i)	1	1	1
	imag(2*(cos(π/6)+i*sin(π/6)))	1	1	1
	imag(2*e^(i*π/6))	1	1	1
5	abs(√(3)+i)	2	2	2
	abs(2*(cos(π/6)+i*sin(π/6)))	2	2	2
	abs(2*e^(i*π/6))	2	2	2
6	angle(√(3)+i)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
	angle(2*(cos(π/6)+i*sin(π/6)))	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
	angle(2*e^(i*π/6))	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
7	P▸Rx(2,π/6)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
8	P▸Ry(2,π/6)	1	1	1
9	R▸Pr(√(3),1)	2	2	2
10	R▸Pθ(√(3),1)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$

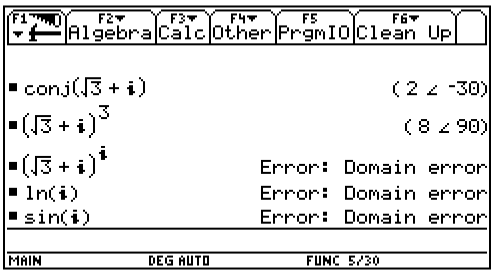
Nr	Eingabe	Darstellung		
		Real	Rectangular	Polar
11	`(√(3)+i)^3`	$8\cdot i$	$8\cdot i$	$e^{\frac{i\cdot\pi}{2}}\cdot 8$
12	`(√(3)+i)^i`	$2^{i}\cdot e^{\frac{-\pi}{6}}$	$\cos(\ln(2))\cdot e^{\frac{-\pi}{6}}+\sin(\ln(2))\cdot e^{\frac{-\pi}{6}}\cdot i$	$2^{i}\cdot e^{\frac{-\pi}{6}}$
13	`e^(i)`	e^{i}	$\cos(1)+\sin(1)\cdot i$	e^{i}
14	`ln(i)`	$\frac{\pi}{2}\cdot i$	$\frac{\pi}{2}\cdot i$	$e^{\frac{i\cdot\pi}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}$
15	`sin(i)`	$\frac{(e^{2}-1)\cdot e^{-1}}{2}\cdot i$	$\frac{(e^{2}-1)\cdot e^{-1}}{2}\cdot i$	$e^{\frac{i\cdot\pi}{2}}\cdot\frac{e^{2}-1}{2\cdot e}$
	`sin(i)` *mit Plus-Modul*	$\sinh(1)\cdot i$	$\sinh(1)\cdot i$	$e^{\frac{i\cdot\pi}{2}}\cdot\sinh(1)$
16	`cos(i)`	$\frac{(e^{2}+1)\cdot e^{-1}}{2}$	$\frac{(e^{2}+1)\cdot e^{-1}}{2}$	$\frac{(e^{2}+1)\cdot e^{-1}}{2}$
	`cos(i)` *mit Plus-Modul*	$\cosh(1)$	$\cosh(1)$	$\cosh(1)$
17	`tan(i)`	$\frac{e^{2}-1}{e^{2}+1}\cdot i$	$\frac{e^{2}-1}{e^{2}+1}\cdot i$	$e^{\frac{i\cdot\pi}{2}}\cdot\frac{e^{2}-1}{e^{2}+1}$
	`tan(i)` *mit Plus-Modul*	$\tanh(1)\cdot i$	$\tanh(1)\cdot i$	$e^{\frac{i\cdot\pi}{2}}\cdot\tanh(1)$

Eine Umwandlung der Darstellungsform komplexer Zahlen kann auch durch Anwendung der Befehle ▶Polar bzw. ▶Rect auf entsprechende Vektoren der Form [a,b] bzw. [r,∠φ] erfolgen:



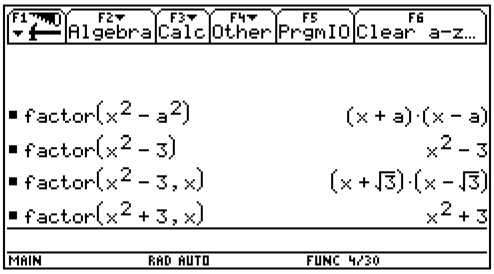
Mit *Plus-Modul* erzeugt die Einstellung Complex Format = POLAR und Angle = DEGREE für Eingaben der Form $a+bi$ bzw. $r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ Antworten der Form $(r\angle\varphi)$, für Eingaben der Form $r\cdot e^{i\varphi}$ sowie für bestimmte komplexe Funktionen allerdings die Fehlermeldung „Domain error“.



