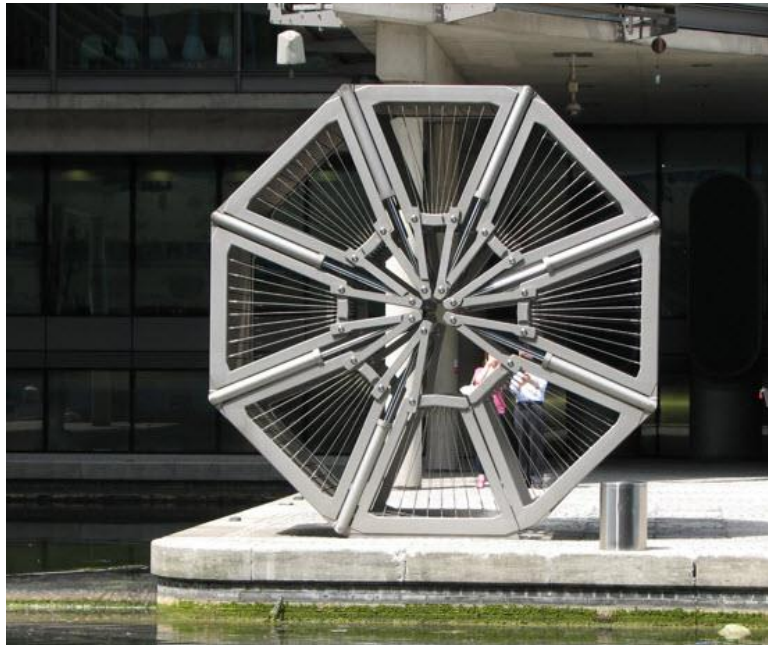


Komplexe Problemstellungen in der Mathematik



*Eine kleine Sammlung
besonderer Aufgaben*

Wolfgang Alvermann

Vorwort

Die Mathematik ist ein „merkwürdiges“ Fach, sie hat einen ausgesprochenen Dipolcharakter; entweder mag man dieses Fach oder man lehnt es ab. Diejenigen, die dieses Fach dann ablehnen, bezeichnen sich häufig als mathematisch unbegabt. So ist es auch erklärlich, dass in der Technik und den Naturwissenschaften Mathematik eine durchaus herausragende Rolle spielt, auf der anderen Seite Mathematik aber für viele Menschen ein affektbeladenes Gebilde bleibt. Meschkowski¹ beschreibt dieses Phänomen 1965 so:

„Es kommt aber auch in unserem Jahrhundert der Naturwissenschaften noch allzu oft vor, dass Vertreter des klassischen Denkens sich ihrer Unwissenheit auf dem Gebiet der exakten Wissenschaften rühmen. Keinem Menschen würde es einfallen, Unsicherheit auf dem Gebiet der Sprache bewusst heraus zu stellen, aber mit einer 5 in Mathematik kann man sich in guter Gesellschaft brüsten.“

Diese Feststellung hat auch heute noch nichts von ihrer Gültigkeit verloren.

Einer meiner Lehrer im Gymnasium hat damals auf unsere Frage, warum er Sprachen studiert hätte, geantwortet:

„Mathematik und Naturwissenschaften konnte ich, Sprachen fielen mir schwer, deswegen habe ich Sprachen studiert.“

Ähnlich ging es mir bis zum Abitur mit der Mathematik, deswegen habe ich Mathematik studiert. Mathematik ist lernbar, ich habe dieses Fach dann ca. 40 Jahre an den Berufsbildenden Schulen II der Stadt Emden in der

- Fachoberschule Technik
- Fachschule Technik

und im

- Beruflichen Gymnasium (LK bzw. Kurse mit eA)

unterrichtet.

„Wir neigen dazu, uns intensiv mit Dingen zu beschäftigen, die uns interessieren. Aber viele Dinge werden erst interessant, wenn man sich ausdauernd mit ihnen beschäftigt.“

Herkunft des Zitats nicht mehr nachvollziehbar

Im Kerncurriculum für das Fach Mathematik in der gymnasialen Oberstufe –
herausgegeben 2018 vom nds. Kultusministerium findet sich folgender Satz:

*„Im Beruflichen Gymnasium muss durchgängig dem Prinzip der Handlungs- und
Berufsorientierung im Mathematikunterricht Rechnung getragen werden.“*

Das heißt, dass besonderer Wert auf berufs- und anwendungsbezogene Aufgaben gelegt
werden sollen. Wirkliche Anwendungsprobleme finden sich in Schulbüchern eher selten,
daher obliegt es der Lehrkraft, in diesem Bereich fündig zu werden.

Die folgende kleine Aufgabensammlung ist in den letzten Jahren entstanden; sie sind nicht
für Prüfungen geeignet und setzen in der Regel auch den Einsatz eines zumindest
grafikfähigen TR, besser aber eines CAS voraus.

*Paul Drijvers*², Mitglied der Forschungsgruppe des Freudenthal-Instituts in den Nieder-
landen, betont in einem Interview,

„... ich glaube, dass moderne Technologie die mathematische Ausbildung dynamischer,
realitätsnäher, vielseitiger, unterhaltsamer und deshalb effektiver machen kann.“

Diesem Statement kann ich mich nur anschließen, der Einsatz von CAS kommt einen
anwendungsorientierten Unterricht sehr zu gute.

Hinweis:

Die Aufgabensammlung liegt auch in digitaler Form vor.

Die zusätzlichen Ordner *GeoGebra-Dateien*
TI-Nspire-CAS

enthalten Grafiken/Animationen bzw. Dateien zu komplizierten algebraischen
Berechnungen.

Bis auf die gekennzeichneten Bilder/Grafiken sind alle anderen mit GeoGebra bzw. Visio
erstellt und bearbeitet worden oder es handelt sich um eigene Fotografien.

Hinte im November 2019

Wolfgang Alvermann
Hans-Böckler-Allee 79a
26759 Hinte
w.alvermann@t-online.de

Inhaltverzeichnis

1) Das Pentagon	Seite 1
2) Abdeckung eines Leuchtturms	Seite 4
3) Große Voliere im Vogelpark Walsrode	Seite 9
4) Geometrie an einem Sonnenschirm	Seite 14
5) Die Berechnung regelmäßiger n-Ecke	Seite 19
6) Gotisches Fenster mit Dreipass	Seite 22
7) Die Thomaskirche in Leipzig	Seite 26
8) Gesamtablenkung am Prisma	Seite 30
9) Radius des sichtbaren Horizonts	Seite 32
10) Die „krummen“ Maße eines DIN-A4-Blattes	Seite 34
11) Axiale und radiale Durchbohrung einer Welle	Seite 36
12) Pflasterungen	Seite 38
13) Lineare Regression – ein konstruiertes Beispiel	Seite 44
14) Ein Reibungsproblem	Seite 46
15) Seilreibung	Seite 51
16) Praktische Probleme an einem Zylinderschnitt	Seite 55
17) Ein Biegeproblem aus der Praxis	Seite 59
18) Der schiefe Wurf	Seite 66
19) Der Kurbeltrieb	Seite 72
20) Kugel auf gerader und gekrümmter Bahn	Seite 75
21) Kurven gleicher Breite	Seite 83
22) Warum schwimmt ein Schiff?	Seite 93
23) The Rolling Bridge	Seite 98
24) Analytische Darstellung ebener Kurven	Seite 104
25) Dreibogengleichdick oder Reuleaux-Dreieck	Seite 112
26) Wachstumsprozesse und DGL'n	Seite 126
27) Biegelinien	Seite 136
28) Materialstärken herkömmlicher Materialien	Seite 151

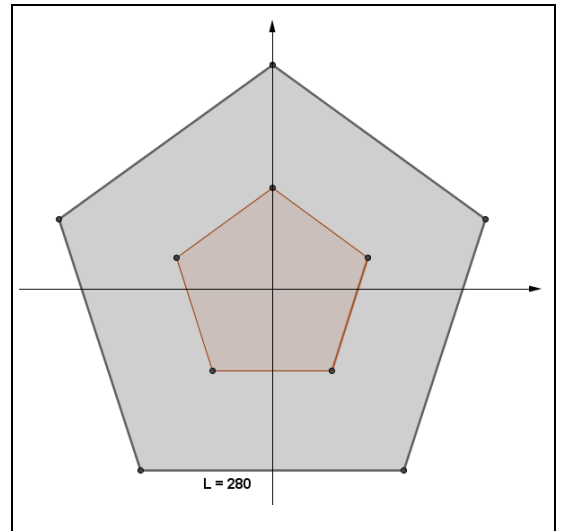
Das Pentagon

Das Pentagon³ ist der Hauptsitz des US-amerikanischen Verteidigungsministeriums. Mit seinen je 280 Meter langen Außenwänden, einer Gesamtfläche von rund 135.000 m², einem Volumen von rund 2 Millionen m³ gilt es als das neuntgrößte Gebäude der Welt und das größte einzelne Verwaltungsgebäude. Es hat fünf Stockwerke mit einer Gesamthöhe von 22 m. Der Einfachheit halber wird mit $h = 20$ m gerechnet.



Mit diesen Angaben sollen folgende Aufgaben gelöst werden.

- a) Bestimmen Sie die Eckpunkte des äußeren Fünfecks - beginnend mit dem höchsten Punkt, im Uhrzeigersinn - und berechnen Sie dessen exakte Fläche.
- b) Entwickeln Sie in Abhängigkeit von der Eckenzahl n und der Seitenlänge L eine allgemeine Formel zur Berechnung der Fläche eines n -Ecks!
- c) Aus dem Volumen und der Höhe lässt sich die Grundfläche des Gebäudes berechnen. Welche Fläche hat also das innere Fünfeck? Rechnen Sie hier mit $A_g = 135000$, $V = 2000000$ und $h = 20$!



- d) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus b) die Eckpunkte des inneren Fünfecks!
- e) Bestimmen sie nun die Länge der Innenwände und den Umkreisradius innen!

Es sei

A_g Gesamtfläche

A_p Grundfläche des Pentagon

L Länge der Außenwände

R Umkreisradius außen

h Höhe des Gebäudes

A_{pi} Fläche des Innenfünfecks

l Länge der Innenwände

r Umkreisradius inneres Fünfeck

h_d Dreieckshöhe

Lösung zu a)

Grundlage der Berechnungen ist ein gleichschenkeliges Dreieck (hier OP_1P_2) mit der Grundseite $L = \overline{P_1P_2} = 280m$, der Höhe h_d , den Katheten R und einem Winkel $\alpha = 72^\circ$ bei O .

Berechnet werden h_d und R in Abhängigkeit von L .

$$h_d = \frac{L}{2 \cdot \tan(36^\circ)} = \frac{L}{2} \cdot \cot(36^\circ) \approx 0.6882 \cdot L$$

$$R = \frac{L}{2 \cdot \sin(36^\circ)} \approx 0.8507 \cdot L$$

Mit Hilfe von R und α lassen sich die Punkte $P_1 - P_5$ leicht bestimmen.

Die Koordinaten

$$P_1 = (0; R) \approx (0; 238.1822)$$

$$P_2 = (R \cdot \cos(18^\circ); R \cdot \sin(18^\circ)) = \left(\frac{L \cdot \cos(18^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)}, \frac{L \cdot \sin(18^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)} \right) \approx (226.525; 73.602)$$

$$P_3 = (R \cdot \cos(306^\circ); R \cdot \sin(306^\circ)) = \left(\frac{L \cdot \cos(306^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)}, \frac{L \cdot \sin(306^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)} \right) \approx (140; -192.693)$$

$$P_4 = (R \cdot \cos(234^\circ); R \cdot \sin(234^\circ)) = \left(\frac{L \cdot \cos(234^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)}, \frac{L \cdot \sin(234^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)} \right) \approx (-140; -192.693)$$

$$P_5 = (R \cdot \cos(162^\circ); R \cdot \sin(162^\circ)) = \left(\frac{L \cdot \cos(162^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)}, \frac{L \cdot \sin(162^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)} \right) \approx (-226.525; 73.602)$$

Die Fläche

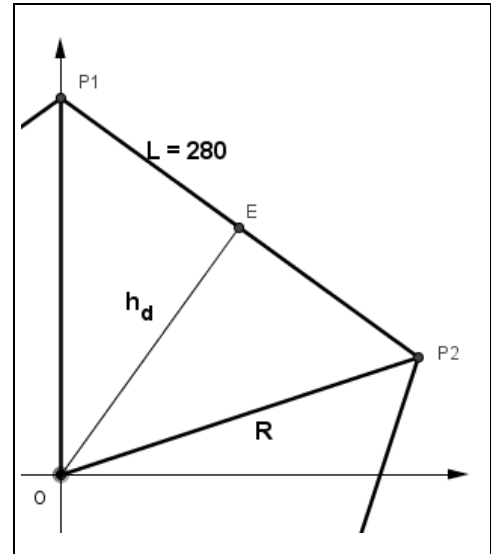
$$A = 5 \cdot \frac{L}{2} \cdot h_d = \frac{5}{4} \cdot \cot(36^\circ) \cdot L^2 \quad A = 134885.428 m^2$$

Lösung zu b)

Für ein n -Eck ergibt sich für den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{n}$; außerdem wird die Zahl 5 in obiger Gleichung durch n ersetzt:

$$A(n, L) = \frac{n}{4} \cdot \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot L^2 = \frac{n}{4 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot L^2$$

Zum Beispiel: $A(6, L) \approx 2.598 \cdot L^2$ $A(8, L) \approx 4.828 \cdot L^2$



Lösung zu c)

Die Fläche des Pentagons: $A_p = \frac{V}{h} = 100000 m^2$

Die Fläche des Innenfünfecks $A_{pi} = 35000 m^2$

Lösung zu d) / e)

Die Länge der Innenwände lässt sich am einfachsten aus einer Verhältnisgleichung ermitteln:

$$\frac{A_{pi}}{A_p} = \frac{l^2}{L^2} \Rightarrow l = L \cdot \sqrt{\frac{A_{pi}}{A_p}} \quad l = 142.62956 m \quad r = 121.32795 m$$

Die Punkte P₆ bis P₁₀ werden wie unter a) berechnet:

$$P_1 = (0; r) \approx (0; 121.32795)$$

$$P_2 = (r \cdot \cos(18^\circ); r \cdot \sin(18^\circ)) = \left(\frac{l \cdot \cos(18^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)}; \frac{l \cdot \sin(18^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)} \right) \approx (115.3897; 37.4924)$$

$$P_3 = (r \cdot \cos(306^\circ); r \cdot \sin(306^\circ)) = \left(\frac{l \cdot \cos(306^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)}; \frac{l \cdot \sin(306^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)} \right) \approx (71.3145; -98.1564)$$

$$P_4 = (r \cdot \cos(234^\circ); r \cdot \sin(234^\circ)) = \left(\frac{l \cdot \cos(234^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)}; \frac{l \cdot \sin(234^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)} \right) \approx (-71.3145; -98.1564)$$

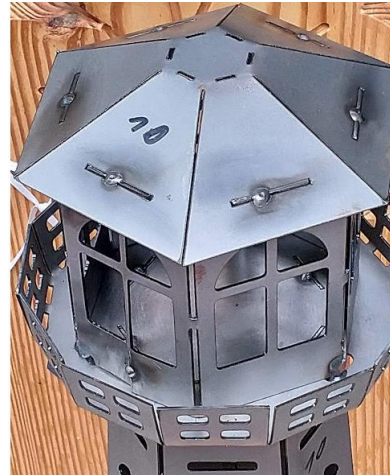
$$P_5 = (r \cdot \cos(162^\circ); r \cdot \sin(162^\circ)) = \left(\frac{l \cdot \cos(162^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)}; \frac{l \cdot \sin(162^\circ)}{2 \cdot \sin(36^\circ)} \right) \approx (115.3897; 37.4924)$$

Abdeckung eines Leuchtturms

Ostfriesland ist bekannt für Windmühlen und Leuchttürme, z. B. für den Pilsumer Leuchtturm⁴, bekannt aus einem Otto-Film.



In einem Emden Geschäft steht ein aus rostfreiem Edelstahl gefertigtes Modell mit einer Abdeckung in Form eines unten offenen Sechseckpyramidenstumpfes.



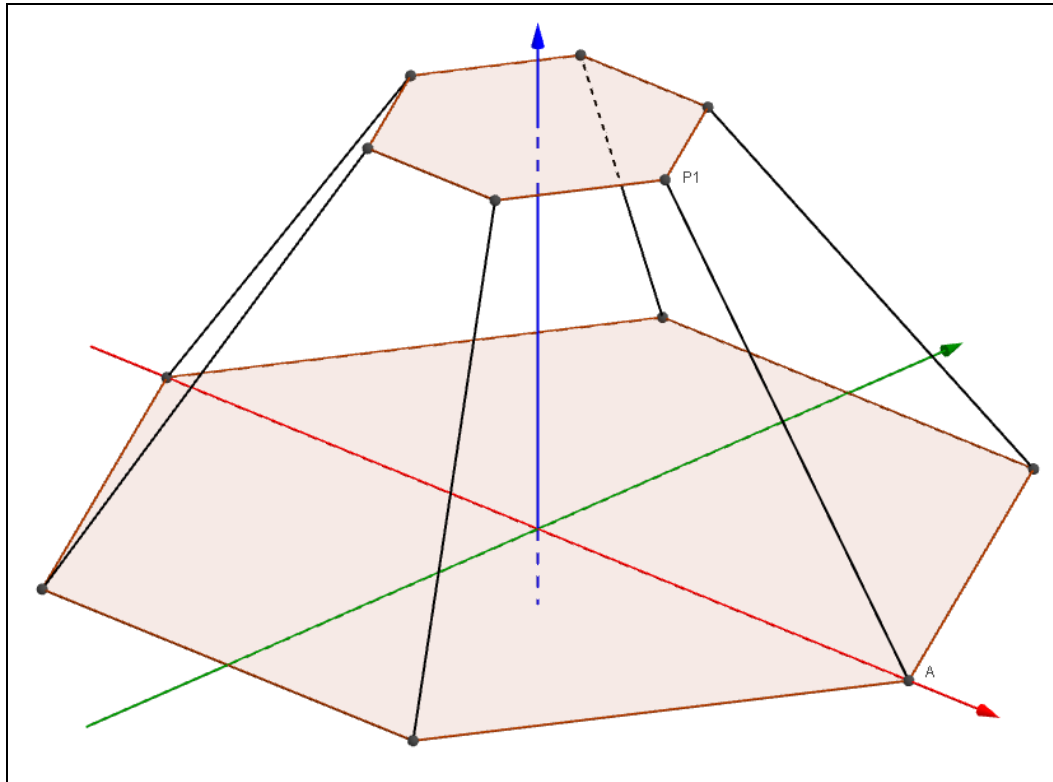
Diese Abdeckung für sich betrachtet soll Gegenstand der nachfolgenden Erörterung sein.

Der Pyramidenstumpf besteht aus einem oberen regelmäßigen Sechseck mit der Kantenlänge l ($= 2 \text{ LE}$) und sechs an die Kanten angefügten Trapezen mit den parallelen Seiten l und L ; diese Trapeze werden so nach unten gebogen, dass die Seiten der Trapeze an einander stoßen. Die Höhe der Pyramide habe dann die Höhe h ($= 5 \text{ LE}$), die Trapeze haben die Höhe H ($= 6 \text{ LE}$).

Aufgaben:

- 1) Gegeben sind also l , h und H mit $H > h$.
 - Skizzieren Sie die Sechseckpyramide in einem 3-dim-KS! Der Punkt P_1 des oberen Sechsecks habe die Koordinaten $P_1 = (l/0/h)$. Bestimmen Sie dann im Gegenuhrzeigersinn die weiteren Punkte P_2 bis P_6 !
 - Der Punkt A des unteren Sechsecks habe die Koordinaten $A = (L/0/0)$. Geben Sie entsprechend die weiteren Punkte B bis F in Abhängigkeit von L an.
 - Bestimmen Sie dann L in Abhängigkeit von l , h und H !
- 2) Klappen Sie die Sechseckpyramide auf und zeichnen Sie die in die x - y -Ebene gelegte Abwicklung und bestimmen Sie den Radius des Umkreises, der alle äußeren Punkte der Trapeze enthält.
- 3) Die Abwicklung liegt in einem Rechteck. Bestimmen mit den angegebenen Zahlenwerten die Maße dieses Rechtecks und damit seine Fläche (Blechbedarf), die Fläche der Abwicklung und den Verschnitt in Prozent!
- 4) Berechnen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes V in Abhängigkeit von l , h und H !
- 5) Zeichnen Sie VA , SA und DS des Pyramidenstumpfes!

Lösungen zu 1)



In einem regelmäßigen Sechseck ist die Kantenlänge gleich dem Radius des Umkreises, hier nicht gezeichnet. Projiziert man das obere Sechseck in die x - y -Ebene, dann genügt es, als weiteren Punkt P_2^* zu berechnen, von dem der x -Wert bekannt ist. P_2^* liegt auf der

Ursprungsgeraden $y = \tan(60^\circ) \cdot x$ mit $x = \frac{l}{2}$. daraus folgt für y : $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$

Für das obere und das untere Sechseck ergeben sich also folgende Punkte:

$$P_1 = (l/0/h)$$

$$A = (L/0/0)$$

$$P_2 = \left(\frac{l}{2} / \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3} / h \right)$$

$$B = \left(\frac{L}{2} / \frac{L}{2} \cdot \sqrt{3} / 0 \right)$$

$$P_3 = \left(-\frac{l}{2} / \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3} / h \right)$$

$$C = \left(-\frac{L}{2} / \frac{L}{2} \cdot \sqrt{3} / 0 \right)$$

$$P_4 = (-l/0/h)$$

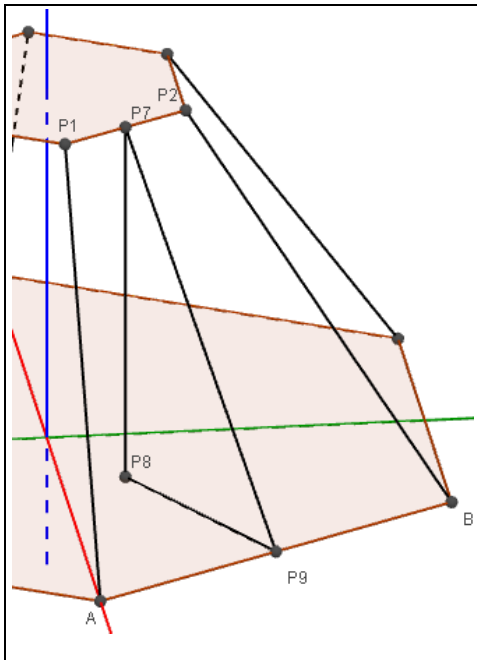
$$D = (L/0/0)$$

$$P_5 = \left(-\frac{l}{2} / -\frac{l}{2} \cdot \sqrt{3} / h \right)$$

$$E = \left(-\frac{L}{2} / -\frac{L}{2} \cdot \sqrt{3} / 0 \right)$$

$$P_6 = \left(\frac{l}{2} / -\frac{l}{2} \cdot \sqrt{3} / h \right)$$

$$F = \left(\frac{L}{2} / -\frac{L}{2} \cdot \sqrt{3} / 0 \right)$$

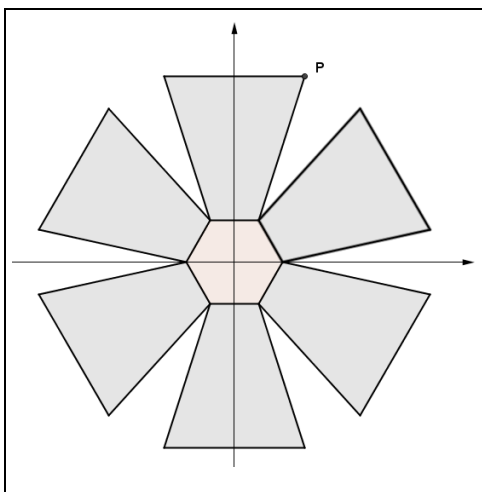


Die Kantenlänge $L = \overline{AB}$ lässt sich aus dem eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck berechnen. P7 ist die Mitte von $\overline{P_1P_2}$, P8 die senkrechte Projektion von P7 auf die x-y-Ebene und P9 die Mitte von $\overline{AB}$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} P_7 &= \left(\frac{3}{4} \cdot l \mid \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l \mid h \right) & \overline{P_7P_8} &= h \\ P_8 &= \left(\frac{3}{4} \cdot l \mid \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l \mid 0 \right) & \text{mit } \overline{P_7P_9} &= H \\ P_9 &= \left(\frac{3}{4} \cdot L \mid \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l \mid 0 \right) & \overline{P_8P_9} &= \frac{\sqrt{3}}{2} (L - l) \end{aligned}$$

Pythagoras liefert: $h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (L - l) \right)^2 = H^2 \Rightarrow L = l + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{H^2 - h^2}$

Lösungen zu 2)



Benötigt werden die Koordinaten des Punktes P.