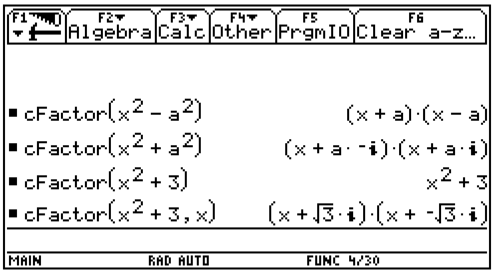


Spezielle Befehle für komplexe Zahlen

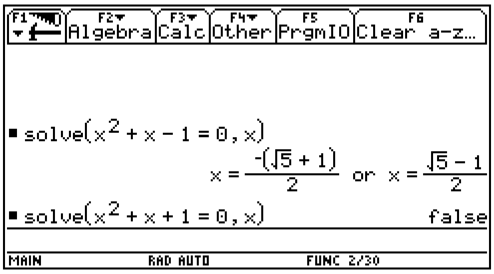
Factor



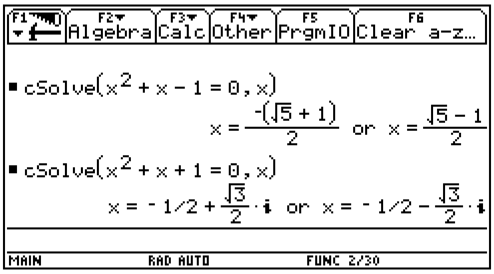
cFactor



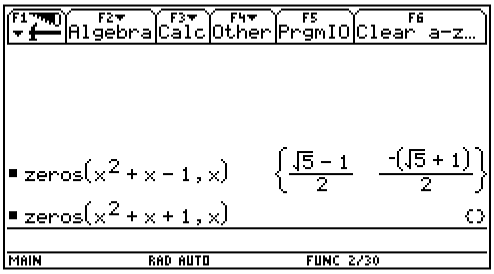
Solve



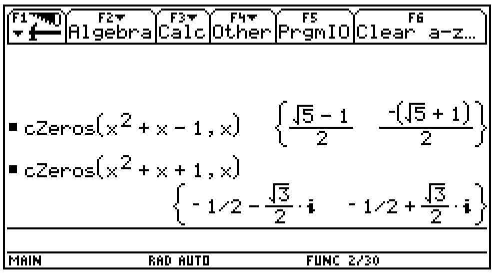
cSolve



Zeros



cZeros



Ein Vorschlag zur
Einführung der komplexen Zahlen
im Unterricht

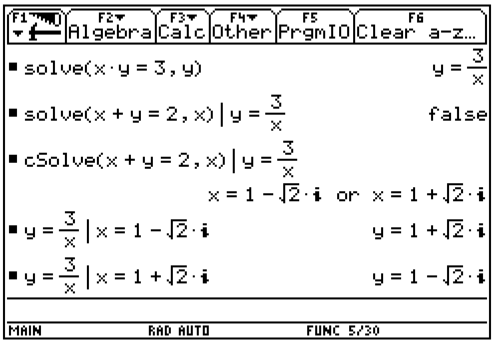
Bsp.: Die Summe zweier Zahlen beträgt 2, ihr Produnkt 3. Wie lautet die Summe der Kehrwerte dieser Zahlen?

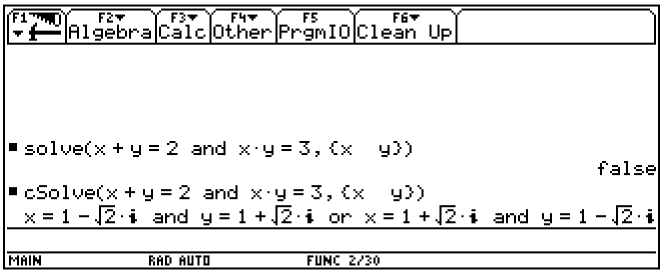
Das Beispiel kann dazu dienen, den historischen Weg der Einführung der komplexen Zahlen anzudeuten, ohne auf die Formeln für Gleichungen höheren Grades eingehen zu müssen.