Der x-Wert: $x = \frac{L}{2} = \frac{l}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{H^2 - h^2}$

Der y-Wert: $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l + H$

Der Radius r berechnet sich dann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras zu

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r(l, h, H) = \frac{\sqrt{3 \cdot \left(3 \cdot l^2 + l \cdot \left(\sqrt{H^2 - h^2} + 3 \cdot H \right) \cdot \sqrt{3} - h^2 + 4 \cdot H^2 \right)}}{3}$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten ergibt sich

$$r(2,5,6) \approx 8.263 LE$$

Lösungen zu 3)

Das Rechteck hat die Länge $L = 2 \cdot r$ und die Breite $B = 2 \cdot y$ (siehe Aufgabe 2))

Mit den angegebenen Zahlenwerten erhält man den Blechbedarf zu

$$A_b = 16.526 \cdot 15.464 = 255.567 \text{ FE}$$

Die Fläche der Abwicklung setzt sich zusammen aus sechs Trapezen mit

$$A_t = 6 \cdot \frac{L+I}{2} \cdot H \approx 140.935 \text{ FE} \text{ und einem Sechseck mit } A_s = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot I^2 \approx 10.392 \text{ FE}$$

Damit hat die Abwicklung eine Gesamtfläche von $A_{\text{ges}} = 151.327 \text{ FE}$.

Der Verschnitt in Prozent ergibt sich zu

$$A_{\text{v}\%} = \frac{A_b - A_{\text{ges}}}{A_b} \cdot 100\% = 40.788\%$$

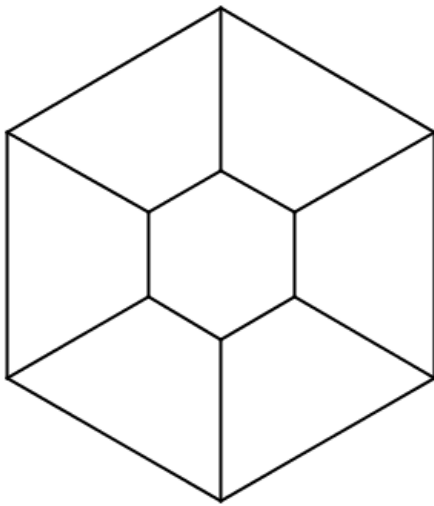
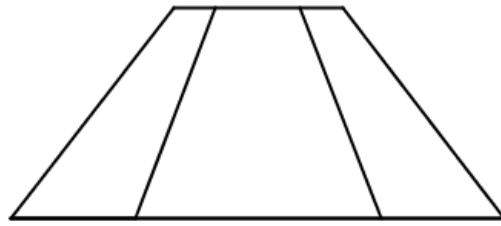
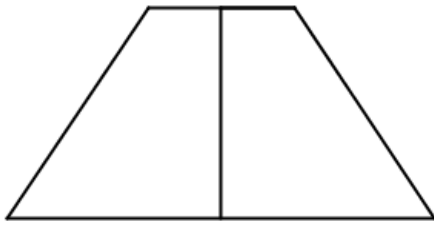
Lösung zu 4)

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A_1 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} + A_2) \\ V &= \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot I^2 + \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot I^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot L^2} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot L^2 \right) \\ V &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h \cdot I \cdot (I + L + L^2) \end{aligned} \right\} \text{ mit } L = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot (H^2 - h^2) + I$$

$$V = \frac{I \cdot (3 \cdot I^2 - 2 \cdot I \cdot (2 \cdot h^2 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot H^2 \cdot \sqrt{3} - 3) + 2 \cdot (h^2 - H^2) \cdot (2 \cdot h^2 - 2 \cdot H^2 - \sqrt{3})) \cdot h \cdot \sqrt{3}}{6}$$

$$V(2,5,6) \approx 2016.4697 \text{ VE}$$

Lösung zu 5)



Große Voliere im Vogelpark Walsrode

Ein Teil der großen Voliere im Vogelpark Walsrode ist eine Stahlbaukonstruktion, die eine Achteck-Pyramide (mit Auflagerpunkten in ca. 10 m Höhe) bildet (Bild 1).

Diese ist in den Bildern 2 und 3 vereinfacht dargestellt.

Die Punkte des Achtecks liegen auf einem Umkreis mit Radius r ($= 20$ m); die Höhe der Pyramide betrage h ($= 12$ m).



Bild 1: Stahlbaukonstruktion im Vogelpark Walsrode

Aufgaben:

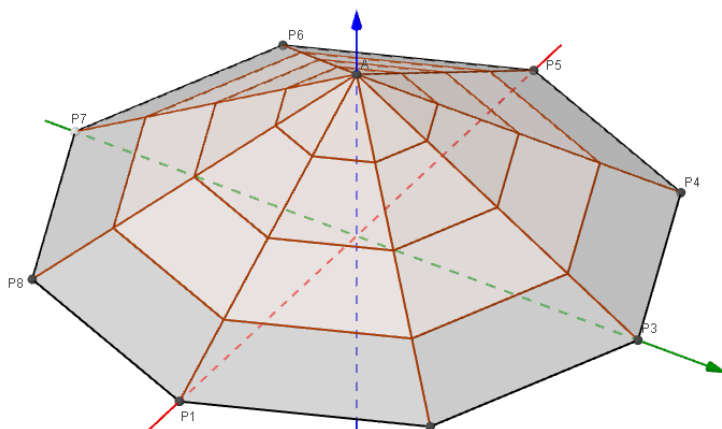


Bild 2: Achteckpyramide (vereinfacht)

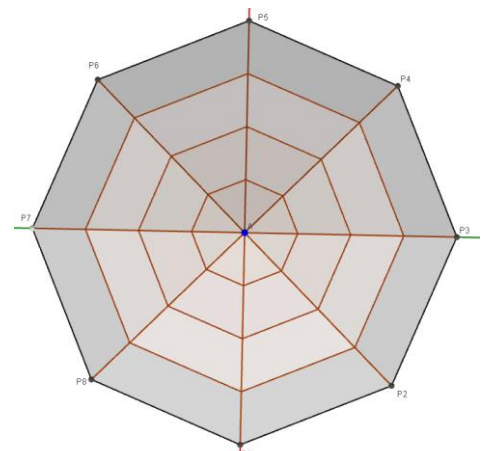
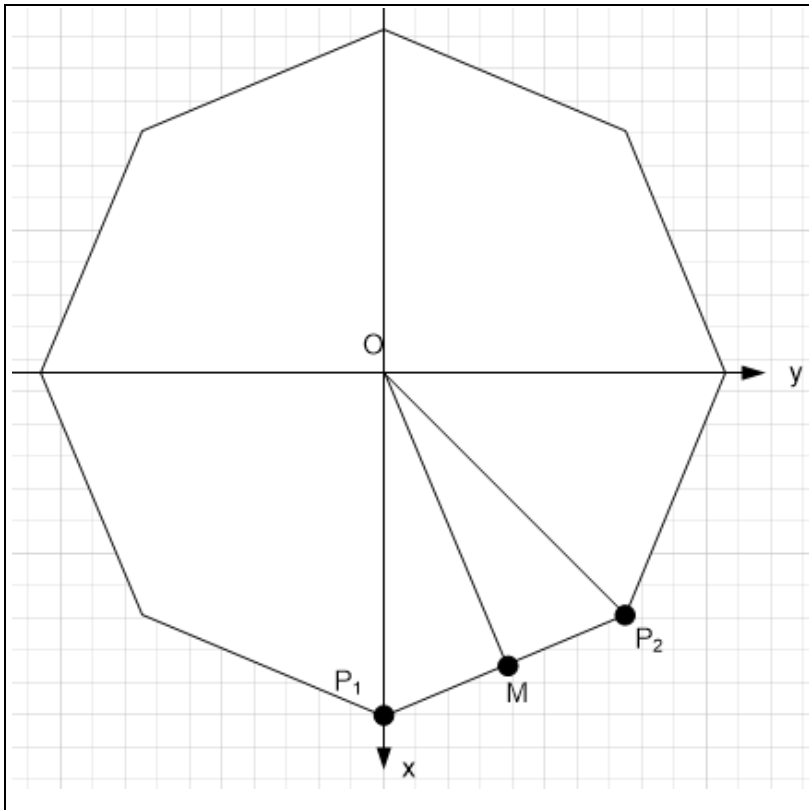


Bild 3: Draufsicht

- Legen Sie die Punkte P_1 bis P_8 in die x - y -Ebene und berechnen Sie diese und A in allgemeiner Form!
- Die vier Achteckebenen sind gleichmäßig auf die Höhe h verteilt. Bestimmen Sie allgemein die Punkte P_1' , P_1'' und P_1''' , die auf der Kante $\overline{P_1A}$ liegen. Verfahren Sie entsprechend mit P_2' etc. Begründen Sie, warum sich damit alle weiteren Eckpunkte der vier Achteckebenen angeben lassen.
- Welche Gesamtlänge haben alle Längs- und Querträger? Trägerabmessungen bleiben unberücksichtigt!
- Bestimmen Sie die Gesamtfläche (unten offen) und das Volumen der Pyramide!
- Die Pyramidenkanten (z. B. $\overline{P_1A}$) und die Seitenflächen bilden mit der x - y -Ebene Winkel. Berechnen Sie diese!

Lösung a)



Es genügt, die Punkte P_1 und P_2 einzuzichnen:

$$P_1 = (r, 0, 0)$$

$$P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r, 0 \right)$$

$$P_3 = (0, r, 0)$$

$$P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r, 0 \right)$$

$$P_5 = (-r, 0, 0)$$

$$P_6 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r, -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r, 0 \right)$$

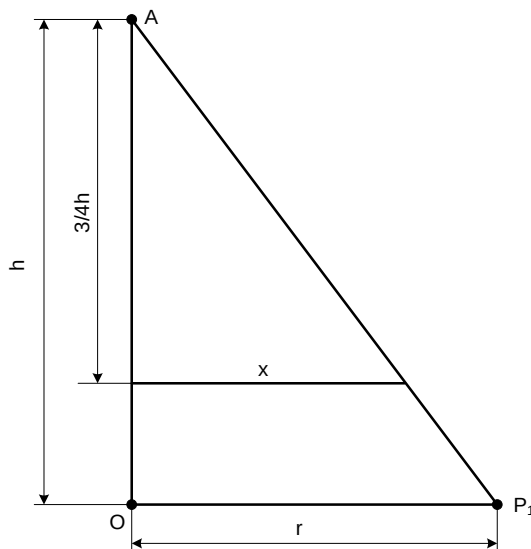
$$P_7 = (0, -r, 0)$$

$$P_8 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r, -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r, 0 \right)$$

$$A = (0, 0, h)$$

Der Punkt M wird später benötigt.

Lösung b)



Für das $\triangle O P_1 A$ gilt:

$$\frac{x}{r} = \frac{\frac{3}{4} \cdot h}{h} \rightarrow x = \frac{3}{4} \cdot r$$

Damit erhält man für P_1' :

$$P_1' = \left(\frac{3}{4} r, 0, \frac{h}{4} \right)$$

Analog erhält man

$$P_1'' = \left(\frac{r}{2}, 0, \frac{h}{2} \right) \text{ und } P_1''' = \left(\frac{1}{4} r, 0, \frac{3}{4} h \right)$$

Es ergeben sich immer die Verhältnisse $\frac{3}{4}, \frac{2}{4}$ und $\frac{1}{4}$, dementsprechend erhält man für P_2 die Koordinaten $P_2 = \left(\frac{3}{8}\sqrt{2} \cdot r, \frac{3}{8}\sqrt{2} \cdot r, \frac{h}{4} \right)$. Die anderen Punkte werden hier nicht aufgeführt, können aber entsprechend abgeleitet werden.

Lösung c)

$\overline{P_1P_2}$ ergibt sich aus dem gleichschenkligen Dreieck $\triangle OP_1P_2$ mit den Schenkellängen r und den von den Schenkeln eingeschlossenen Winkel $\alpha = 45^\circ$, z. B. mit dem Kosinussatz oder der Abstandsformel für zwei Punkte:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r - r\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r\right)^2} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \text{Querträger (8)}$$

oder

$$\left(\overline{P_1P_2}\right)^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r^2 \cdot \cos(45^\circ) = r^2 \cdot \left(2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\overline{P_1P_2} = r \cdot \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)$$

$$\overline{P_1P_2'} = \frac{3}{4} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r - r\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r\right)^2} = \frac{3}{4} r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \text{Querträger (8')}$$

$$\overline{P_1''P_2''} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r - r\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r\right)^2} = \frac{1}{2} r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \text{Querträger (8'')}$$

$$\overline{P_1'''P_2'''} = \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r - r\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r\right)^2} = \frac{1}{4} r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \text{Querträger (8''')}$$

$$\overline{P_1A} = \sqrt{r^2 + h^2} \quad \text{Längsträger (8)}$$

$$L_{\text{ges}} = 8 \cdot \left[r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \frac{3}{4} \cdot r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \frac{1}{4} \cdot r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{r^2 + h^2} \right]$$

$$\boxed{L_{\text{ges}} = 20 \cdot r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} + 8 \cdot \sqrt{r^2 + h^2}}$$

Lösung d)

Die Gesamtfläche besteht aus acht Dreiecken wie z. B. $\triangle P_1 P_2 A$; zu bestimmen ist hier noch die Strecke $\overline{MA}$. M hat die Koordinaten

$$M = \left(\frac{r + \frac{\sqrt{2}}{2}r}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}r, 0 \right) = \left(\frac{r}{4} \cdot (2 + \sqrt{2}), \frac{r}{4} \cdot \sqrt{2}, 0 \right)$$

$$\overline{MA} = \sqrt{\left(\frac{r}{4} \cdot (2 + \sqrt{2}) \right)^2 + \left(\frac{r}{4} \sqrt{2} \right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{r^2}{4} \cdot (2 + \sqrt{2}) + h^2}$$

$$A_{\text{ges}} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{r^2}{4} \cdot (2 + \sqrt{2}) + h^2} \cdot r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$A_{\text{ges}} = 4r \cdot \sqrt{\frac{r^2}{4} \cdot (2 + \sqrt{2}) + h^2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Zeigen Sie, dass diese Formel auch geschrieben werden kann als

$$A_{\text{ges}} = 2r \cdot \sqrt{2 \cdot (r^2 + 2h^2 \cdot (2 - \sqrt{2}))}$$

Fläche des 8-Ecks in der unteren Ebene

$$\left. \begin{aligned} A &= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{P_1 P_2} \cdot \overline{MO} \\ A &= 4 \cdot r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{r}{4} \cdot (2 + \sqrt{2}) \right)^2 + \left(\frac{r}{4} \cdot \sqrt{2} \right)^2} \\ A &= 4 \cdot r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{r}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \rightarrow A = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r^2$$

Dieses Ergebnis findet man auch im Tabellenbuch-Metall (Europa-Verlag) unter dem Stichwort *Berechnung regelmäßiger Vielecke mit Hilfe von Tabellenwerten*.

Volumen der 8-Eck-Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h \qquad V = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot r^2 \cdot h$$

Lösung e)

Winkel α zwischen der x-y-Ebene und der Kante $\overline{P_1A}$ (siehe Skizze unter b))

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{r} \rightarrow \boxed{\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{h}{r}\right)}$$

Der Winkel β zwischen der x-y-Ebene und dem ΔP_1P_2A lässt sich im ΔOMA bestimmen:

$$\tan(\beta) = \frac{h}{OM} = \frac{h}{\frac{r}{2} \cdot (2 + \sqrt{2})} \rightarrow \boxed{\beta = \tan^{-1}\left(\frac{2h}{r \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}}\right)}$$

Rechnungen mit dem TI-NspireCAS

Voliere Walsrode

Definition der Formeln

$$\text{Iges}(r,h) := 20 \cdot r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} + 8 \cdot \sqrt{r^2 + h^2} \quad \text{Fertig}$$

$$\text{ages}(r,h) := 2 \cdot r \cdot \sqrt{2 \cdot (r^2 + 2 \cdot h^2 \cdot (2 - \sqrt{2}))} \quad \text{Fertig}$$

$$\text{a}(r,h) := 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r^2; \text{v}(r,h) := \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot r^2 \cdot h \quad \text{Fertig}$$

$$\alpha(r,h) := \tan^{-1}\left(\frac{h}{r}\right); \beta(r,h) := \tan^{-1}\left(\frac{2 \cdot h}{r \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}}\right) \quad \text{Fertig}$$

Rechnungen mit $r = 20$ und $h = 12$

$$\text{Iges}(20.,12) \rightarrow 492.737$$

$$\text{ages}(20.,12) \rightarrow 1349.02$$

$$\text{a}(20.,12) \rightarrow 1131.37$$

$$(\alpha(20.,12)) \rightarrow \text{DD} \rightarrow 30.9638^\circ$$

$$(\beta(20.,12)) \rightarrow \text{DD} \rightarrow 33.0011^\circ$$

Geometrie an einem Sonnenschirm

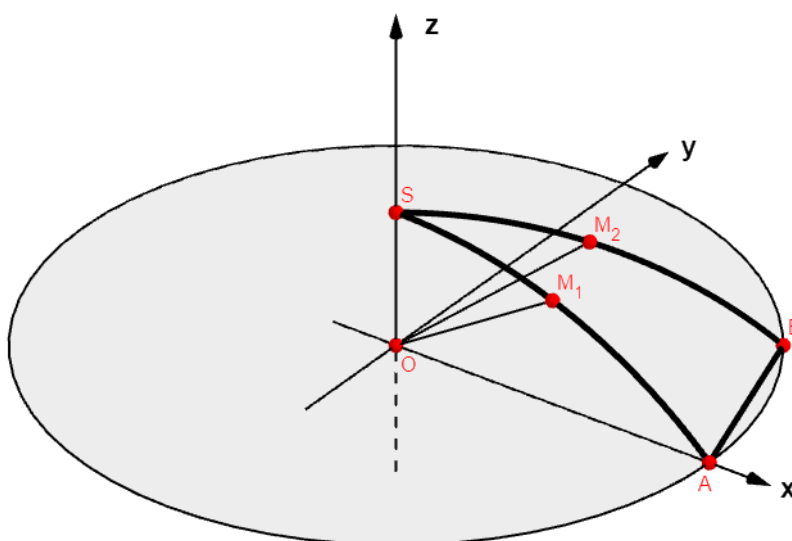


Am Strand von Zambrone in Kalabrien (Italien) sind diese Sonnenschirme zu sehen, die ein interessantes dreidimensionales Objekt darstellen, an denen im Folgenden einige Betrachtungen angestellt werden sollen.

Siehe dazu die Zeichnung unten; dargestellt ist ein Segment des Sonnenschirms.

Dazu sollen folgende Vereinfachungen gelten:

- Die unteren Spannpunkte (A, B,...) des Sonnenschirms liegen auf einem Kreis mit Radius r ($= 1$ m) und bilden ein Zehneck.
- Für die nachstehenden Aufgaben werden sie in die x-y-Ebene gelegt.
- Die Fußpunkte der Querstreben liegen im Ursprung und spannen die gebogenen Längsstreben in der Mitte ($M_1, \dots$) auf.
- Die Bögen AS ($BS\dots$) seien kreisförmig
- Der Abstand vom Ursprung der x-y-Ebene bis zur Spitze S des aufgespannten Schirms betrage $k \cdot r$ mit $\frac{1}{5} \leq k \leq \frac{2}{5}$ und der Schrittweite $s = \frac{1}{20} \cdot r$.



Aufgaben:

- 1) Bestimmen Sie in allgemeiner Form die Punkte A, B, S, den Mittelpunkt M der Kreisbögen (in der Zeichnung nicht zu sehen) und den Radius R der Kreisbögen in Abhängigkeit von r und k!
- 2) Der eingezeichnete Stützpunkt M_1 ist für $r = 1$ und $k = 2/5$ zu berechnen. Versuchen Sie auch diesen in allgemeiner Form darzustellen!
- 3) Im ungespannten Zustand ist der Bogen AS geradlinig. Berechnen Sie $\overline{AS}$, $\overline{OM_1}$ und daraus die Gesamtlänge aller Längs- und Stützstreben.
- 4) Der Bogen AS ist Teil eines Kreises um M mit Radius R. Ermitteln Sie die Länge dieses Bogens und geben Sie an, um wieviel Prozent die Strecke $\overline{AS}$ gedehnt wird.
- 5) Der gespannte Sonnenschirm wird nun vereinfacht betrachtet als Teil einer Kugel um M mit Radius R, also als Kugelsegment.
 - Geben Sie die Kugelgleichung an!
 - Wie groß ist die Oberfläche dieses Kugelsegments?
 - Vergleichen Sie diese Fläche mit der die durch senkrechte Projektion des Kugelsegments in die x-y-Ebene entsteht!

Lösungen:

Zu 1)

$$A = (r / 0 / 0) \quad B = \left(r \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) / r \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) / 0 \right) \quad S = (0 / 0 / k \cdot r)$$

Zur Bestimmung von M wird der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf $\overline{AS}$ mit der z-Achse benötigt. Dazu bestimmt man $m_{AS} = -k$ und die Mitte von $\overline{AS}$ zu

$$M_{AS} = \left(\frac{r}{2} / 0 / \frac{k \cdot r}{2} \right). \text{ Die zu } \overline{AS} \text{ orthogonale Gerade hat die Steigung } m = \frac{1}{k} \text{ und man}$$

erhält im x-z-KS die Gleichung der Mittelsenkrechten zu $z = \frac{1}{k} \cdot x + \frac{r}{2 \cdot k} \cdot (k^2 - 1)$.

Für den Mittelpunkt der Kreisbögen erhält man schließlich

$$M = \left(0 / 0 / \frac{r}{2k} \cdot (k^2 - 1) \right)$$

Der Radius R der Kreisbögen ergibt sich aus den z-Werten von S und M.

$$R = k \cdot r - \frac{r}{2k} \cdot (k^2 - 1) = \frac{r}{2k} \cdot (k^2 + 1)$$

Für $k = 2/5$ erhält man folgende Werte:

$$A = (r / 0 / 0) \quad B \approx (0.809 \cdot r / 0.5878 \cdot r / 0) \quad S = \left(0 / 0 / \frac{2}{5} r \right)$$

$$M = \left(0 / 0 / -\frac{21}{20} \cdot r \right) \quad R = \frac{29}{20} \cdot r$$

Zu 2)

Der Punkt M_1 liegt auf einem Kreis um M mit Radius R. Dieser hat im x-z-KS die Gleichung

$$x^2 + \left(z - \frac{r}{2k} \cdot (k^2 - 1) \right)^2 = \left(\frac{r}{2k} \cdot (k^2 + 1) \right)^2 \text{ Die x-Koordinate von } M_1 \text{ beträgt } r/2.$$

Daraus ergibt sich die zu lösende Gleichung für die z-Koordinate zu

$$\frac{r^2}{4} + \left(z - \frac{r}{2k} \cdot (k^2 - 1) \right)^2 = \left(\frac{r}{2k} \cdot (k^2 + 1) \right)^2 \text{ mit den Lösungen}$$

$$z_1 = \frac{-\left(\sqrt{k^4 + k^2 + 1} - k^2 + 1\right) \cdot r}{2k} \quad \text{bzw.} \quad z_2 = \frac{\left(\sqrt{k^4 + k^2 + 1} + k^2 - 1\right) \cdot r}{2k}$$

$$\text{Für } k = 2/5 \text{ erhält man: } M_1 = \left(\frac{r}{2} / 0 / 0.311066 \cdot r \right)$$

Zu 3)

$$\overline{AS} = \sqrt{r^2 + (k \cdot r)^2} = r \cdot \sqrt{1 + k^2} \quad \text{Mit } k = 2/5 \text{ erhält man} \quad \overline{AS} = r \cdot \sqrt{\frac{29}{25}} \approx 1.07703296 \cdot r$$

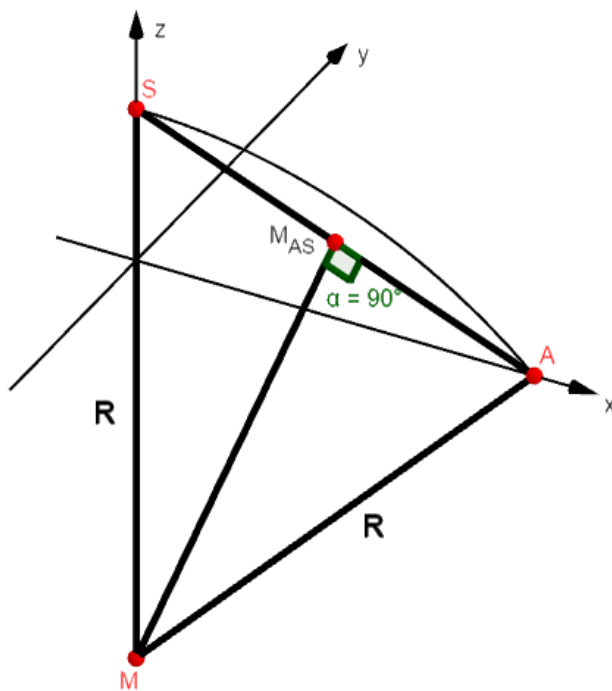
$$\overline{OM_1} = \frac{\sqrt{2 \cdot (k^2 - 1) \cdot (\sqrt{k^4 + k^2 + 1} + k^4 + 1)} \cdot r}{2k} \quad k=2/5 \quad \overline{OM_1} \approx 0.588865 \cdot r$$

Die Gesamtlänge aller Streben beträgt demnach $L = 10 \cdot (\overline{AS} + \overline{OM_1}) = 17.93025 \cdot r$

Zu 4)

Kreis um M mit Radius R im x-z-Koordinatensystem siehe oben.

Für die Länge des Bogens benötigt man den Winkel bei M, der von $\overline{MS}$ und $\overline{MA}$ gebildet wird. Der lässt sich beispielsweise vektoriell mit Hilfe eines Skalarprodukts berechnen.



Oder aus dem rechtwinkligen $\Delta_{MAM_{AS}}$ mit

der Hypotenuse $\overline{MA} = R = \frac{r}{2k} \cdot (k^2 + 1)$

und der Gegenkathete $\overline{AM_{AS}} = r \cdot \sqrt{k^2 + 1}$

Mit $\beta = \sin^{-1}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}\right)$ erhält man den halben Winkel α , also

$$\alpha = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}\right) \text{ (in rad).}$$

$$\overline{AS} = R \cdot \alpha = \frac{r}{k} \cdot (k^2 + 1) \cdot \sin^{-1}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}\right)$$

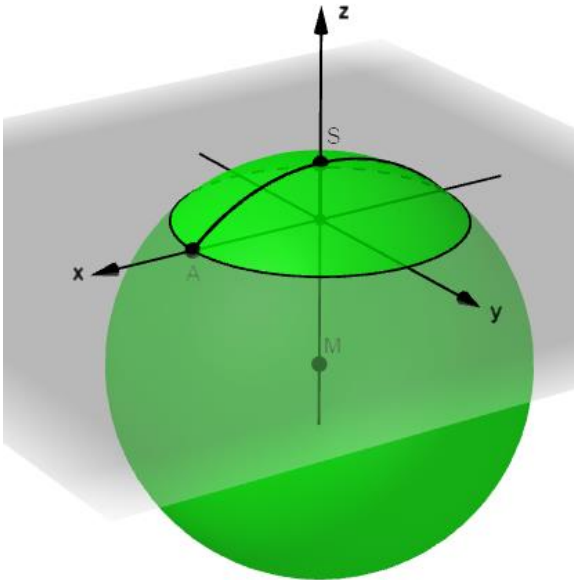
Mit $k = 2/5$ erhält man eine Bogenlänge $\overline{AS} = 1.1034685 \cdot r$ bei einem Winkel α von etwa 43.6° .

Die Verlängerung von $\overline{AS}$ beträgt damit 2.45 %.

Für $k = 2/5$ erhält man mit den Vektoren $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{29}{20} \cdot r \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \frac{21}{20} \cdot r \end{pmatrix}$ aus dem

Skalarprodukt denselben Winkelwert für α .

Zu 5)



Die Kugel hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{r}{2k} \cdot (k^2 - 1) \right)^2 = \left(\frac{r}{2k} \cdot (k^2 + 1) \right)^2$$

Mit $k = 2/5$ erhält man

$$x^2 + y^2 + \left(z + \frac{21}{20} \cdot r \right)^2 = \left(\frac{29}{20} \cdot r \right)^2$$

Für die Oberfläche des Kugelsegments gilt die Gleichung

$$A_o = 2\pi \cdot R \cdot h \text{ wobei hier } h = \frac{2}{5} \cdot r \text{ und}$$

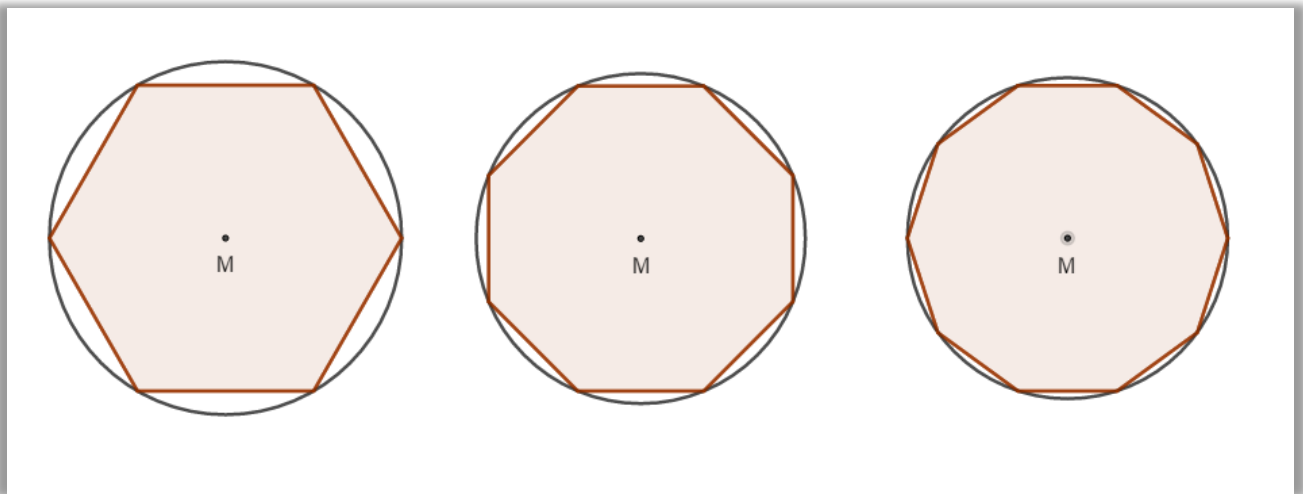
$$R = \frac{r}{2k} \cdot (k^2 + 1)$$

Also ergibt sich für das Kugelsegment die Fläche

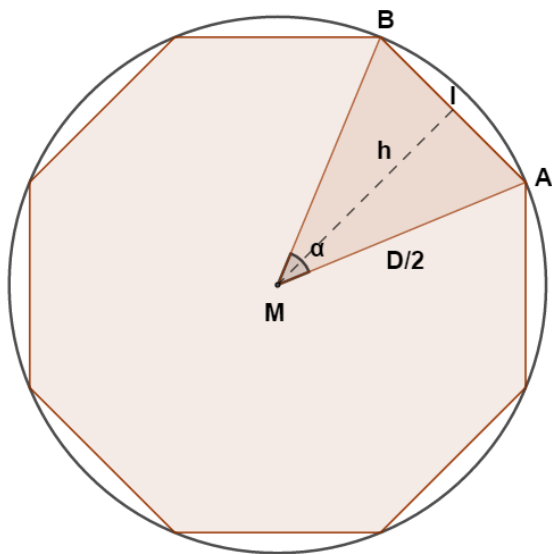
$$A_o = \frac{2 \cdot (k^2 + 1)}{5k} \pi \cdot r^2 \quad \text{mit } k = \frac{2}{5} \text{ erhält man} \quad A_o = \frac{29}{25} \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\text{Für die Projektion der Fläche ergibt sich natürlich} \quad A_p = \pi \cdot r^2$$

Die Berechnung von regelmäßigen Vielecken



Regelmäßige n-Ecke kommen in vielfältiger Form in Anwendungen vor, wie in einigen der folgenden Aufgaben gezeigt wird.



Unterteilt man die Vielecke in jeweils n gleichschenklige Dreiecke wie links beispielhaft bei einem Achteck gezeichnet, so lassen die Werte von α , l und h in allgemeiner Form darstellen.

Daraus lässt sich dann eine allgemeine Flächenformel für n -Ecke ermitteln.

$$A = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h \cdot n$$

Gegeben ist der Umkreisdurchmesser D des n -Ecks.

- Geben Sie den Winkel α in allgemeiner Form an.
- Ermitteln Sie die Länge $l = \overline{AB}$ und die Höhe des Dreiecks.
- Bestimmen Sie aus diesen Ergebnissen die allgemeine Flächenformel für ein n -Eck.
- Der Umfang $U = n \cdot l$ ergibt für $n \rightarrow \infty$ einen speziellen Wert. Wie groß ist der für $D = 1$?

Lösungen:

$$\triangleright \alpha = \frac{2 \cdot \pi}{n}$$

$$\triangleright \left. \begin{aligned} l^2 &= \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{D}{2} \cdot \cos(\alpha) \\ l^2 &= \frac{D^2}{4} \cdot \left(2 - 2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right)\right) \end{aligned} \right\} \rightarrow l(n, D) = \frac{D}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right)\right)}$$

$$\triangleright h = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{4}\right)^2 \cdot \left(2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right)\right)\right)} \rightarrow h(n, D) = \frac{D}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right)\right)}$$

$$\triangleright A = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{D^2}{8} \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right)\right)} \cdot 2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right)\right)$$

$$\triangleright A = \frac{n \cdot D^2}{8} \cdot \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right)}$$

$$\triangleright \boxed{A(n, D) = \frac{n}{4} \cdot D^2 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right)}$$

$\triangleright$ Für $n \rightarrow \infty$ nähert sich das n-Eck immer mehr einem Kreis an. Für $D = 1$ ergibt sich gemäß $U = \pi \cdot D$ der Wert $U = \pi$

Das heißt, der Grenzwert $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right)} \right)} = \pi$

Bei geg. Inkreisdurchmesser d erhält man folgende Formeln:

Seitenlänge l: $l(n, d) = \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot d$

Umfang U: $U(n, d) = \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot n \cdot d$

Fläche A: $A(n, d) = \frac{1}{4} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot n \cdot d^2$

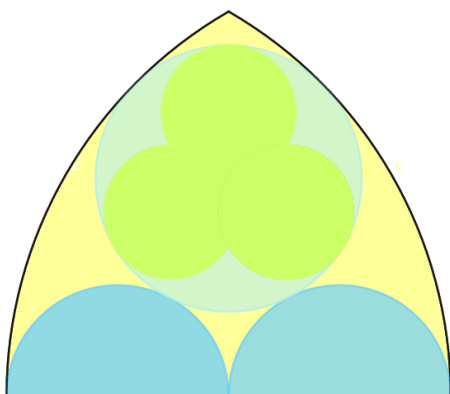
Die ermittelten Formeln dienen dazu, Tabellenwerte zu berechnen, die es dem Nutzer erlauben, auf einfache Art und Weise die benötigten Werte zu ermitteln. Die folgende Excel-Tabelle ist der Tabelle Im Tabellenbuch Metall⁵ nachempfunden.

Berechnung regelmäßiger Vielecke mit Hilfe von Tabellenwerten									
Ecken- zahl n	Fläche A ≈			Seitenlänge l ≈		Umkreis-		Inkreis-	
						durchmesser D ≈		durchmesser d ≈	
3	$0.375 \cdot D^2$	$1.299 \cdot d^2$	$0.433 \cdot l^2$	$0.867 \cdot D$	$1.732 \cdot d$	$1.154 \cdot l$	$2.000 \cdot d$	$0.578 \cdot l$	$0.500 \cdot D$
4	$0.500 \cdot D^2$	$1.000 \cdot d^2$	$1.000 \cdot l^2$	$0.707 \cdot D$	$1.000 \cdot d$	$1.414 \cdot l$	$1.414 \cdot d$	$1.000 \cdot l$	$0.707 \cdot D$
5	$0.595 \cdot D^2$	$0.908 \cdot d^2$	$1.721 \cdot l^2$	$0.588 \cdot D$	$0.727 \cdot d$	$1.702 \cdot l$	$1.236 \cdot d$	$1.376 \cdot l$	$0.809 \cdot D$
6	$0.649 \cdot D^2$	$0.866 \cdot d^2$	$2.598 \cdot l^2$	$0.500 \cdot D$	$0.577 \cdot d$	$2.000 \cdot l$	$1.155 \cdot d$	$1.732 \cdot l$	$0.866 \cdot D$
8	$0.707 \cdot D^2$	$0.829 \cdot d^2$	$4.828 \cdot l^2$	$0.383 \cdot D$	$0.414 \cdot d$	$2.614 \cdot l$	$1.082 \cdot d$	$2.414 \cdot l$	$0.924 \cdot D$
10	$0.735 \cdot D^2$	$0.812 \cdot d^2$	$7.694 \cdot l^2$	$0.309 \cdot D$	$0.325 \cdot d$	$3.236 \cdot l$	$1.052 \cdot d$	$3.078 \cdot l$	$0.951 \cdot D$
12	$0.750 \cdot D^2$	$0.804 \cdot d^2$	$11.196 \cdot l^2$	$0.259 \cdot D$	$0.268 \cdot d$	$3.864 \cdot l$	$1.035 \cdot d$	$3.732 \cdot l$	$0.966 \cdot D$

Beispiel: Zehneck mit $D = 15 \text{ mm}$ ges.: A, l

$$A = 0.735 \cdot D^2 = 0.735 \cdot 225 \text{ mm} = 165.375 \text{ mm}^2 \quad l = 0.309 \cdot 15 \text{ mm} = 4.635 \text{ mm}$$

Gotisches Maßwerkfenster mit Dreipass



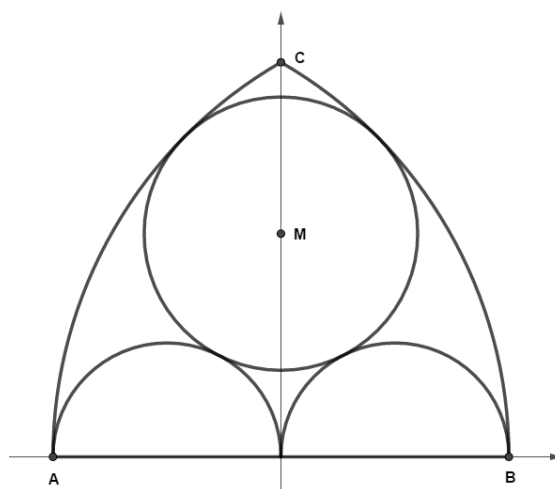
Diese GeoGebra-Darstellung – in ähnlicher Form bei H. K. Strick⁶ zu finden - gibt Anlass zu vielfältigen mathematischen – besonders geometrischen – Betrachtungen.

Aufgabe 1:

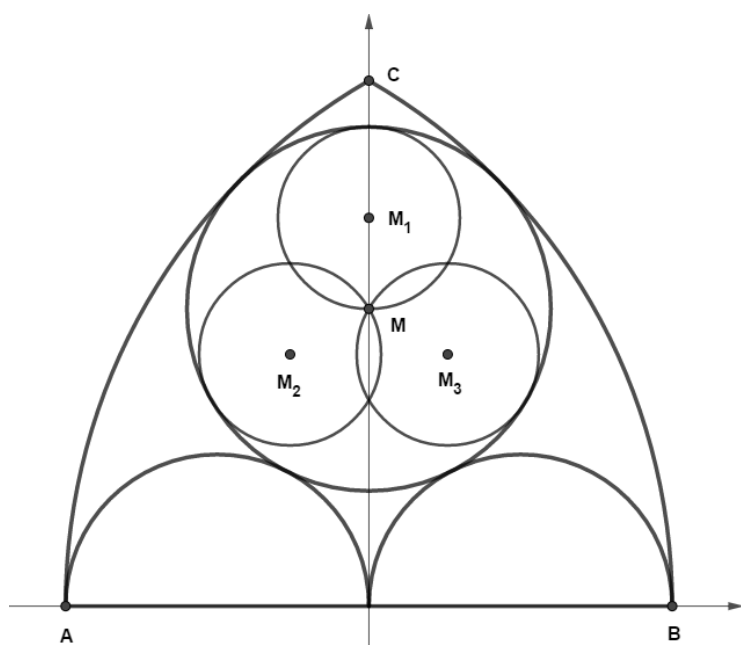
Der Spitzbogen entsteht durch zwei 60° -Kreisbögen, an der unteren Seite $\overline{AB} = r$ sind zwei Halbkreise eingetragen, darüber liegt ein Kreis, der die beiden Halbkreise und die äußeren Bögen berührt.

Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B und C in Abhängigkeit von r an.

Berechnen Sie dann die Koordinaten des Punktes M und den Radius R des Kreises in allgemeiner Form.



Aufgabe 2:

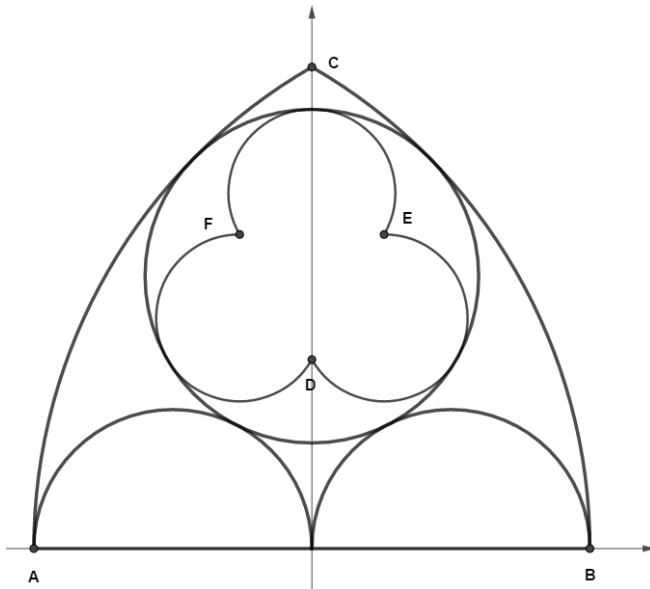


Um den Dreipass herstellen zu können, sind zunächst drei vollständige Kreise gezeichnet, von denen die Mittelpunkte und der Radius in Abhängigkeit von r berechnet werden sollen.

Bestimmen Sie die zusätzlichen drei Schnittpunkte D, E und F der kleinen Kreise.

D liegt senkrecht unter M; Bezeichnungen im Gegenuhrzeigersinn.

Aufgabe 3:



Berechnen Sie nun noch die Fläche des Dreipasses.