Einerseits läßt sich die gestellte Frage leicht beantworten:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{x\cdot y}=\underline{\underline{\mathbf{\frac{2}{3}}}}$$

andererseits scheint es „keine“ bzw. nur „sehr seltsame“ Zahlen x, y zu geben, die die geforderten Bedingungen erfüllen ...

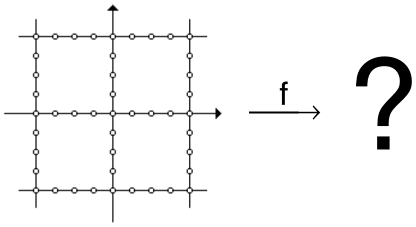




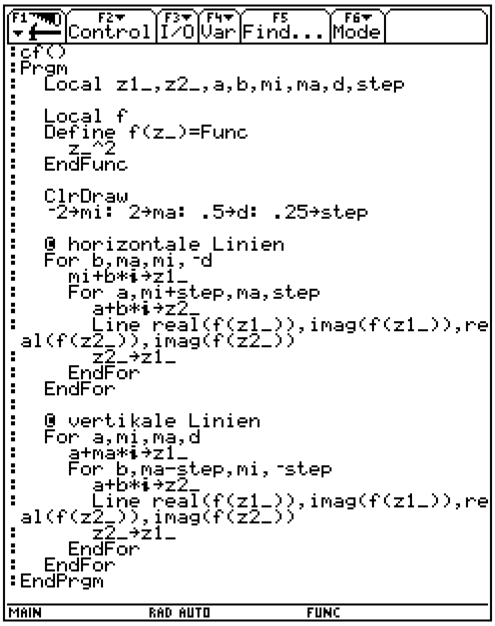
mit *Plus-Modul*

Visualisierung komplexer Funktionen

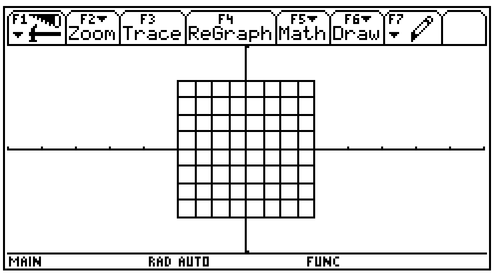
Idee: man verbindet einige (möglichst nahe beieinanderliegende) Gitterpunkte z_i der komplexen Zahlenebene durch gerade Linien, ermittelt die Funktionswerte $f(z_i)$ dieser Gitterpunkte und verbindet die entsprechenden Bilder wieder durch gerade Linien, um eine Vorstellung von der Wirkung von f zu erhalten.



Es ist zweckmäßig, die Berechnung der Bildpunkte und die Darstellung ihrer Verbindungslinien einem Programm zu überlassen. Folgendes Programmbeispiel (Aufruf mit `cf()`; die erforderlichen Grundeinstellungen Graph = FUNCTION und Angle = RADIAN sowie passende WINDOW-Einstellungen sind händisch zu tätigen) zeigt die Realisierung dieser Idee für die Funktion f(z_) = z_^{2} (komplexe Variable werden mit Unterstrich bezeichnet). Eine Änderung der im Programm enthaltenen lokalen Funktion f ermöglicht auch die Untersuchung anderer Beispiele.

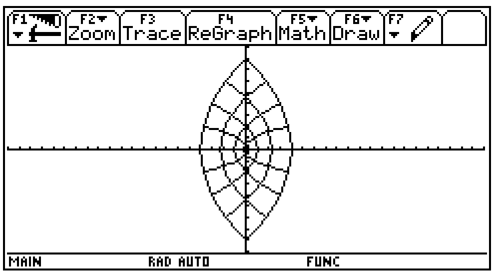



```
:cf()
:Prgm
:  Local z1_,z2_,a,b,mi,ma,d,step
:
:  Local f
:  Define f(z_)=Func
:    z_^2
:  EndFunc
:
:  ClrDraw
:  ⁻2→mi: 2→ma: .5→d: .25→step
:
:  @ horizontale Linien
:  For b,ma,mi,⁻d
:    mi+b*i→z1_
:    For a,mi+step,ma,step
:      a+b*i→z2_
:      Line real(f(z1_)),imag(f(z1_)),re
al(f(z2_)),imag(f(z2_))
:      z2_→z1_
:    EndFor
:  EndFor
:
:  @ vertikale Linien
:  For a,mi,ma,d
:    a+ma*i→z1_
:    For b,ma-step,mi,⁻step
:      a+b*i→z2_
:      Line real(f(z1_)),imag(f(z1_)),re
al(f(z2_)),imag(f(z2_))
:      z2_→z1_
:    EndFor
:  EndFor
:EndPrgm
```