Lösung zu Aufgabe 1

Es gilt:

$$\triangle AOM : h^2 = (r - R)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$\triangle POM : h^2 = \left(\frac{r}{4} + R\right)^2 - \left(\frac{r}{4}\right)^2$$

Nach R aufgelöst erhält man

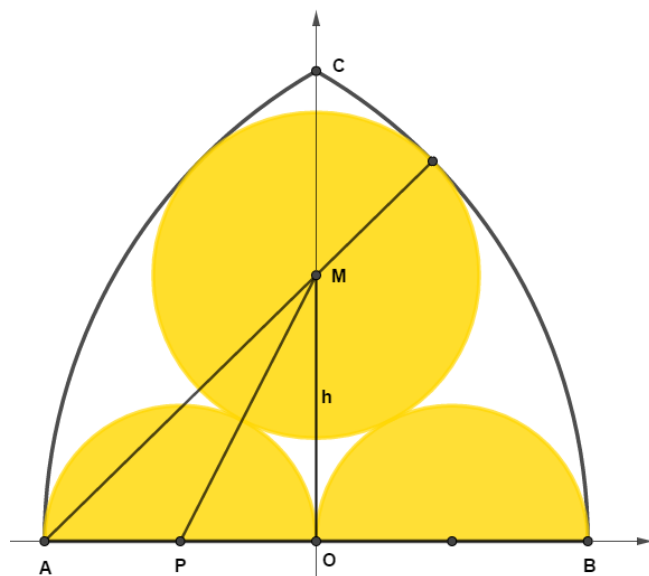
$$R = \frac{3}{10} \cdot r$$

Daraus lässt sich h (y-Komponente von M) berechnen.

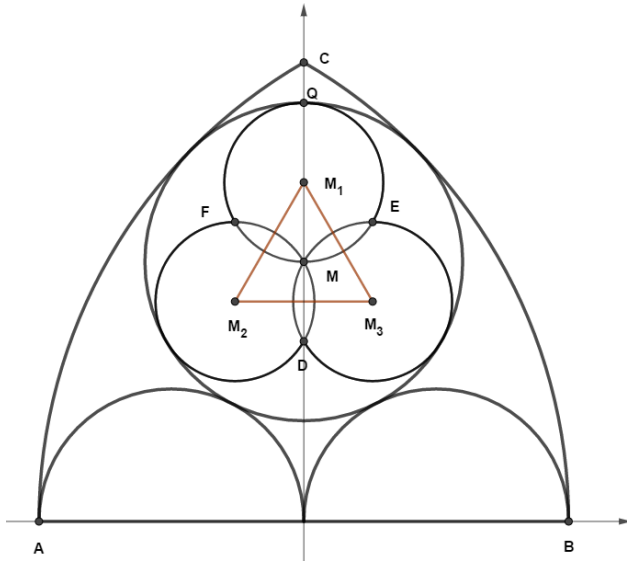
$$h^2 = \left(\frac{7}{10} \cdot r\right)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{5} \cdot r$$

Für die Koordinaten von M erhält man also:

$$M = \left(0; \frac{\sqrt{6}}{5} \cdot r\right)$$



Lösungen zu Aufgabe 2



Der Punkt M_1 liegt in der Mitte von $\overline{M_1Q}$, zu der y-Koordinate von M muss also $\frac{R}{2} = \frac{3}{20}r$ addiert werden.

$$M_1 = \left(0; \frac{r}{20} \cdot (4 \cdot \sqrt{6} + 3) \right)$$

Im gleichseitigen Dreieck $\Delta M_1 M_2 M_3$ ist M der Schwerpunkt und teilt die Höhe h_1 dieses Dreiecks im Verhältnis 1:2.

$$\overline{MM_1} = \frac{1}{2} \cdot R = \frac{3}{20} \cdot r \rightarrow h_1 = \frac{9}{40} \cdot r$$

Für die Seitenlänge dieses gls. Dreiecks gilt: $l = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot h_1 \rightarrow l = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{20} \cdot r$

Daraus ergeben sich die Koordinaten von M_2 und M_3 zu

$$M_2 = \left(-\frac{l}{2}; y(M_1 - h) \right) \text{ bzw. } M_3 = \left(\frac{l}{2}; y(M_1 - h) \right)$$

$$M_2 = \left(-\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{40} \cdot r; \frac{r}{40} \cdot (8 \cdot \sqrt{6} - 3) \right) \text{ und } M_3 = \left(\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{40} \cdot r; \frac{r}{40} \cdot (8 \cdot \sqrt{6} - 3) \right)$$

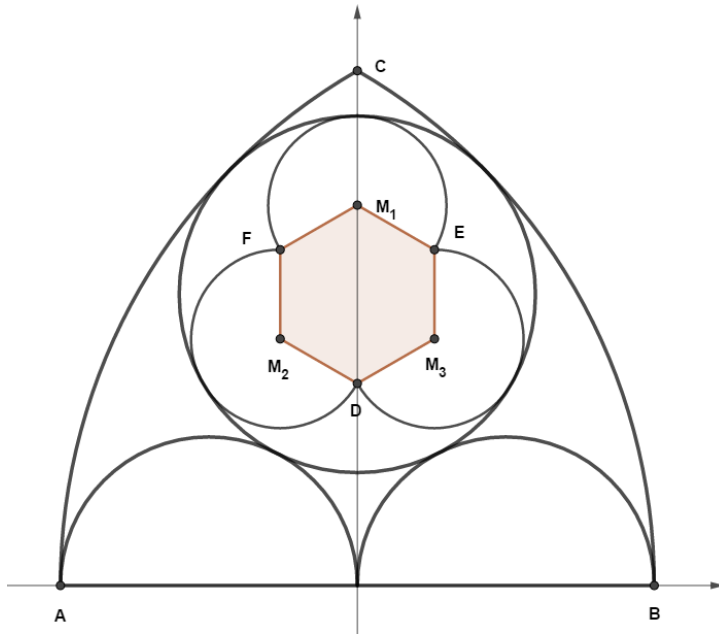
Für D, E, F gilt:

$$D = \left(0; y(M) - \frac{R}{2} \right) \quad E = \left(x(M_3); y(M_3) + \frac{R}{2} \right) \quad F = \left(-x(M_2); y(M_2) + \frac{R}{2} \right)$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} D &= \left(0; \frac{r}{20} \cdot (4 \cdot \sqrt{6} - 3) \right) \\ E &= \left(\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{40} \cdot r; \frac{8 \cdot \sqrt{6} + 3}{40} \cdot r \right) \\ F &= \left(-\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{40} \cdot r; \frac{8 \cdot \sqrt{6} + 3}{40} \cdot r \right) \end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 3



Die Fläche des Dreipasses setzt sich zusammen aus drei Kreissektoren mit jeweils $\alpha = 240^\circ$ und einem regelmäßigen Sechseck.

Die Kreissektoren haben den Radius

$$r_1 = \overline{MM_1} = \frac{3}{20} \cdot r.$$

Dies entspricht auch der Seitenlänge l_1 des Sechsecks.

Fläche der Kreissektoren und des Sechsecks:

$$\left. \begin{aligned} A_{ks} &= 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{20} \cdot r \right)^2 = \frac{9}{200} \cdot \pi \cdot r^2 \\ A_s &= \frac{6}{2} \cdot \left(\frac{3}{20} \cdot r \right)^2 \cdot \sin(60^\circ) = \frac{27 \cdot \sqrt{3}}{800} \cdot r^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow A_{dp} = \frac{36 \cdot \pi + 27 \cdot \sqrt{3}}{800} \cdot r^2$$

Zahlenrechnungen für $r = 6$

$$R = 1.8$$

$$h = 2.939$$

$$M_1 = (0; 3.839)$$

$$M_2 = (-0.779; 2.489)$$

$$M_3 = (0.779; 2.489)$$

$$D = (0; 2.039)$$

$$E = (0.779; 3.389)$$

$$F = (-0.779; 3.389)$$

Fläche des Dreipasses:

$$A_{dp} = 7.194$$

Die Thomaskirche in Leipzig



Bild 1: Thomaskirche in Leipzig mit dem Mendelssohn-Portal⁷

Die Geschichte der Thomaskirche reicht bis ins Jahr 1212 zurück.

Bis 1496 kam es immer wieder zu Um- und Erweiterungsbauten. Seitdem hat sich, bis auf den Turm, der seine endgültige Gestalt 1702 erhielt, an der Architektur der Kirche nichts Wesentliches geändert.

Berühmt ist der Thomanerchor, dessen erste urkundliche Erwähnung aus dem Jahre 1254 stammt. Unter den Thomaskantoren ist J. S. Bach (1685-1750) der wohl bekannteste; seine sterblichen Überreste ruhen seit 1950 unter einer Grabplatte in der Kirche.

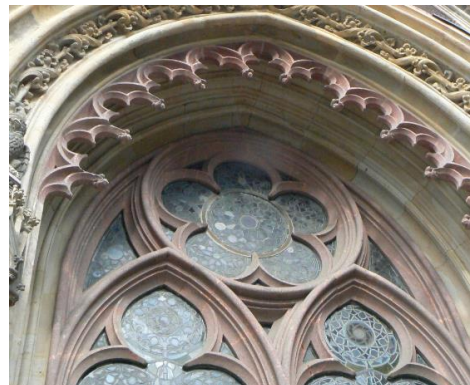


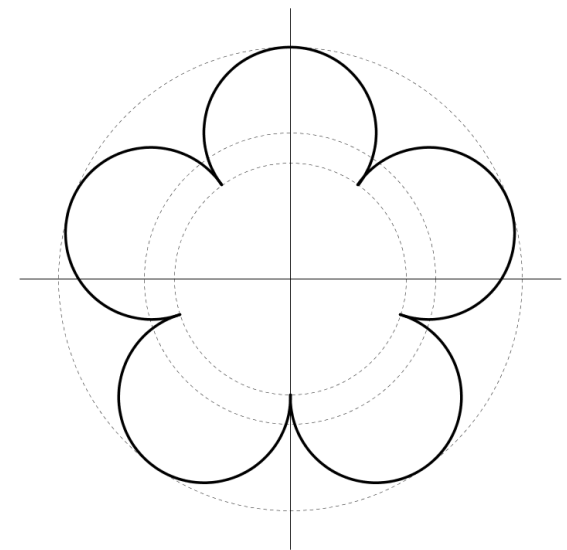
Bild 2: Detail des Portals

Zu diesem Fenster lässt sich sehr schön Geometrie betreiben.

Aufgaben:

Auf dem inneren Kreis mit dem Radius r_1 liegen fünf Punkte der Kreisbögen. Der äußere Kreis habe den Radius $r_2 = 2 \cdot r_1$.

- Bestimmen Sie in Abhängigkeit von r_1 die Koordinaten der fünf Punkte der Kreisbögen auf dem inneren Kreis.
- Die Mittelpunkte der Kreisbögen liegen auf einem mittleren Kreis; ermitteln Sie dessen Radius r_3 in Abhängigkeit von r_1 und die Koordinaten dieser Punkte.
- Berechnen Sie abschließend die eingeschlossene Fläche der „Rosette“.



Lösungen

Punkte auf dem inneren Kreis

Mit

$$\varphi(n) := 54^\circ + n \cdot 72^\circ \text{ für } n = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$x(n) := r_1 \cdot \cos(\varphi(n)) \text{ und } y(n) := r_1 \cdot \sin(\varphi(n))$$

lassen sich die Punkte A, B, C, D und E leicht berechnen:

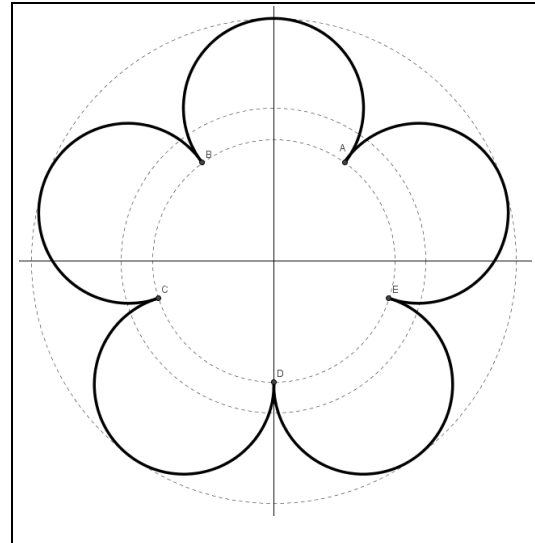
$$A = (x(0), y(0)) \approx (0.5878 \cdot r_1, 0.809 \cdot r_1)$$

$$B = (x(1), y(1)) \approx (-0.5878 \cdot r_1, 0.809 \cdot r_1)$$

$$C = (x(2), y(2)) \approx (-0.951 \cdot r_1, -0.309 \cdot r_1)$$

$$D = (x(3), y(3)) = (0, -r_1)$$

$$E = (x(4), y(4)) \approx (0.951 \cdot r_1, -0.309 \cdot r_1)$$



Radius r_3 / Mittelpunkte der Kreisbögen

Es muss gelten:

$$\overline{AM_1} = \overline{M_1F}$$

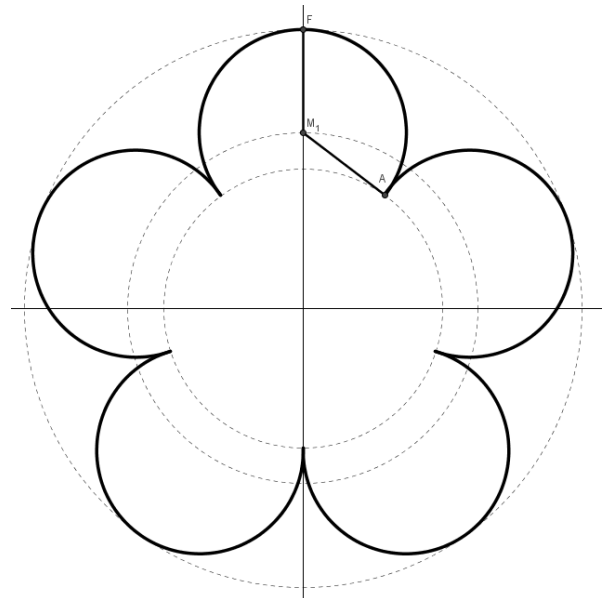
Aus dem Ansatz

$$\left[(x(M_1) - x(A))^2 + (y(M_1) - y(A))^2 \right] = \left[(x(F) - x(M_1))^2 + (y(F) - y(M_1))^2 \right]$$

erhält man die Gleichung

$$r_1^2 - 1.61803 \cdot r_1 \cdot r_3 + r_3^2 = (2 \cdot r_1 - r_3)^2$$

mit der Lösung $r_3 \approx 1.25946 \cdot r_1$



Damit und mit

$$\varphi(n) := 90^\circ + n \cdot 72^\circ \text{ für } n = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$x(n) := r_3 \cdot \cos(\varphi(n)) \text{ und } y(n) := r_3 \cdot \sin(\varphi(n))$$

ergeben sich die Mittelpunkte der Kreisbögen

$$M_1 \approx (0 / 1.25946 \cdot r_1)$$

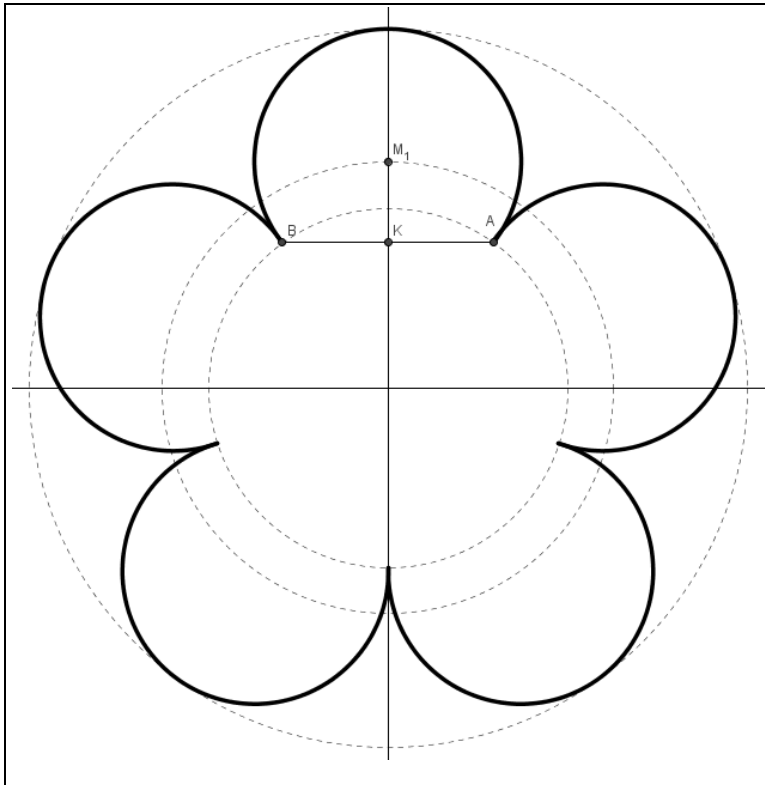
$$M_2 \approx (-1.1978 \cdot r_1 / 0.38919 \cdot r_1)$$

$$M_3 \approx (-0.74029 \cdot r_1 / -1.0189 \cdot r_1)$$

$$M_4 \approx (0.74029 \cdot r_1 / -1.0189 \cdot r_1)$$

$$M_5 \approx (1.1978 \cdot r_1 / 0.38919 \cdot r_1)$$

Die eingeschlossene Fläche



Aus dem inneren Kreis K_1 mit Radius r_1 , dem mittleren Kreis K_3 mit Radius $r_3 \approx 0.74054 \cdot r_1$ und den entsprechenden Kreisabschnitten Ka_1 mit $\alpha_1 = 72^\circ$ und Ka_2 mit $\alpha_2 = 105.0738^\circ$ wird die eingeschlossene Fläche berechnet:

$$\frac{\alpha_2}{2} \text{ aus } \triangle M_1BK$$

$$A_{ges} = K_1 + 5 \cdot K_3 - 5 \cdot (Ka_1 + Ka_2)$$

Die Formel für den Kreisabschnitt lautet:

$$A = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin(\alpha))$$

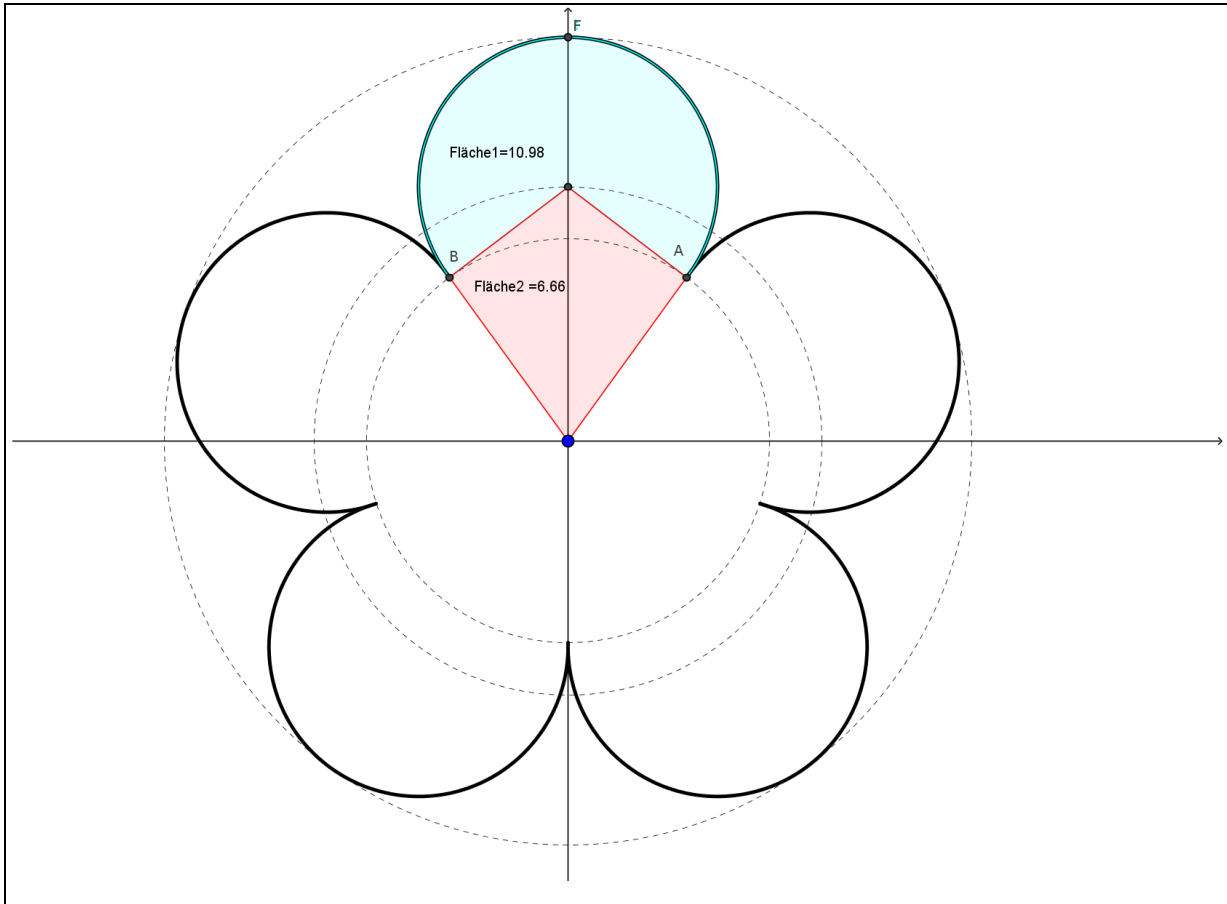
α im Bogenmaß

$$A_{ges} \approx \pi \cdot (r_1^2 + 5 \cdot r_3^2) - \frac{5}{2} \cdot [(72^\circ - \sin(72^\circ)) \cdot r_1^2 + (105.0738^\circ - \sin(105.0738^\circ)) \cdot r_3^2]$$

$$A_{ges} \approx \pi \cdot r_1^2 (1 + 5 \cdot 0.74054^2) - \frac{5}{2} \cdot [r_1^2 \cdot (72^\circ - \sin(72^\circ)) + (0.74054 \cdot r_1)^2 \cdot (105.0738^\circ - \sin(105.0738^\circ))]$$

$$A_{ges} \approx 9.801453 \cdot r_1^2$$

Eine Geogebra-Lösung – ganz ohne Algebra

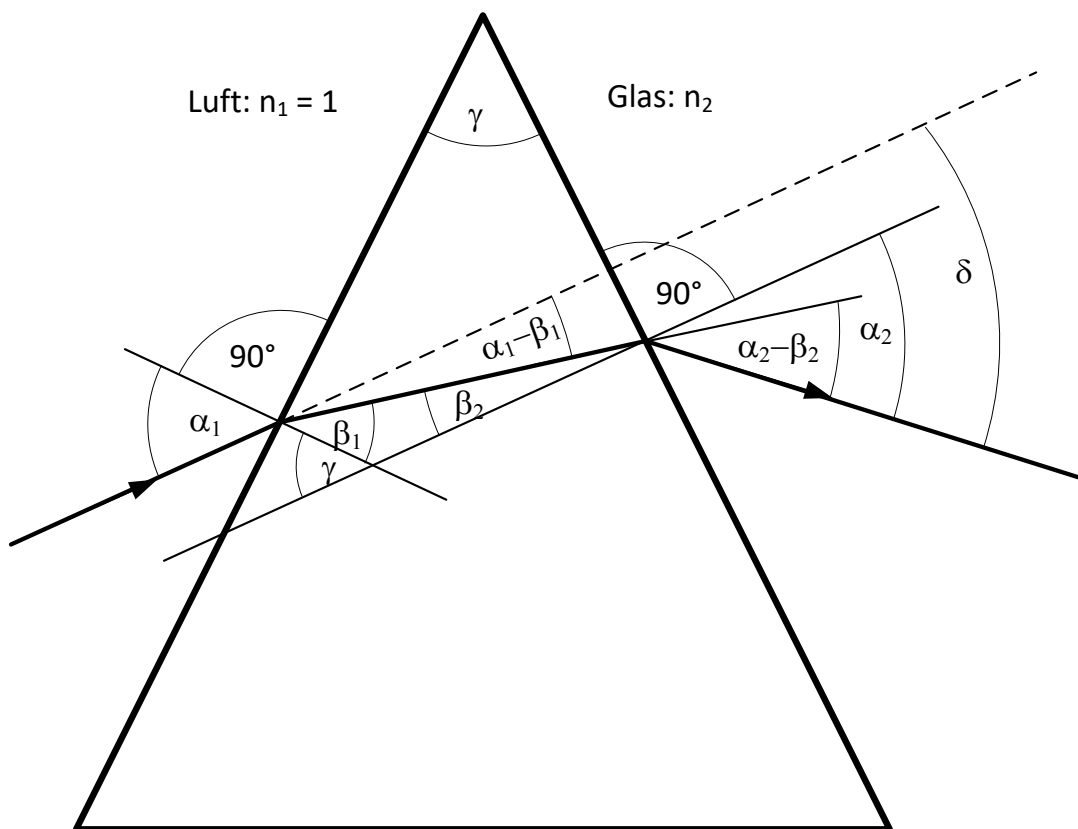


Gesamtablenkung am Prisma

Ein Thema in der optischen zerstörungsfreien Werkstoffprüfung ist die Brechung des Lichts am Prisma. In einer Werkstoffprüfer-Klasse tauchte die Frage auf, wie die u. a. Gleichung zur Gesamtablenkung an einem Prisma zustande kommt – gefunden in einem Fachbuch.

$$\delta = \alpha_1 - \gamma + \arcsin \left[\sin(\gamma) \cdot \sqrt{n_2^2 - \sin^2(\alpha_1)} - \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha_1) \right]$$

Zur Herleitung benötigt man das Brechungsgesetz und die Geometrie am Prisma:



Es gilt also:

$$n_1 \cdot \sin(\alpha_1) = n_2 \cdot \sin(\beta_1) \quad \text{und} \quad n_1 \cdot \sin(\alpha_2) = n_2 \cdot \sin(\beta_2) \quad \text{Brechungsgesetz}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta &= (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2) \\ \gamma &= \beta_1 + \beta_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{ablesbar aus der Zeichnung}$$

Die Herleitung der Gesamtablenkung δ

$$\delta = (\alpha_1 + \alpha_2) - \underbrace{(\beta_1 + \beta_2)}_{\gamma} = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma \quad \text{mit } \sin(\alpha_2) = n_2 \cdot \sin(\beta_2) \quad \text{folgt } \alpha_2 = \arcsin(n_2 \cdot \sin(\beta_2))$$

$$\delta = \alpha_1 + \arcsin(n_2 \cdot \sin(\beta_2)) - \gamma$$

$$\delta = \alpha_1 + \arcsin(n_2 \cdot \sin(\gamma - \beta_1)) - \gamma \quad \text{mit } \sin(\gamma - \beta_1) = \sin(\gamma) \cdot \cos(\beta_1) - \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta_1)$$

$$\delta = \alpha_1 - \gamma + \arcsin\{n_2 \cdot [\sin(\gamma) \cdot \cos(\beta_1) - \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta_1)]\}$$

Ferner gilt:

$$\sin(\beta_1) = \frac{\sin(\alpha_1)}{n_2} \quad \text{und} \quad \cos(\beta_1) = \sqrt{1 - \sin^2(\beta_1)}$$

Damit erhält man

$$\delta = \alpha_1 - \gamma + \arcsin\left\{n_2 \cdot \left[\sin(\gamma) \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\beta_1)} - \cos(\gamma) \cdot \frac{\sin(\alpha_1)}{n_2}\right]\right\}$$

$$\delta = \alpha_1 - \gamma + \arcsin\left\{n_2 \cdot \left[\sin(\gamma) \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\alpha_1)}{n_2^2}} - \cos(\gamma) \cdot \frac{\sin(\alpha_1)}{n_2}\right]\right\}$$

$$\delta = \alpha_1 - \gamma + \arcsin\left\{n_2 \cdot \left[\sin(\gamma) \cdot \sqrt{\frac{n_2^2 - \sin^2(\alpha_1)}{n_2^2}} - \cos(\gamma) \cdot \frac{\sin(\alpha_1)}{n_2}\right]\right\}$$

$$\delta = \alpha_1 - \gamma + \arcsin\left\{\cancel{n_2} \cdot \left[\sin(\gamma) \cdot \frac{\sqrt{n_2^2 - \sin^2(\alpha_1)}}{\cancel{n_2}} - \cos(\gamma) \cdot \frac{\sin(\alpha_1)}{\cancel{n_2}}\right]\right\}$$

Und letztlich

$$\boxed{\delta = \alpha_1 - \gamma + \arcsin\left[\sin(\gamma) \cdot \sqrt{n_2^2 - \sin^2(\alpha_1)} - \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha_1)\right]} \quad \text{q. e. d.}$$

Radius des sichtbaren Horizonts

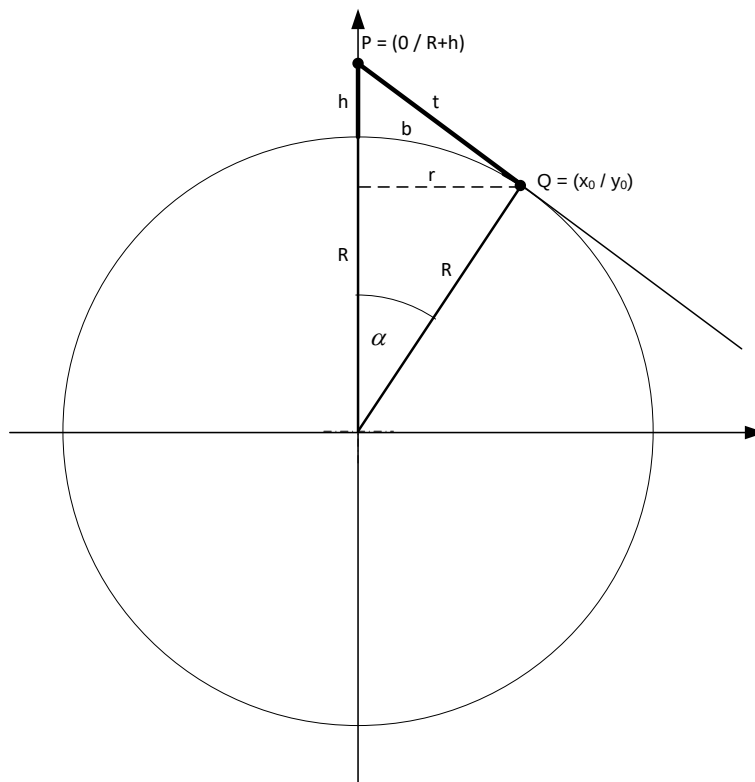
Auf der Brücke eines Kreuzfahrtschiffes hat der Kapitän eine Augenhöhe von h ($= 36$ m).

- In welcher Entfernung t sieht er erstmals beginnende Konturen eines entgegen kommenden Schiffes? Vorausgesetzt wird hier, dass die Erde eine Kugel ist.
- Wie groß ist der Radius r des sichtbaren Horizonts?

Hinweis: Bestimmen Sie t und r als Formeln in Abhängigkeit von R und h !

Berechnen Sie im Anschluss diese Werte für $R = 6370$ km!

Grundlage ist die unten dargestellte nicht maßstäbliche Zeichnung.



Lösung zu a)

Im Dreieck Ursprung-P-Q errechnet man t aus $t^2 = (R+h)^2 - R^2$

$$t = \sqrt{2 \cdot R \cdot h + h^2}$$

Da $h \ll R$, kann man t vereinfachen zu

$$t = \sqrt{2 \cdot R \cdot h}$$

Wegen der Einheiten wird $\frac{h}{1000}$ eingesetzt

$$t(h, R) = \sqrt{\frac{R \cdot h}{500}} \text{ in km}$$

$$t(h) \approx 3.56931 \cdot \sqrt{h}$$

Lösung zu b)

Es wird aus dem o. a. Dreieck zunächst der Winkel α berechnet:

$$\left. \begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{t}{R} \\ \tan(\alpha) &= \frac{\sqrt{\frac{R \cdot h}{500}}}{R} = \sqrt{\frac{h}{500 \cdot R}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\alpha = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{h}{500 \cdot R}}\right)}$$

Nun lässt sich r aus der Beziehung $\sin(\alpha) = \frac{r}{R}$ berechnen.

$$\begin{aligned} r &= R \cdot \sin(\alpha) \\ r &= R \cdot \sin\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{h}{500 \cdot R}}\right)\right) \end{aligned} \quad \text{es gilt: } \sin(\tan^{-1}(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{mit } x = \sqrt{\frac{h}{500 \cdot R}}$$
$$r = R \cdot \frac{\sqrt{\frac{h}{500 \cdot R}}}{\sqrt{\frac{h}{500 \cdot R} + 1}} = R \cdot \frac{\sqrt{\frac{h}{500 \cdot R}}}{\sqrt{\frac{h + 500 \cdot R}{500 \cdot R}}} \quad \boxed{r(h, R) = R \cdot \sqrt{\frac{h}{h + 500 \cdot R}}}$$

Zahlenrechnungen

$$t = \sqrt{\frac{6370 \cdot 36}{500}} = 21.4159 \text{ km}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{36}{500 \cdot 6370}}\right) = 0.192627^\circ$$

$$r = 6370 \cdot \sqrt{\frac{36}{36 + 500 \cdot 6370}} = 21.4158 \text{ km}$$

Berechnung von r – Möglichkeit 2

Im Dreieck der obigen Zeichnung sind zwei Dreiecke enthalten; dort gilt:

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= R^2 - (R - a)^2 \\ r^2 &= t^2 - (h + a)^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow 0 = R^2 - (R^2 - 2 \cdot a \cdot R + a^2) - [t^2 - (h^2 + 2 \cdot a \cdot h + a^2)]$$

$$\text{Daraus folgt: } 0 = 2 \cdot a \cdot R - t^2 + h^2 + 2 \cdot a \cdot h$$

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 - h^2}{R + h} \quad \text{und für } r \text{ mit Pythagoras } r = \sqrt{t^2 - (h + a)^2}$$

$$\text{Zahlenrechnungen: } a = \frac{1}{2} \cdot \frac{21.4159^2 - 0.036^2}{6370 + 0.036} = 0.03599975 \text{ km}$$

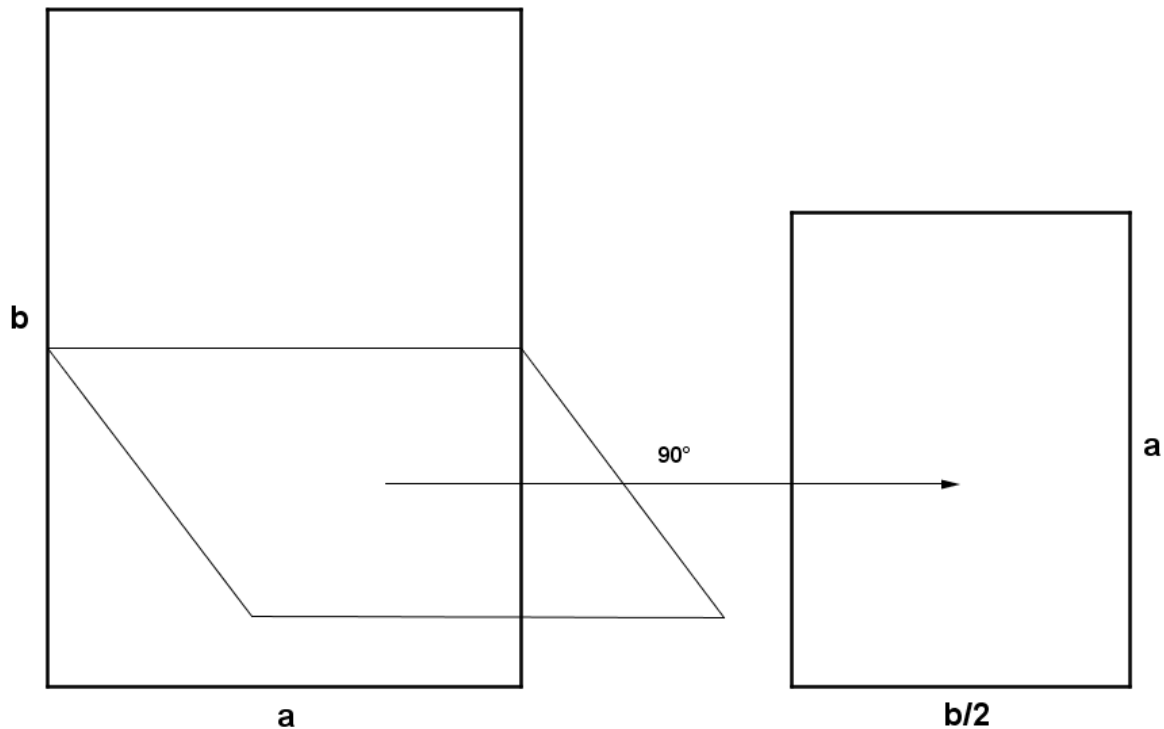
$$r = \sqrt{21.4158819571^2 - (0.036 - 0.03599975)^2} \approx 21.4158 \text{ km}$$

Woher kommen die „krummen“ Maße eines DIN-A4-Blattes⁸?

Für ein Blatt im DIN-A k mit $k = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ wurden folgende Festlegungen gefordert:

- DIN-A0 sei genau ein Quadratmeter.
- Durch Zusammenfalten entstehe wieder ein Papier mit demselben Seitenverhältnis.
- DIN-A($k+1$) sei halb so groß wie DIN-A k

Zur Veranschaulichung diene folgende Zeichnung:



Aufgabe:

Zeigen Sie, dass die Höhe b und die Breite a folgende „krummen“ Maße haben:

Höhe: 29.730177875

Breite: 21.022410381

Lösung:

Aus der Zeichnung entnimmt man folgende Gleichung:

$$a : b = \frac{b}{2} : a$$

Aufgelöst erhält man $a^2 = \frac{b^2}{2} \Rightarrow 2 \cdot a^2 = b^2 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot a = b$

Die negative Lösung wird ignoriert, weil die Seitenlängen positive Größen sind.

Daraus ergibt sich das Seitenverhältnis von DIN-A-Papier zu

$$a : b = 1 : \sqrt{2}$$

mit $\sqrt{2} \approx 1.414213562373$

Mit der Vorgabe, dass ein DIN-A0-Blatt eine Fläche von einem Quadratmeter hat, ergibt sich aus $a \cdot b = 1$ und $\sqrt{2} \cdot a = b$

die Beziehung $b^2 = \sqrt{2}$

Damit erhält man für die Höhe b und die Breite a folgende Maße in Meter:

$b = \sqrt{\sqrt{2}} \approx 1.1892071550027$ $a \approx 0.840896415254$

DIN	Breite a	Höhe b	a gerundet	b gerundet
A0	0.8408964	1.18920716	0.84	1.2
A1	0.5946035	0.8408964	0.6	0.84
A2	0.4204482	0.5946035	0.42	0.6
A3	0.2973018	0.4204482	0.3	0.42
A4	0.2102241	0.2973018	0.21	0.3
A5	0.1486509	0.2102241	0.15	0.21
A6	0.1051121	0.1486509	0.105	0.15
A7	0.0743254	0.1051121	0.075	0.105

Bei **a** und **b** handelt es sich also um geometrische Folgen mit $a_1 = 0.8408964$ bzw. $b_1 = 1.18920716$ und $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ mit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ bzw. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Weitere geometrische Folgen findet man beispielsweise bei der Drehzahlstufung von Getrieben mit dem Stufensprung $\varphi = \sqrt[n_z]{\frac{n_z}{n_1}}$ und den Frequenzen einer chromatischen Tonleiter mit $q = \sqrt[12]{2}$

Axiale und radiale Durchbohrung einer Welle

Aufgabenstellung

Eine Welle aus E295 mit Durchmesser $d_1 = 50$ mm soll axial durchbohrt werden. Dabei soll die Querschnittsschwächung 4 % betragen.

Mit welchem Durchmesser d_2 darf gebohrt werden?

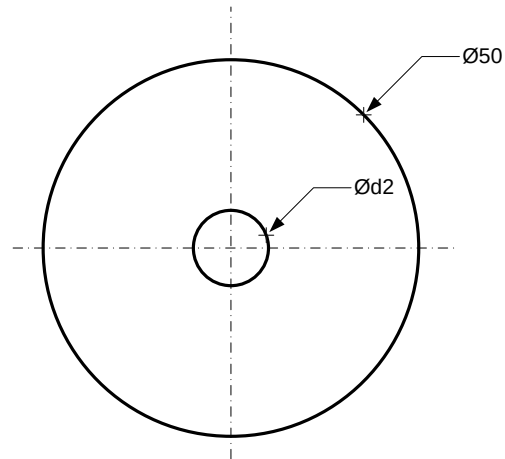
Lösung: (Rechnung ohne Einheiten)

$$A_1 = \frac{\pi}{4} \cdot 50^2 = 625 \cdot \pi$$

$$A_2 = 0.04 \cdot A_1 = 25 \cdot \pi$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4} \cdot d_2^2 = 25 \cdot \pi \Rightarrow d_2 = 10$$

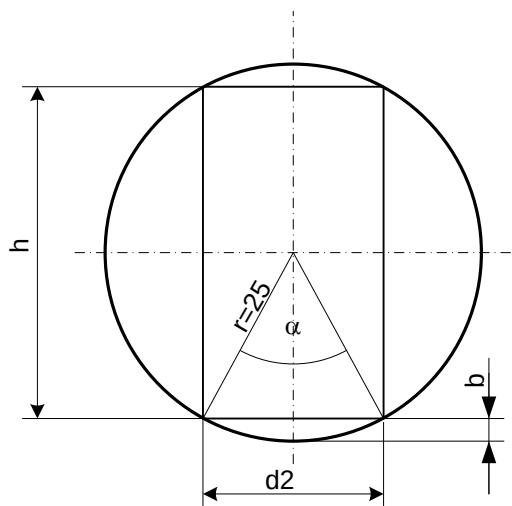
Mit $d_2 = 10$ mm darf gebohrt werden!



Erste Veränderung der Aufgabenstellung:

Eine Welle aus E295 mit Durchmesser $d_1 = 50$ mm soll *radial* durchbohrt werden. Dabei soll die Querschnittsschwächung 4 % betragen.

Mit welchem Durchmesser d_2 darf gebohrt werden?



Lösung: (Zeichnung nicht maßstäblich)

Die Querschnittsschwächung besteht aus einem Rechteck mit

$$A_R = d_2 \cdot h$$

und

$$d_2 = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{und} \quad h = 2 \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

sowie zwei Kreisabschnitten ($\square$ im Bogenmaß) mit

$$A_{Ka} = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} - \frac{d_2 \cdot (r - b)}{2} \quad \text{und} \quad b = r - \frac{h}{2}$$

Durch Einsetzen von $r = 25$ bzw. $d_1 = 50$ und einigen Umformungen gelangt man zu der Gleichung

$$\sin(\alpha) + \alpha = \frac{\pi}{25}$$

$$\alpha = 0.062853 \hat{=} 3.60119^\circ$$

$$h = 49.9753$$

mit den Lösungen

$$d_2 = 1.57105$$

$$b = 0.012344$$

Zweite Veränderung der Aufgabenstellung:

Eine Welle aus E295 mit Durchmesser d_1 soll *radial* durchbohrt werden. Dabei soll die Querschnittsschwächung p % betragen.

Mit welchem Durchmesser d_2 darf gebohrt werden?

Lösung:

Zeichnung siehe vorige Seite, α wieder im Bogenmaß

$$A_1 = \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 = \pi \cdot r_1^2$$

$$A_2 = \frac{p}{100} \cdot A_1 = \frac{p \cdot \pi \cdot r_1^2}{100}$$

$$A_R = d_2 \cdot h \text{ mit } d_2 = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ und } h = 2 \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$A_{Ka} = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} - \frac{d_2 \cdot (r - b)}{2} = \frac{r_1^2 \cdot \alpha}{2} - \frac{d_2 \cdot (r - b)}{2} \text{ und } b = r - \frac{h}{2}$$

Einsetzen, Vereinfachen und Zusammenfassen führt auf

$$A_R + 2 \cdot A_{Ka} = \underbrace{2 \cdot r^2 \cdot \sin(\alpha)}_{A_R} + 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{r^2 \cdot \alpha}{2} - \frac{r^2 \cdot \sin(\alpha)}{2} \right)}_{A_{Ka}} = r^2 \cdot (\sin(\alpha) + \alpha)$$

Daraus folgt die zu lösende Gleichung

$$r^2 \cdot (\sin(\alpha) + \alpha) = \frac{p \cdot \pi \cdot r^2}{100} \quad r_1^2 \cdot (\sin(\alpha) - \alpha) = \frac{p \cdot \pi \cdot r_1^2}{100} \text{ bzw.}$$

$$\sin(\alpha) + \alpha = \frac{p \cdot \pi}{100}$$

Diese Gleichung ist numerisch für α nur bei gegebenem p lösbar! Daraus wird dann der Durchmesser d_2 ermittelt.