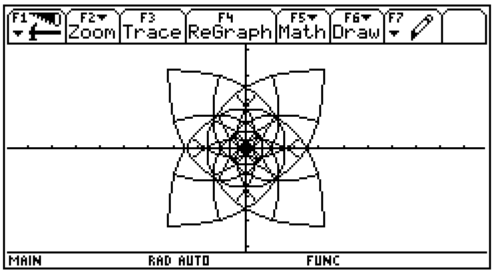
f(z) = z

x = -7 .. 7 / y = -3 .. 3



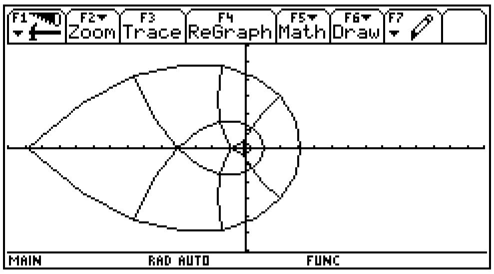
f(z) = z^2

x = -21 .. 21 / y = -9 .. 9



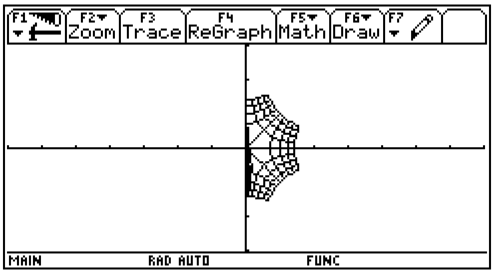
$f(z) = z^3$

x = -49 .. 49 / y = -21 .. 21



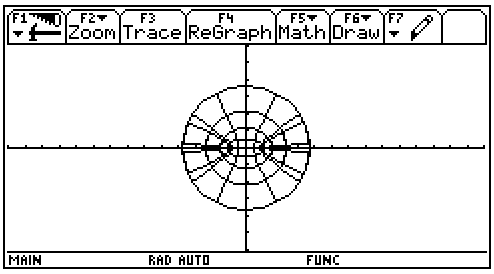
$f(z) = z^4$

x = -70 .. 70 / y = -30 .. 30



$f(z) = \sqrt{z}$

x = -7 .. 7 / y = -3 .. 3



f(z) = sin z

x = -14 .. 14 / y = -6 .. 6

Literatur: Christoph Pöppe: Computer-Kurzweil. In: Spektrum der Wissenschaft 08/89, S 8-13.

Formelsammlung **Komplexe Zahlen**

z	**$a + ib$** $a = r \cdot \cos\varphi$ $b = r \cdot \sin\varphi$	**$r \cdot e^{i\varphi}$** $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\tan\varphi = \frac{b}{a}$
$\bar{z}$	$a - ib$	$r \cdot e^{-i\varphi}$
$\lvert z \rvert$	$\sqrt{a^2 + b^2}$	r
$z_1 \pm z_2$	$(a_1 \pm a_2) + i\,(b_1 \pm b_2)$	
$z_1 \cdot z_2$	$(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i\,(a_2 b_1 + a_1 b_2)$	$r_1 r_2 \cdot e^{i\,(\varphi_1 + \varphi_2)}$
$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$	$\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i\,(\varphi_1 - \varphi_2)}$
z^n		$r^n \cdot e^{i\,n\varphi}$
e^z	$(e^a \cdot \cos b) + i\,(e^a \cdot \sin b)$	$e^a \cdot e^{ib}$
$\ln z$	$\ln r + i\varphi$	
$\sin z$	$\frac{1}{2i} \cdot (e^{iz} - e^{-iz})$	
$\cos z$	$\frac{1}{2} \cdot (e^{iz} + e^{-iz})$	
$\tan z$	$\frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$	
$\sinh z$	$\frac{1}{2} \cdot (e^z - e^{-z})$	
$\cosh z$	$\frac{1}{2} \cdot (e^z + e^{-z})$	
$\tanh z$	$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$