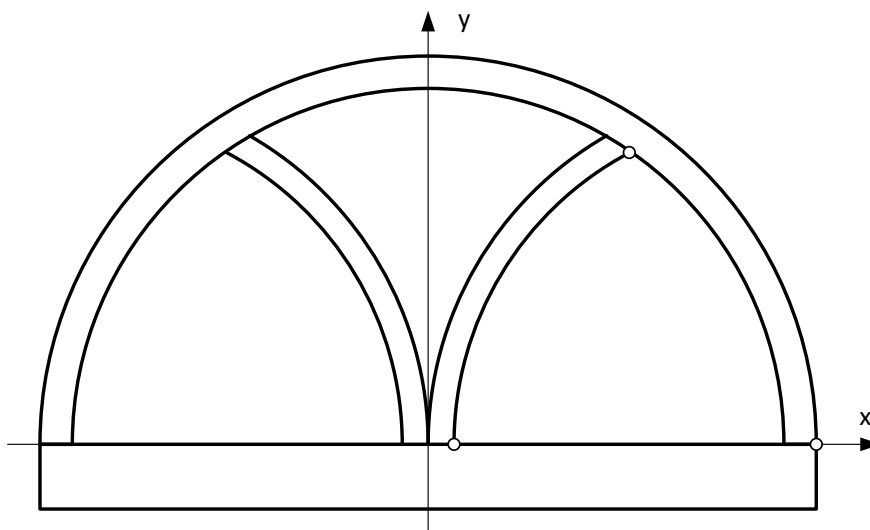
Pflasterungen

In Funchal auf Madeira findet man viele interessante Pflasterungen mit geometrischen Mustern, die zu mathematischen Betrachtungen anregen.



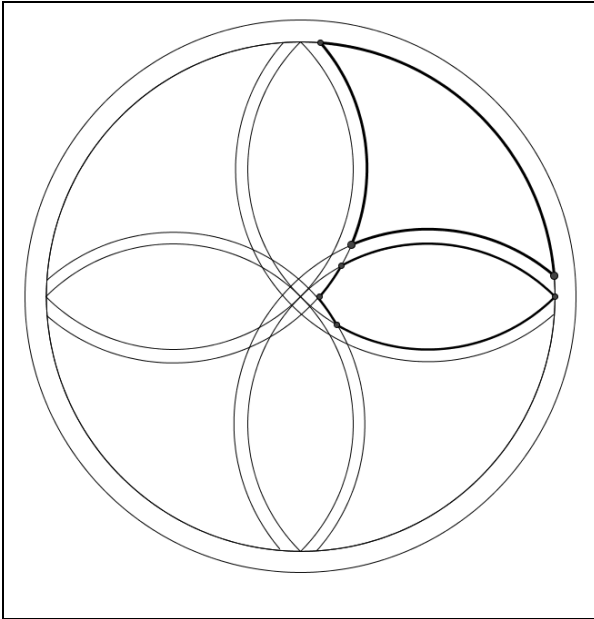
Ein Beispiel ist in dem nebenstehenden Bild gezeigt; dabei hat der große Halbkreis einen Radius von $R = 2\text{m}$, das untere Rechteck eine Dicke von $2t$, die Radien der Kreisbögen unterscheiden sich um das Maß $t = 0.15\text{m}$.

Aufgabe 1:



- Stellen Sie die Funktionsgleichungen aller Halbkreise und Kreisbögen in allgemeiner Form dar!
- Auf der rechten Seite sieht man ein „gotisches Fenster“ bestehend aus zwei Kreisbögen und einer Strecke. Berechnen Sie die Fläche dieses „Fensters“; die markierten Punkte sind dazu zunächst in allgemeiner Form zu berechnen. Anschließend sind zur Bestimmung der Fläche die Zahlenwerte zu benutzen.
- Bestimmen Sie diese Fläche auch mit Hilfe der Integralrechnung und vergleichen Sie beide Ergebnisse!

Aufgabe 2



Ein weiteres Muster aus Funchal; die beispielhaft hervorgehobenen Flächen sind dunkel, die zwischen den Kreisen und Kreisbögen gelegenen hell gepflastert.

Der innere Kreis hat den Radius $R = 3\text{m}$, der äußere Kreis den Radius $R+2t$ mit $t = 0.1\text{m}$

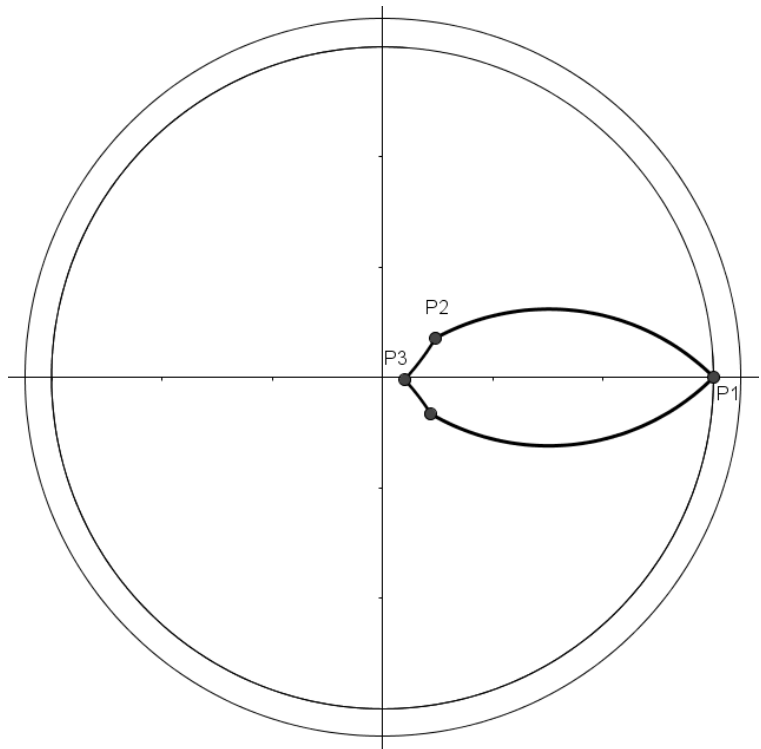
Die Kreisbögen unterscheiden sich um den Wert t .

Aufgabe 2 Teil a:

- Zeichnen Sie die Figur im Maßstab 2 : 1 in ein Koordinatensystem ein und geben Sie die Mittelpunkte der Kreisbögen an!
- Die fett markierte obere Fläche ist mit geeigneten Mitteln zu berechnen! Bestimmen Sie dazu die benötigten Kreisgleichungen!

Aufgabe 2 Teil b:

Die fett markierte untere Fläche ist mit geeigneten Mitteln zu berechnen!



Lösungen zu A1

Kreisgleichungen

Oberer Halbkreis: $x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$

Unterer Halbkreis: $x^2 + y^2 = (R - t)^2 \rightarrow y = \sqrt{(R - t)^2 - x^2}$

Rechtes „Gotisches Fenster“

Oberer Kreisbogen: $(x - R)^2 + y^2 = R^2 \rightarrow y = \sqrt{R^2 - (x - R)^2}$

Unterer Kreisbogen: $(x - R)^2 + y^2 = (R - t)^2 \rightarrow y = \sqrt{(R - t)^2 - (x - R)^2}$

Linkes „Gotisches Fenster“

Oberer Kreisbogen: $(x + R)^2 + y^2 = R^2 \rightarrow y = \sqrt{R^2 - (x + R)^2}$

Unterer Kreisbogen: $(x + R)^2 + y^2 = (R - t)^2 \rightarrow y = \sqrt{(R - t)^2 - (x + R)^2}$

Berechnung der Punkte

Rechter Endpunkt: $P_1 = (R / 0)$ $P_1 = (2 / 0)$

Linker Endpunkt: $P_2 = (t / 0)$ $P_2 = (0.15 / 0)$

Oberer Punkt: $R/2$ in den unteren Kreisbogen des rechten „Fensters einsetzen:

$$P_3 = \left(\frac{R}{2} / \sqrt{(R - t)^2 - \frac{R^2}{4}} \right) \quad P_3 = (1 / 1.556438)$$

Aus P_1 und P_3 kann der Steigungswinkel α zwischen der x-Achse und der Strecke $\overline{P_1 P_3}$ ermittelt werden, um damit die Fläche A_1 des Kreisabschnitt zwischen $\overline{P_2 P_3}$ und dem unteren Kreisbogen des rechten Fensters zu berechnen. Die Gesamtfläche des „Gotischen Fensters“ ergibt sich dann aus der Fläche $A_2 = \Delta P_1 P_2 P_3 + 2 \cdot A_1$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{(R - t)^2 - \frac{R^2}{4}}}{\frac{R}{2}} \rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1.85^2 - 1}}{1} \rightarrow \alpha = 0.9997... \quad \text{Wert im Bogenmaß}$$

Für einen Kreisabschnitt gilt die Formel: $A = \frac{R^2}{2} \cdot (\alpha - \sin(\alpha))$

$$A_1 = \frac{1.85^2}{2} \cdot (0.9997 - \sin(0.9997)) \approx 0.271 m^2$$

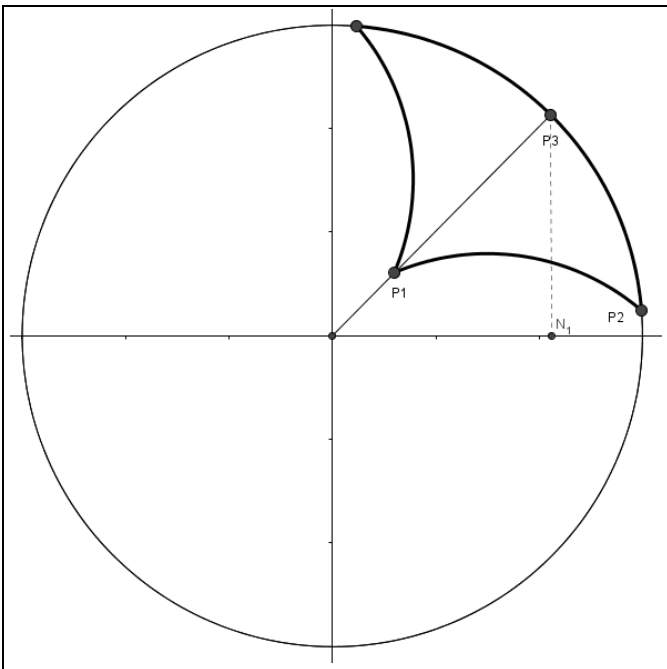
$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot (R - 2t) \cdot \sqrt{(R - t)^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{1}{2} \cdot 1.7 \cdot \sqrt{1.85^2 - 1} \approx 1.32297$$

Fläche des Fensters: $A \approx 1.8651 m^2$

Lösung mit Integralrechnung

Ansatz:
$$A = 2 \cdot \int_t^{R/2} \sqrt{(R-t)^2 - (x-R)^2} dx = 2 \cdot \int_{0.15}^1 \sqrt{1.85^2 - (x-2)^2} dx \approx 1.8651 \text{ m}^2$$

Lösung zu 2a:



Aus Symmetriegründen braucht nur die von den Punkten P_1 , P_2 und P_3 eingeschlossene Fläche berechnet zu werden.

Die eingezeichnete Strecke vom Ursprung des KS bis P_3 hat die Gleichung $y = x$

Die Senkrechte von P_3 nach N_1 unterteilt diese Fläche in zwei Teile, die mit Hilfe der Integralrechnung berechnet werden können.

Benötigt werden die Kreisgleichung um den Ursprung und die Gleichung des Kreisbogens von P_1 nach P_2 , um die Punkte P_1 , P_2 und P_3 berechnen zu können.

Kreisgleichungen:

Kreis 1 um $(0/0)$: $x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 9 \rightarrow y = \sqrt{9 - x^2}$

Kreis 2 um $\left(\frac{R}{2} / -\frac{R}{2}\right)$

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2} \cdot \sqrt{2} + t\right)^2 \rightarrow y = -\frac{R}{2} + \sqrt{\left(\frac{R}{2} \cdot \sqrt{2} + t\right)^2 - \left(x - \frac{R}{2}\right)^2}$$

$$y = -\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} + 0.1\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}$$

Schnittpunkte:

$$P_1 \text{ aus } y = x \text{ und } K_2: \quad P_1 \approx (0.465974 / 0.465974)$$

$$P_2 \text{ aus } K_1 \text{ und } K_2: \quad P_2 = (2.99666 / 0.14142)$$

$$P_3 \text{ aus } y = x \text{ und } K_1: \quad P_3 = \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} / \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \right)$$

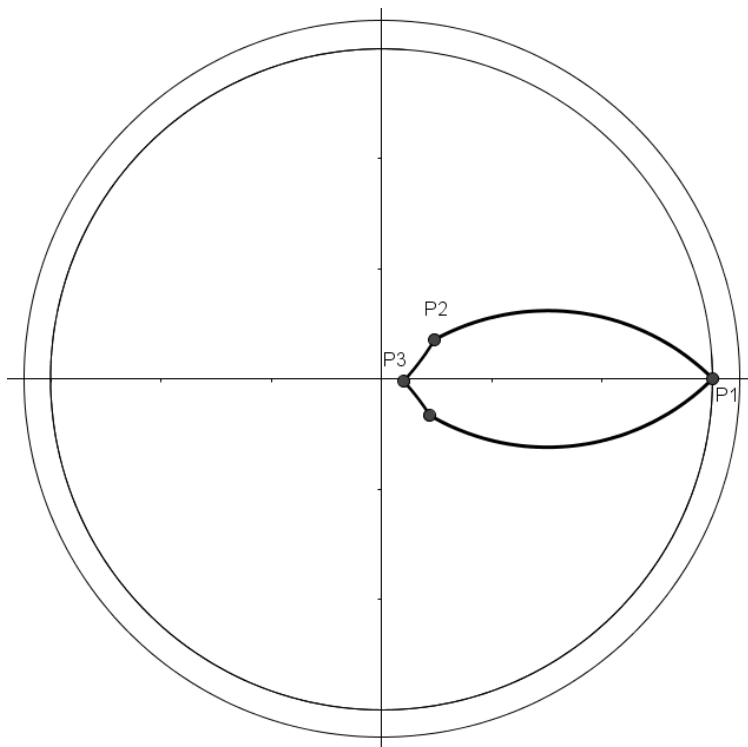
Flächen:

$$A_1 = \int_{0.465974}^{\frac{3}{2}\sqrt{2}} \left(x - \left(-\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} + 0.1 \right)^2 - \left(x - \frac{3}{2} \right)^2} \right) \right) dx \approx 1.0515 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \int_{\frac{3}{2}\sqrt{2}}^{2.99666} \left(\sqrt{9 - x^2} - \left(-\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} + 0.1 \right)^2 - \left(x - \frac{3}{2} \right)^2} \right) \right) dx \approx 0.906648 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{ges}} = 2 \cdot (A_1 + A_2) \approx 3.91629 \text{ m}^2$$

Lösung zu 2b:



Zur Berechnung dieser Fläche werden benötigt

- der Kreis 1 mit Mittelpunkt $M_1 = \left(\frac{R}{2} / -\frac{R}{2} \right)$ und Radius

$$R_1 = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{2}$$

sowie

- der Kreis 2 mit Mittelpunkt $M_2 = \left(-\frac{R}{2} / \frac{R}{2} \right)$ und Radius

$$R_2 = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{2} + t$$

sowie die Punkte P_1 , P_2 und P_3 !

Mit Zahlen ergeben sich aus den Kreisgleichungen:

- $K_1: \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{2} \rightarrow y = f_1(x) = -\frac{R}{2} + \sqrt{\frac{R^2}{2} - \left(x - \frac{R}{2}\right)^2}$

oberer Kreisbogen

- $K_2: \left(x + \frac{R}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2} \cdot \sqrt{2} + t\right)^2 \rightarrow y = f_2(x) = +\frac{R}{2} - \sqrt{\left(\frac{R}{2} \cdot \sqrt{2} + t\right)^2 - \left(x + \frac{R}{2}\right)^2}$

unterer Kreisbogen

die Punkte $P_1 = (3/0)$, $P_2 \approx (0.363689/0.291312)$ und $P_3 \approx (0.138372/0)$

Fläche:

$$A = 2 \cdot \left[\int_{0.138372}^{0.363689} f_2(x) dx + \int_{0.363689}^3 f_1(x) dx \right] \approx 2 \cdot (0.030941 + 1.22733)$$

$$A \approx 2.51654 \text{ m}^2$$

Lineare Regression – ein konstruiertes Beispiel

In der Physiksammlung einer weiterführenden Schule gibt es eine Reihe Ohm'scher Widerstände, deren Aufschrift nicht mehr zu lesen ist. Schüler werden beauftragt, in kleinen Messreihen die Größe der Widerstände zu bestimmen.

Bei einer Messreihe in einem Gleichstromkreis (mit demselben Widerstand R) haben sich folgende Messwerte ergeben:

k	1	2	3	4
I_k in [mA]	1	2	3	5
U_k in [V]	1.5	1.5	3.5	4.8
damit ergibt sich nach dem Ohm'schen Gesetz				
R in $k\Omega$	1.5	0.75	1.166	0.96

Eigentlich müsste aber wegen

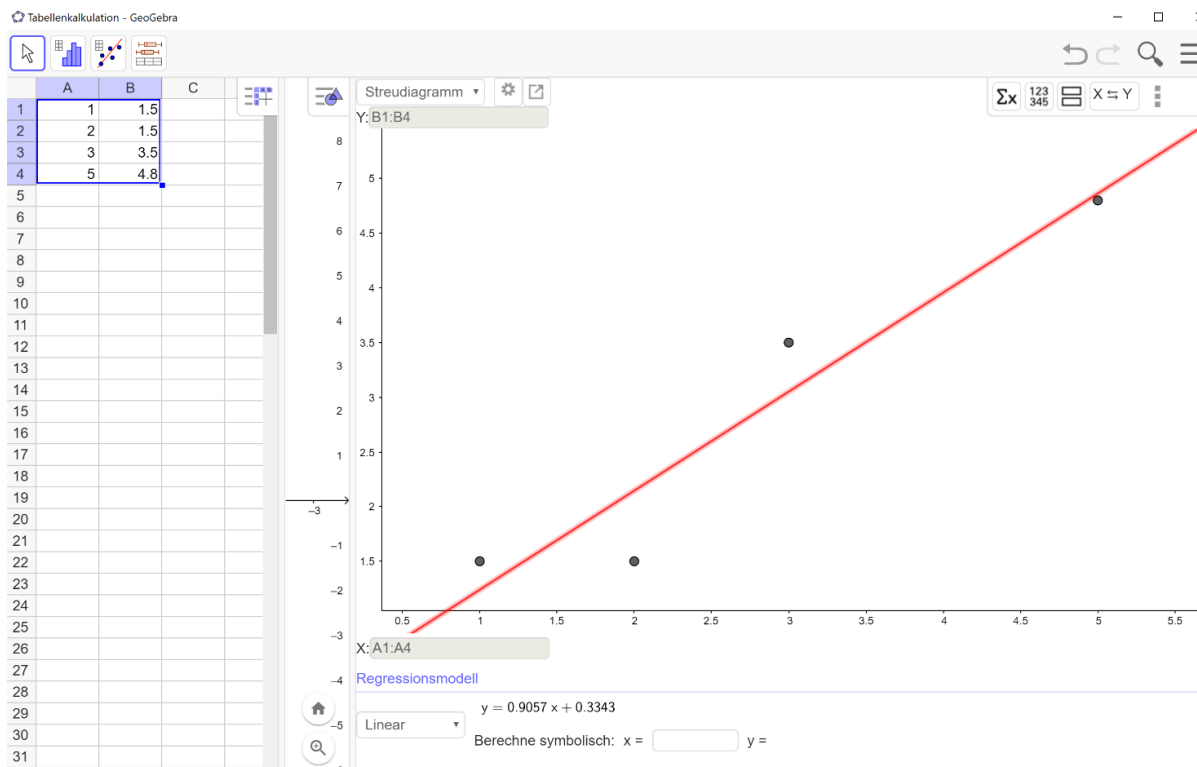
$$U = R \cdot I \quad \text{bzw.} \quad R = \frac{U}{I}$$

der Widerstandswert konstant sein.

Frage: Welchen Wert hat R denn nun tatsächlich?

Ansatz mit einem vorhandenen Baustein eines CAS

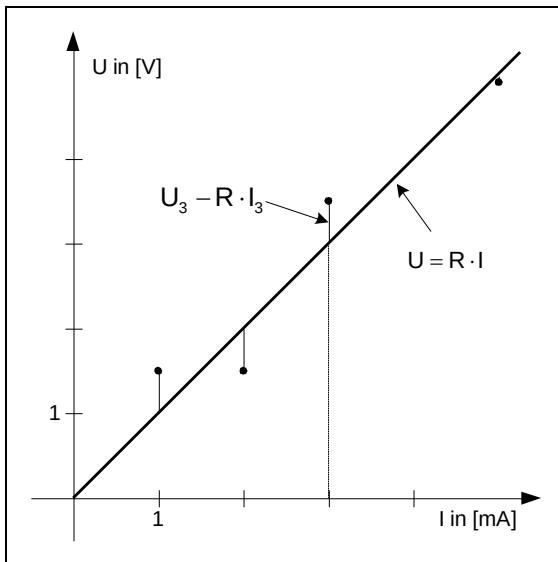
Man erwartet eine Widerstandsgerade; GeoGebra bietet z. B. die Eingabe der Werte in eine Tabellenkalkulation an und die Auswertung der Daten durch eine *lineare Regression*.



Dieses Ergebnis der linearen Regression ist aber schon aus einem einzigen Grund sehr unbefriedigend:

- Bei Ohm'schen Geraden handelt es sich um Ursprungsgeraden.
- Man sieht also, dass der vordefinierte Baustein hier nicht zur Lösung des Problems beitragen kann.
- Andere CAS wie der TI-Nspire gelangen zum selben Ergebnis. In diesem konstruierten Beispiel muss man sich daher eigene Gedanken machen.

Die Lösung:



Das Ergebnis müsste also wie links dargestellt aussehen; die gezeichnete Gerade mit der Steigung R ist eine Schätzung für den tatsächlichen Wert von R .

Man liest ab: $R = 1$

Das Ablesen ist für den Theoretiker aber unbefriedigend, weil

- zu ungenau,
- nicht zu programmieren
- ...

Formalisieren lässt sich das Problem durch eine verallgemeinerte Darstellung der Messpunkte: $(I_1, U_1), (I_2, U_2), (I_3, U_3), (I_4, U_4)$

Analytischer Ansatz:

Die „optimale“ Gerade wird so gelegt, dass die Abweichungen (der Fehler F) zwischen den Messpunkten und der Geraden minimal werden.

$$F(R) = \sum_{k=1}^4 (U_k - R \cdot I_k)^2 \text{ ist die verbreitete Methode.}$$

Die Fehler werden quadratisch aufsummiert, damit sich diese nicht gegenseitig aufheben. $F(R)$ ist nun bezüglich R zu minimieren, es handelt sich also um eine Extremwertaufgabe.

Mit den vorgegebenen Werten ergibt sich:

$$F(R) = (1.5 - R)^2 + (1.5 - 2R)^2 + (3.5 - 3R)^2 + (4.8 - 5R)^2$$

$$F(R) = 39.79 - 78 \cdot R + 39 \cdot R^2$$

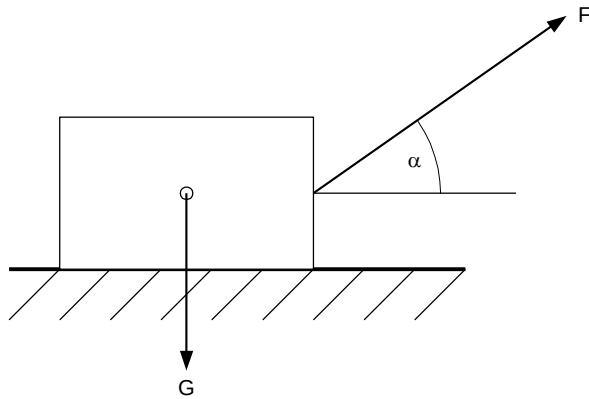
$$F'(R) = -78 + 78 \cdot R \quad F'(R) = 0 \Rightarrow R = 1$$

Diese Rechnung ist auch „händisch“ leicht durchzuführen.

Fazit: Nicht immer bietet ein CAS die optimale Lösung an!

Ein Reibungsproblem

Kraftaufwand bei einer auf einer horizontalen Unterlage gezogenen Masse



Aufgabenstellung

Ein Körper der Masse m wird auf einer horizontalen Unterlage gezogen (Reibungskoeffizient μ je nach Werkstoffpaarung).

Unter welchem Winkel α muss die Kraft F angreifen, damit der Kraftaufwand möglichst klein wird?

Die Einheiten:

Masse m in [kg]

Erdbeschleunigung g in [m/s^2]

Kraft F in [N]

$$F = m \cdot g \left[1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 1\text{N} \right]$$

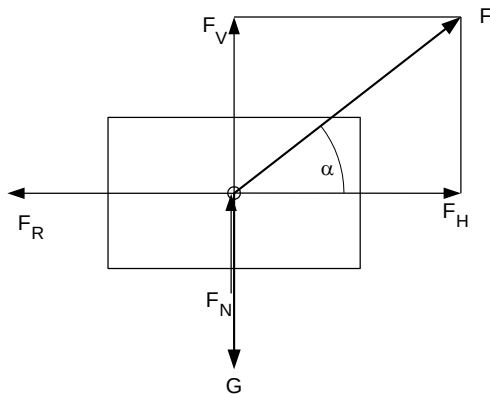
Die Masse von 1 kg erzeugt also eine Gewichtskraft von $G = 1\text{kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9.81\text{N}$

Reibungszahlen⁹

Werkstoffpaarung	Haftreibungszahl μ_0		Gleitreibungszahl μ		Rollreibungszahl f mm	
	trocken	geschmiert	trocken	geschmiert		
Stahl auf Stahl	0,2	0,15	0,18	0,1 ... 0,08	Stahl auf Stahl, weich	0,5
Stahl auf Gusseisen	0,2	0,1	0,15	0,1 ... 0,05		
Stahl auf Cu-Sn-Legierung	0,2	0,1	0,1	0,06 ... 0,03		
Stahl auf Polyamid	0,3	0,15	0,3	0,12 ... 0,05	Stahl auf Stahl, hart	0,01
Stahl auf Reibbelag	0,6	0,3	0,55	0,3 ... 0,2		
Treibriemen auf Gusseisen	0,5	-	-	-	Autoreifen auf Asphalt	4,5
Wälzlager	-	-	-	0,003 ... 0,001		

Kraftaufwand bei einer auf einer horizontalen Unterlage gezogenen Masse

1. Freimachen des Körpers



2. Beziehungen zwischen den Kräften

$$\begin{aligned}F_H &= F_R & F_R &= \mu \cdot F_N \\F_N &= G - F_V; \quad G = m \cdot g; \\F_V &= F \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow F_N = m \cdot g - F \cdot \sin(\alpha) \\F_H &= F \cdot \cos(\alpha)\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}F \cdot \cos(\alpha) &= \mu \cdot m \cdot g - \mu \cdot F \cdot \sin(\alpha) \\F \cdot (\cos(\alpha) + \mu \cdot \sin(\alpha)) &= \mu \cdot m \cdot g\end{aligned}$$

$$F = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{\cos(\alpha) + \mu \cdot \sin(\alpha)}$$

3. Ermittlung des minimalen Kraftaufwandes

Da es sich bei dem Zähler um eine Konstante handelt, genügt es, den Nenner zu betrachten und zu ermitteln, wann dieser ein Maximum (!) annimmt. Dazu kann man sich auch eine Grafik erstellen lassen für $\mu = \{.1 ; .5\}$

$$f(\alpha) = \cos(\alpha) + \mu \cdot \sin(\alpha) \rightarrow f'(\alpha) = -\sin \alpha + \mu \cdot \cos(\alpha)$$

Auf die zweite Ableitung wird hier verzichtet; es folgt: $\tan(\alpha) = \mu$

Das allgemeine Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}\alpha &= \tan^{-1}(\mu) \\ \text{für } \mu = 0.2 &\Rightarrow \alpha = 11.3^\circ\end{aligned}$$

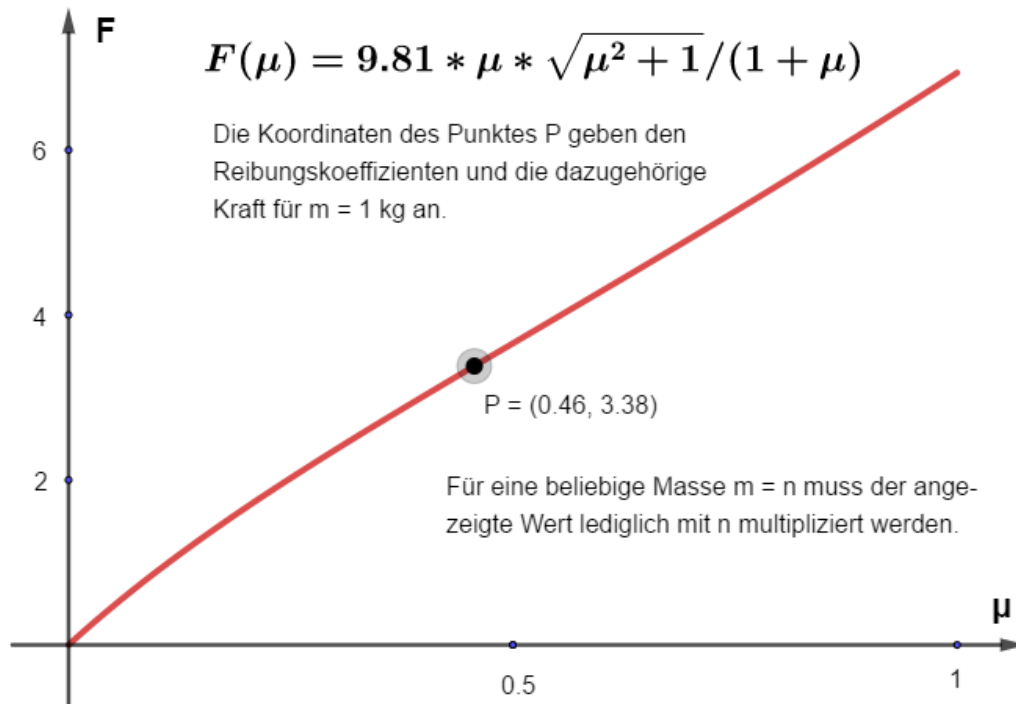
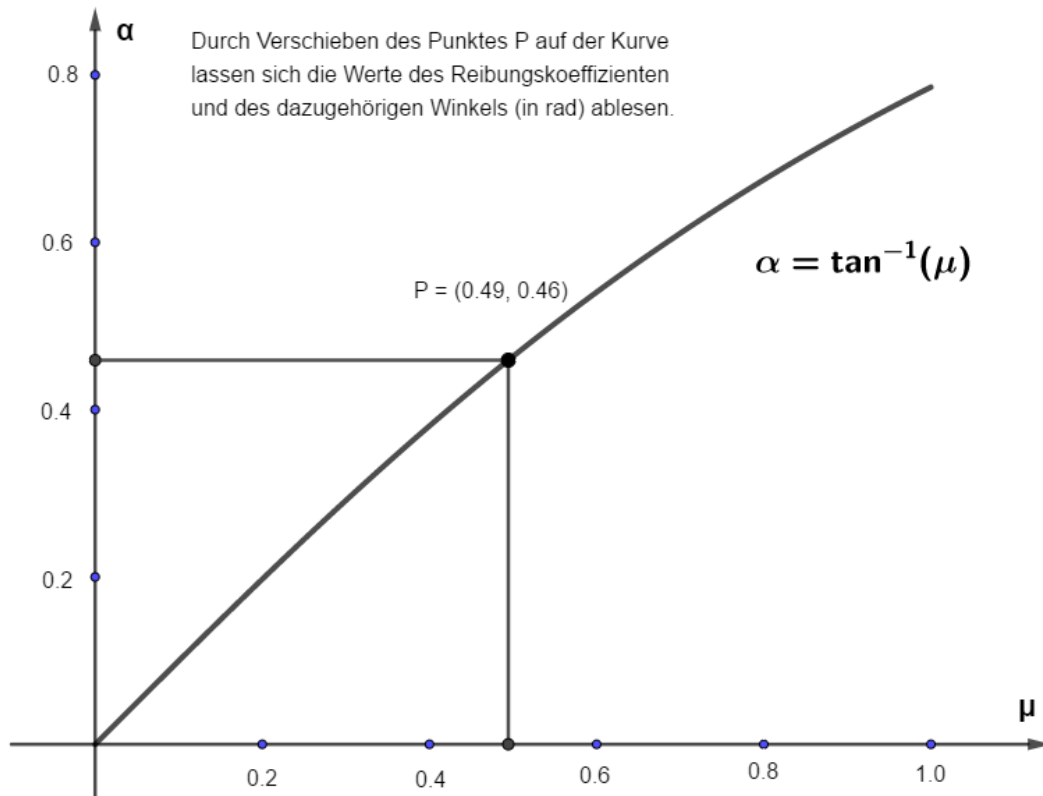
Dieses Ergebnis findet man so auch in den einschlägigen Fachbüchern des Maschinenbaus

Aus $F = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{\cos(\alpha) + \mu \cdot \sin(\alpha)}$ wird mit $\alpha = \tan^{-1}(\mu)$, $m = 1$ (Gewichtseinheit),

$$\cos(\tan^{-1}(\mu)) = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \quad \text{und} \quad \sin(\tan^{-1}(\mu)) = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \quad \text{die Gleichung}$$

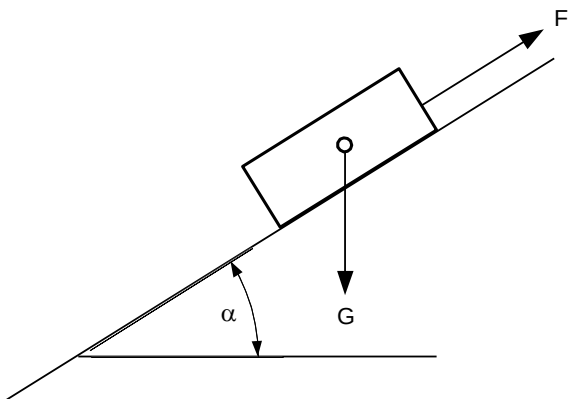
$$F(\mu) = \frac{9.81 \cdot \mu \cdot \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu + 1}$$

Dazu zwei GeoGebra-Grafiken:



Zusatzaufgabe:

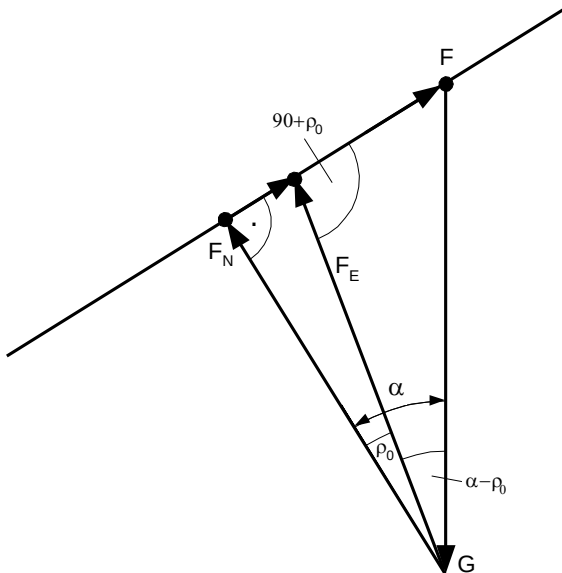
Kraftaufwand bei einer auf einer schrägen Unterlage gezogenen Masse



Aufgabenstellung

Wie groß muss die Haltekraft F sein, damit die Maschine mit der Gewichtskraft G bei einem Reibungskoeffizienten μ_0 auf der schiefen Ebene nicht abrutscht?

1. Freimachen des Körpers



2. Beziehungen zwischen den Kräften

In der Kräfteckschizze wird die Haftreibungskraft F_{R0} und die Normalkraft F_N zur Ersatzkraft F_E zusammengefasst.

Dadurch entsteht das schiefwinklige Dreieck, auf das der Sinussatz angewendet wird.

$$\frac{F}{\sin(\alpha - \rho_0)} = \frac{G}{\sin(90 + \rho_0)}$$
$$F = G \cdot \frac{\sin(\alpha - \rho_0)}{\sin(90 + \rho_0)}$$

$$F = G \cdot \frac{\sin(\alpha - \rho_0)}{\cos(\rho_0)}$$

Zur letzten Formel gelangt man durch Anwendung der Additionstheoreme. Die weitere Anwendung dieser Regeln führt zu

$$F = G \cdot \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\rho_0) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\rho_0)}{\cos(\rho_0)}$$
$$F = G \cdot \left[\sin(\alpha) - \frac{\sin(\rho_0)}{\cos(\rho_0)} \cdot \cos(\alpha) \right]$$

mit $\mu_0 = \tan(\rho_0) = \frac{\sin(\rho_0)}{\cos(\rho_0)}$ wird daraus

$$F = G \cdot [\sin(\alpha) - \mu_0 \cdot \cos(\alpha)]$$

Man kann zwei Fälle unterscheiden:

$$\underline{\rho_0 = \alpha} \quad \text{das hei\ss}t: \quad F = G \cdot \frac{\sin(0)}{\cos(\rho_0)} = 0$$

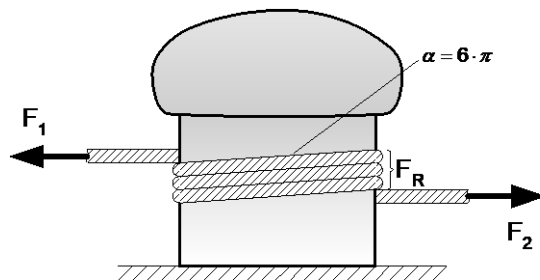
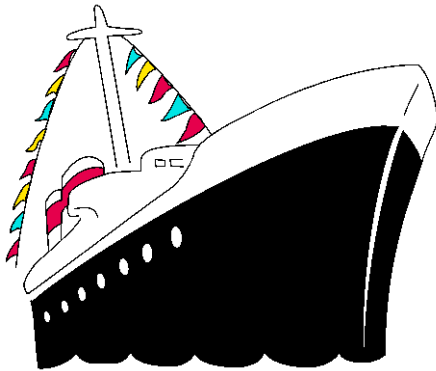
$$\underline{\rho_0 = 0} \quad \text{das hei\ss}t: \quad F = G \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(0)} = G \cdot \sin(\alpha)$$

[reibungsfrei; Haltekraft = Hangabtriebskraft]

Reibungsproblem 2 - Seilreibung

Vorbemerkung

Als Beispiel für Seilreibung soll ein Poller dienen. Darunter versteht man einen kurzen Stahlzylinder, der an der Anlegestelle von Schiffen befestigt ist. Legt man ein Seil mit einigen Windungen um einen solchen Poller, so ist es mit dieser Anordnung **einer** Person möglich, sehr große Zugkräfte zu halten.



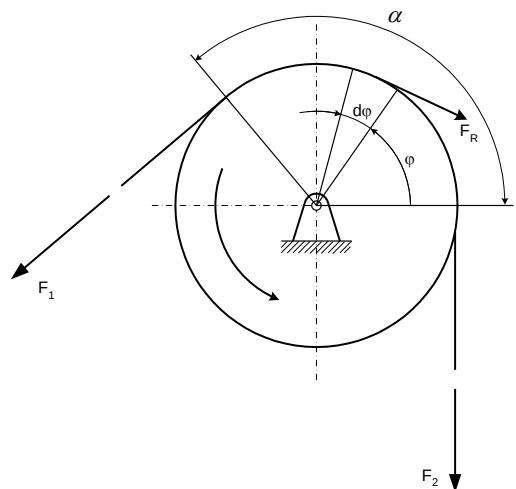
Wie aus beiden Abbildungen zu sehen ist, gilt

$$F_1 = F_2 + F_R$$

Durch einfache Versuche lässt sich feststellen, dass die übertragbare Zugkraft umso größer wird, je größer der Umschlingungswinkel α ist.

Außerdem kann festgehalten werden, dass die zu haltende Kraft neben der Haltekraft F_2 auch noch von der Reibungszahl μ abhängt; also:

$$F_1 = f(F_2, \mu, \alpha)$$



Aufgabe

Zeigen Sie, dass sich das Seilreibungsgesetz, auch *Eulersche* bzw. *Eytelweinsche Gleichung* genannt, durch folgende Formel darstellen lässt:

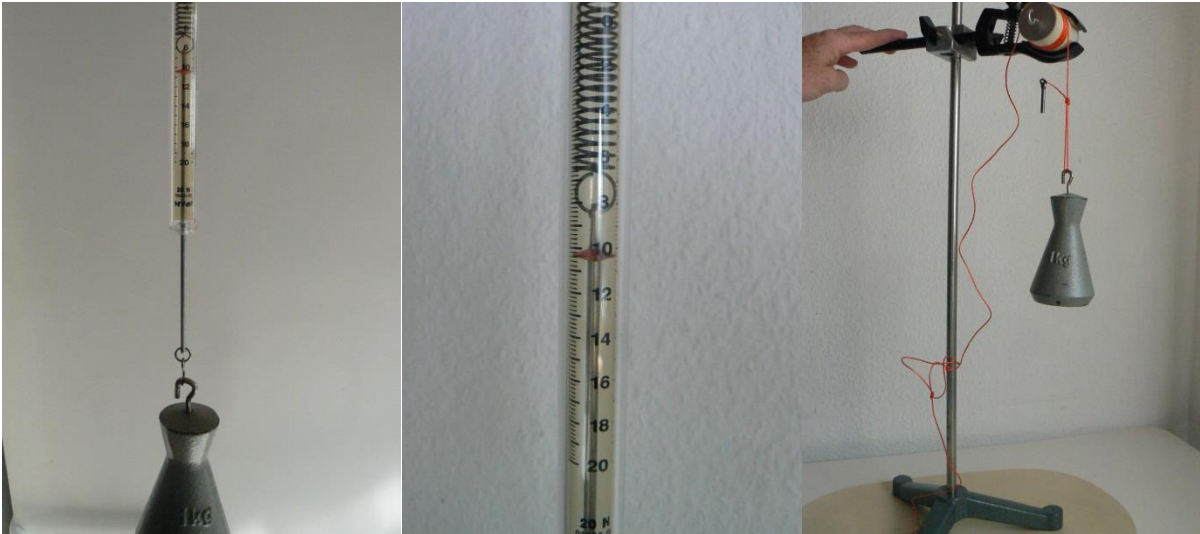
$$F_1 = F_2 \cdot e^{\mu \cdot \alpha}$$

wobei e = Basis des natürlichen Logarithmus

μ = Reibungskoeffizient zwischen Seil und Zylinder

α = Umschlingungswinkel (im Bogenmaß)

Benutzen Sie dazu die Ergebnisse, die ein einfacher Versuch im Klassenraum liefert:



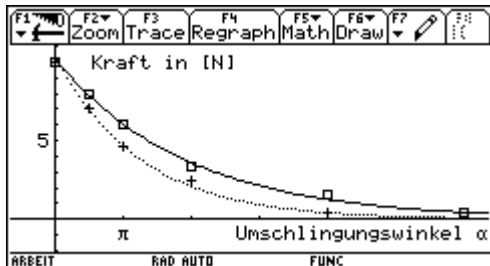
Messungen bei diesem einfachen Versuch haben ergeben:

Zylinder 1	α [rad]	0	$\pi/2$	π	2π	4π	6π
	F [N]	10	8	6	3.4	1.6	0.4
Zylinder 2	α [rad]	0	$\pi/2$	π	2π	4π	
	F [N]	10	7	4.6	2.4	0.4	

Eine Herleitung aus Messwerten

a) Auswertung der Messreihen

Eine exponentielle Regression der Messwerte liefert folgende Ergebnisse:



$$y1(x) \approx 10.2665 \cdot 0.8474^x \xrightarrow{\text{nach Anpassung}} f_{21}(x) = 10 \cdot 0.85^x$$

$$y2(x) \approx 10.4763 \cdot 0.7748^x \xrightarrow{\text{nach Anpassung}} f_{22}(x) = 10 \cdot 0.79^x$$

Die exponentielle Regression wird gewählt, weil

- es sich um streng monoton fallende Werte handelt, die offensichtlich gegen NULL streben
- es keine einfach gebrochen-rationale Funktion sein kann, weil für diese ein Startwert $\alpha = 0^\circ$ nicht existiert.

Die Anpassung wird gewählt, damit der Startwert $F = 10$ für $\alpha = 0^\circ$ erreicht wird.

b) Erklärung der Unterschiede

Formt man $f_{21}(x)$ und $f_{22}(x)$ um mit der Regel, dass $a = e^{\ln(a)}$ ist, so ergibt sich

$$f_{21}(x) = 10 \cdot e^{-0.1625 \cdot x} = \frac{10}{e^{0.1625 \cdot x}} \quad \text{und} \quad f_{22}(x) = 10 \cdot e^{-0.2357 \cdot x} = \frac{10}{e^{0.2357 \cdot x}}.$$

In diesen Formeln ist x der Umschlingungswinkel; zu erklären bleiben die Werte 0.1625 bzw 0.2357.

Die Unterschiede können nur herrühren von einem unterschiedlichen Reibungsverhalten zwischen Seil und der Oberfläche der Rolle → die zweite Rolle muss eine rauhere Oberfläche haben, so dass sich geringere Seilkräfte zum Halten der Last ergeben. Die ermittelten Zahlen 0.1625 bzw. 0.2357 bezeichnet man als Reibungskoeffizienten μ zwischen einer Werkstoffpaarung.

Die allgemeine Formel für die Seilreibung lautet $F_1 = F_2 \cdot e^{\mu \cdot \alpha}$

wobei F_1 die zu haltende Kraft

F_2 die aufzubringende Kraft

α der Umschlingungswinkel

μ der Reibungskoeffizient ist.

Eine theoretische Herleitung

Betrachtet man einen kleinen Kreissektor, ergibt sich die folgende Darstellung, aus der man das statische Kräftegleichgewicht für das Seilelement ermittelt:

$$(F_s + dF_s) \cdot \cos(d\varphi/2) - \mu \cdot dF_n - F_s \cdot \cos(d\varphi/2) = 0 \quad (1)$$

$$dF_n - (F_s + dF_s) \cdot \sin(d\varphi/2) - F_s \cdot \sin(d\varphi/2) = 0 \quad (2)$$

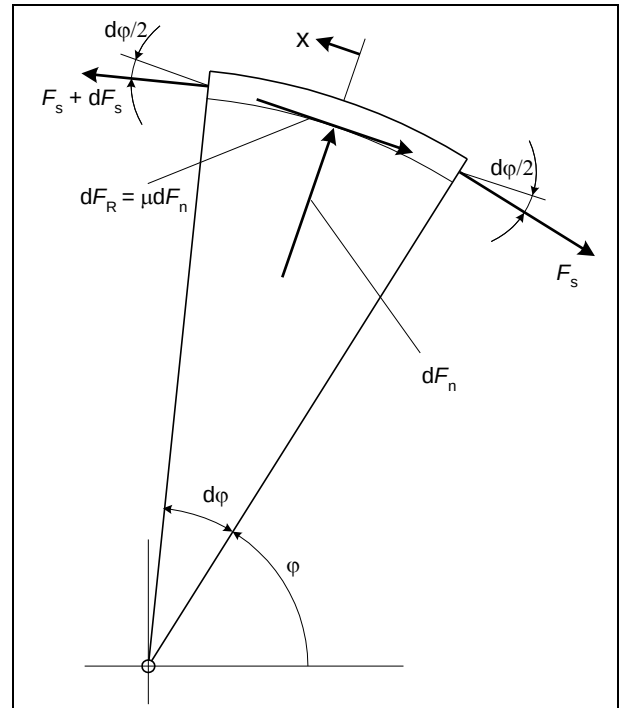
Für sehr kleine Winkel gilt:

$$\cos(d\varphi/2) = 1 \text{ und } \sin(d\varphi/2) = d\varphi/2 \quad (3)$$

Außerdem ist das Produkt höherer Ordnung $dF_s \cdot d\varphi/2$ vernachlässigbar.

Damit ergibt sich aus (1) und (2)

$$\left. \begin{array}{l} dF_s = \mu \cdot dF_n = dF_R \\ dF_n = F_s d\varphi \end{array} \right\} \Rightarrow dF_s = \mu \cdot F_s d\varphi$$



Mit $\mu = \mu_0 = \text{konst.}$ und $\varphi = \alpha$ erhält man im Gleichgewichtszustand für die Seilkraft F_s die Differenzialgleichung

$$\boxed{dF_s = \mu_0 \cdot F_s d\alpha}$$

Diese DGL wird durch „Trennung der Variablen“ in folgende Form gebracht:

$$\frac{dF_s}{F_s} = \mu_0 \cdot d\alpha$$

Bei der beidseitigen Integration dieses Ausdrucks ergibt sich auf der linken Seite ein logarithmischer Ausdruck (zur Basis e), so dass es in diesem Fall üblich ist, die auftretende Konstante K mit $\ln(C)$ zu bezeichnen; aus

$$\int \frac{dF_s}{F_s} = \int \mu_0 \cdot d\alpha \text{ folgt } \ln(F_s) = \mu_0 \cdot \alpha + \ln(C)$$

$$\ln(F_s) - \ln(C) = \ln\left(\frac{F_s}{C}\right) = \mu_0 \cdot \alpha$$

woraus sich durch *Entlogarithmieren* ergibt:

$$F_s = C \cdot e^{\mu_0 \cdot \alpha}$$

Mit $F_s = F_1$ und dem Anfangswert $C = F_s(0) = F_2$ folgt unmittelbar die *Eytelweinsche Gleichung*

$$\boxed{F_1 = F_2 \cdot e^{\mu_0 \cdot \alpha}}$$

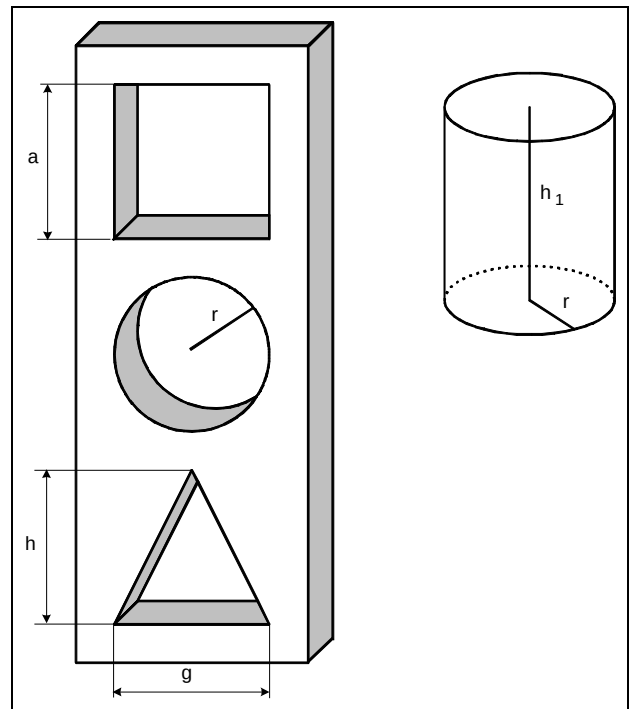
Praktische Probleme an einem Zylinderschnitt

Problemstellung

Dargestellt ist das Problem, einen Korken dergestalt zuzuschneiden, dass er *nach-einander* sowohl einen quadratischen, kreisförmigen als auch dreieckigen Durchbruch ($g = h = 2r = a$) einer Platte verschließen kann.

Aufgaben

1. Skizzieren Sie den Körper!
2. Bestimmen Sie das Volumen des Körpers in Abhängigkeit vom Radius r !
3. Ermitteln Sie die Schnittkurvengleichung in der Mantelabwicklung!
4. Bestimmen Sie die Länge der Schnittkurve!
5. Berechnen Sie die Gesamtfläche des Körpers!
6. Versuchen Sie, für den Rand des Schnittes eine Raumkurve zu definieren!



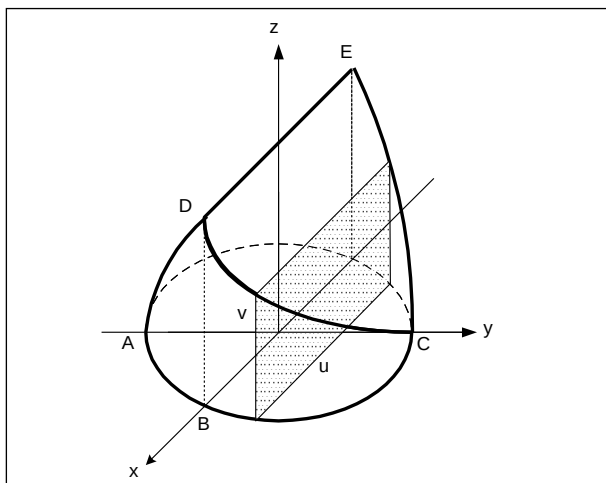
Bemerkung:

Das Problem ist real; im Bild ist ein Teil der Entlüftungsanlage der Werkstätten der BBS II Emden zu sehen.



Zur Herstellung dieser Anlage ist es für den ausführenden Betrieb wichtig zu wissen, wie groß der Blechbedarf ist, wie lang die Schweißnähte (Schnittkurve) sind und dgl.mehr, um Kosten der Fertigung kalkulieren zu können → siehe Aufgabenstellungen

Lösung zu 1) und 2)



Die Lösungsidee zur Volumenberechnung besteht darin, das Integral über die Querschnittsflächenfunktion zu berechnen. Dazu führt man parallele Schnitte zu dem Quadrat in der Mitte des Körpers aus; es ergeben sich Rechtecke (siehe Abb.).

Die Seitenlängen sind dann

$u = 2 \cdot \sqrt{r^2 - y^2}$ und $v = -2y + 2r$, denn die Ordinaten der Geraden durch die Mitte von $\overline{DE}$ und C liefern für $0 \leq y \leq r$ die Höhe der Rechtecke für eine Hälfte des Körpers, zum anderen befinden sich Eckpunkte auf dem

Grundkreis.

Also gilt:

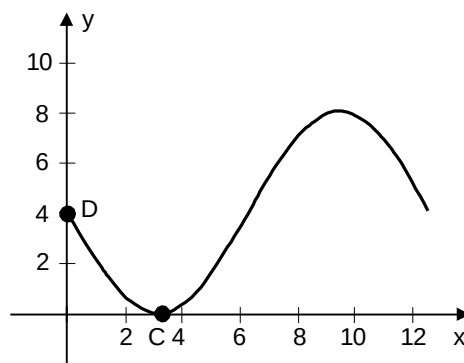
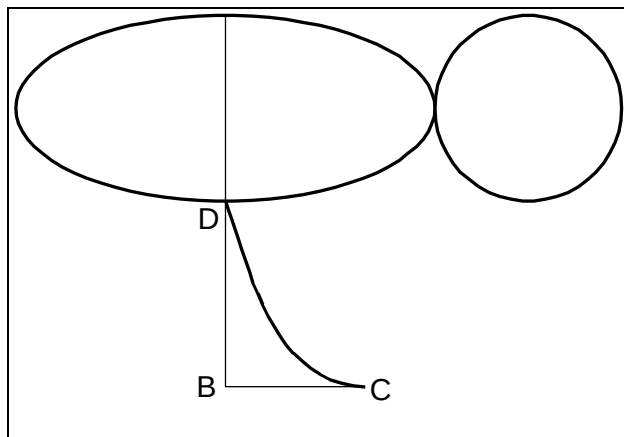
$$V = 2 \cdot \int_0^r A_Q dy \approx 3.617 \cdot r^3 \text{ VE}$$

mit CAS →

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\begin{aligned} & a(r) && 14.732777999 \cdot r^2 \\ & 2 \cdot \sqrt{r^2 - y^2} \rightarrow u && 2 \cdot \sqrt{r^2 - y^2} \\ & -2 \cdot y + 2 \cdot r \rightarrow v && 2 \cdot r - 2 \cdot y \\ & u \cdot v \rightarrow aq && 4 \cdot (r - y) \cdot \sqrt{r^2 - y^2} \\ & 2 \cdot \int_0^r aq dy \rightarrow vg && 3.61651864051 \cdot r^3 \\ & 2 * f(aq, y, 0, r) \rightarrow vg && \end{aligned}$					
LKMATHE RAD AUTO FUNC 17/30					

Schnittkurvengleichung (für $h = 2r$)

Schaut man sich in der linken Abbildung die Schnittkurve DC in der Mantelabwicklung an und legt diese zusammen mit den anderen drei (nicht gezeichneten) Kurven in geeigneter Weise in ein Koordinatensystem, so entsteht das rechte Bild!



Der Teil DC der Kurve muss – für den allgemeinen Fall - folgende Eigenschaften haben:

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \cdot r & f'(0) &= -2 \\ f\left(\frac{\pi}{2} \cdot r\right) &= 0 & f'\left(\frac{\pi}{2} \cdot r\right) &= 0 \end{aligned}$$

Da es sich um eine Abwicklung am Kreis handelt, liegt die Vermutung nahe, dass es sich um eine Kreisfunktion handelt.

Für den Ansatz $f(x) = a \cdot \sin[b(x+c)] + d$ kann man aus den Abbildungen unmittelbar ablesen:

$$d = 2r \quad a = -2r \quad c = 0$$

Für b ergibt sich aus $f'(0) = -2$ der Wert $b = \frac{1}{r}$ und somit

$$f(x) = 2r \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{x}{r}\right) \right] \quad \text{für } x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \cdot r \right]$$

Diese Funktion erfüllt die oben gestellten Bedingungen.

Länge der Schnittkurve

Aus den Abbildungen entnimmt man, dass die Länge der oben ermittelten Schnittkurve der Länge eines Viertels der Ellipse mit den Halbachsen $a = \sqrt{5} \cdot r$ und $b = r$ entsprechen muss.

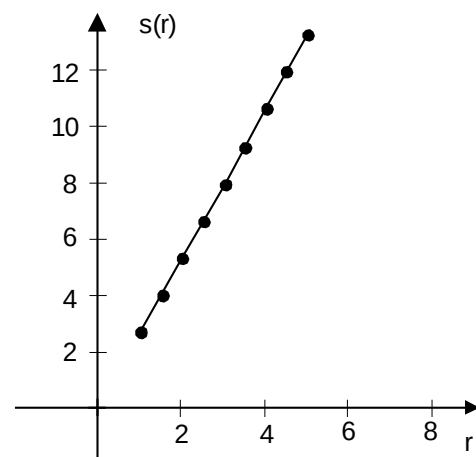
Der Versuch, mit einem CAS wie DERIVE, MATHCAD oder mit dem NSpire die Länge

dieser Schnittkurve mit dem bestimmten Integral $s(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2} \cdot r} \sqrt{1 + \left[-2 \cos\left(\frac{x}{r}\right) \right]^2} dx$ in

allgemeiner Form zu ermitteln, scheitert bei allen drei Systemen. Setzt man aber für $r = 1, r = 2$ usw. ein, leisten diese Systeme vorzügliche Arbeit und es ergibt sich folgende Tabelle:

r	s(r)
1	2.63518
1.5	3.95277
2	5.27036
2.5	6.58795
3	7.90555
3.5	9.22314
4	10.5407
4.5	11.8583
5	13.1759

$\Rightarrow s(r) \approx 2.63518 \cdot r$



Zusammenhang zwischen Radius r und Bogenlänge $s(r)$

Gesamtfläche des Körpers

Die Gesamtfläche setzt sich zusammen aus einer Ellipse mit den Halbachsen $a = \sqrt{5} \cdot r$ und $b = r$, einem Kreis mit dem Radius r und vier Flächenstücken, die sich mit

$A = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}r} f(x) dx$ berechnen lassen.

$$\begin{aligned} A_{ges} &= \pi \cdot \sqrt{5}r \cdot r + \pi \cdot r^2 + 4 \cdot (\pi - 2) \cdot r^2 \\ A_{ges} &\approx 11.308 \cdot r^2 \end{aligned}$$

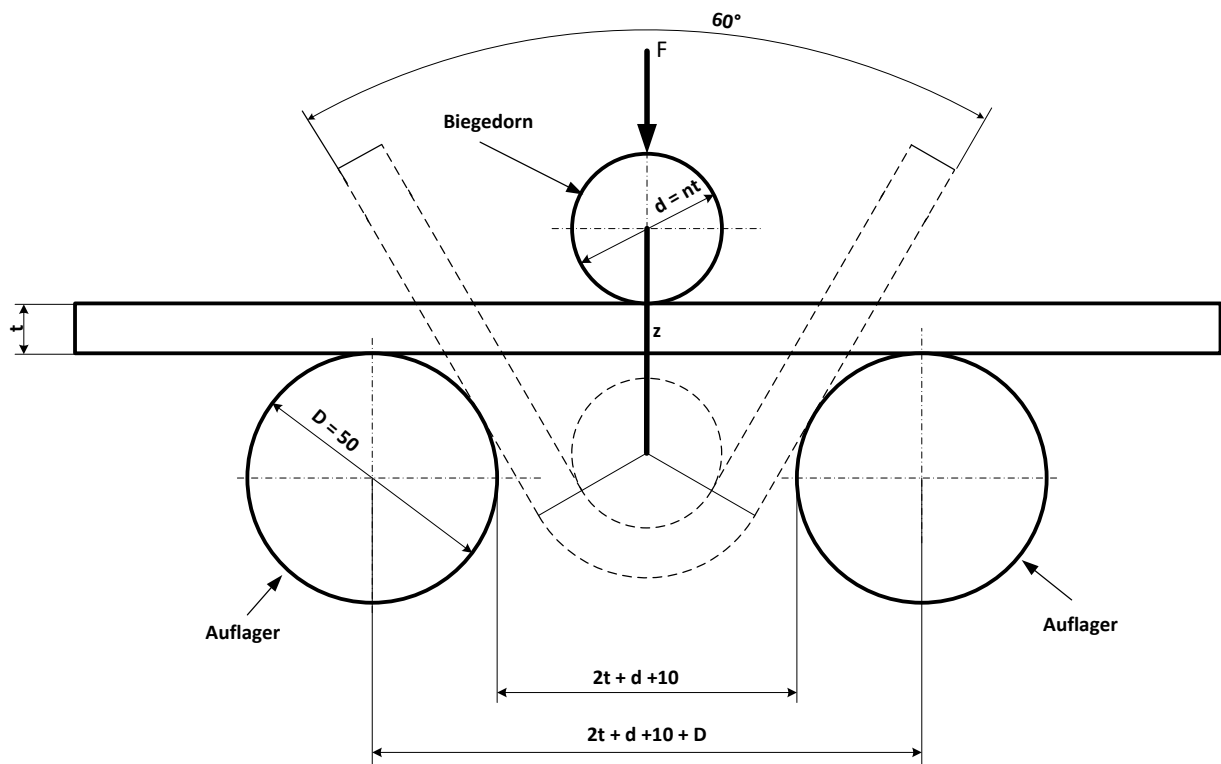
Ein Biegeproblem aus der Praxis - gelöst mit linearer Regression

Der Dreipunkt-Biegeversuch



Bild 2: Zwei Schweißproben

Der Dreipunkt-Biegeversuch nach DIN EN ISO 7438 dient z. B. dazu, Schweißproben zu untersuchen, ihr Umformvermögen zu überprüfen. Die Biegeprobe wird soweit gebogen, bis der verlangte Biegewinkel – in diesem speziellen Fall $\alpha = 60^\circ$ - erreicht ist. Der Durchmesser des Biegedorns $d = n \cdot t$ (Zeichnung 1) ist abhängig vom Maß t der Blechstärke; in der Regel ist $n = 3$ oder $n = 4$.



Zeichnung 1: Versuchsanordnung (Maße in mm)

Aufgaben:

- Welchen Weg z (in mm) muss der Biegedorn zurücklegen, um die Biegeprobe der Länge L in einem Zug auf 60° zu biegen? Ermitteln Sie eine Formel, die den Zusammenhang zwischen $z_{3t}(t)$ bzw. $z_{4t}(t)$ und t beschreibt.
- Entwickeln Sie eine allgemeine Formel $z(n, t, \alpha)$ die den Zusammenhang zwischen z , der Werkstückdicke t , einem beliebigen Winkel α und der Prüfkörpergröße $d = n \cdot t$ beschreibt!
- Zeichnen Sie dazu Diagramme, die den Zusammenhang zwischen z , t und α darstellen!

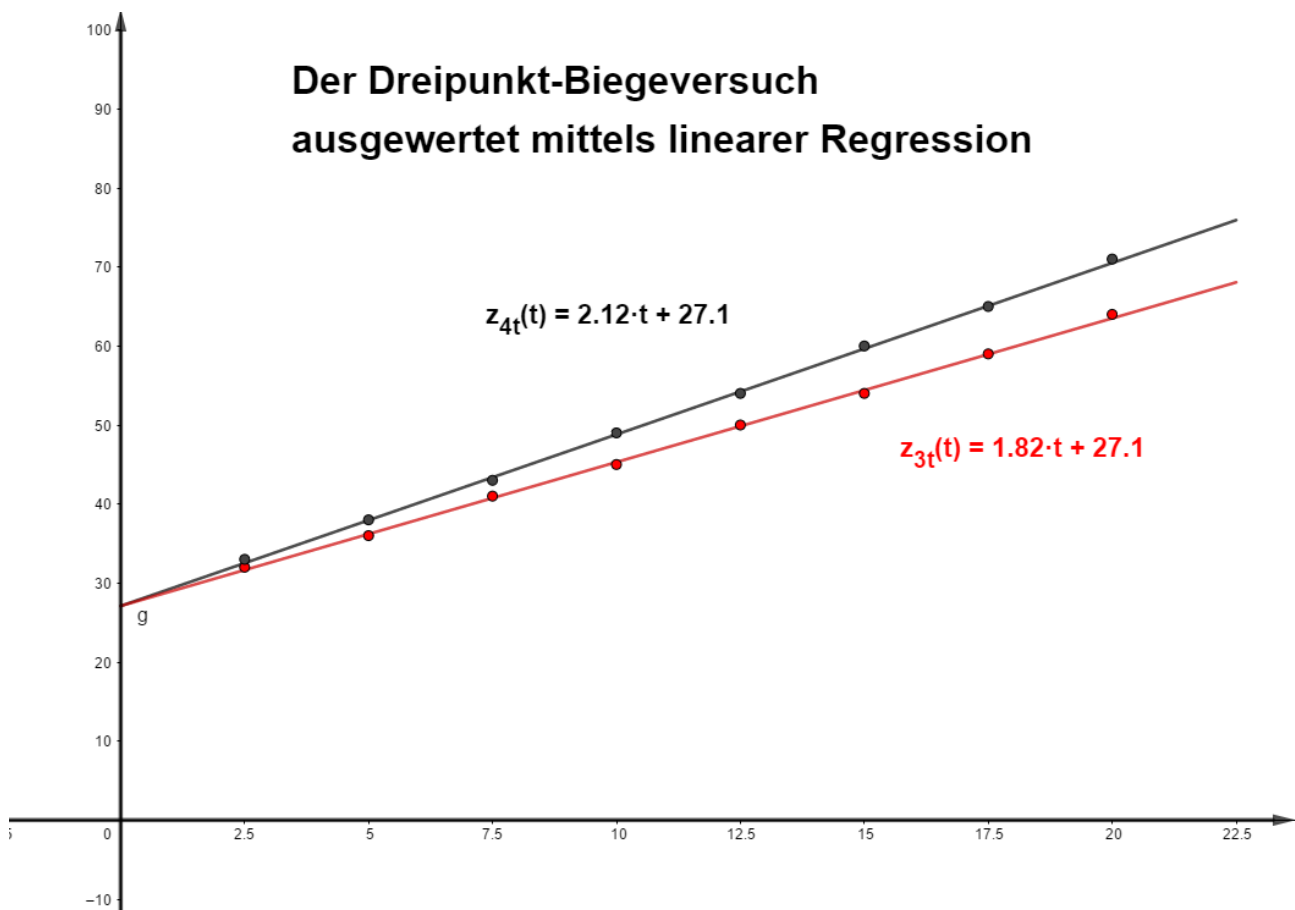
Dreipunkt-Biegeversuch – Lösungsvariante 1

Lineare Regression

Eine Funktion auf analytischem Weg zu finden ist sehr aufwändig, deshalb wurde zunächst aus (CAD-)Zeichnungen der Schülerinnen und Schüler der Wert z sowohl für $d = 3t$ als auch für $d = 4t$ ermittelt und in der nach folgenden Tabelle zusammengefasst:

t	2.5	5	7.5	10.0	12.5	15.0	17.5	20.0	= lx
$Z_{3t}(t)$	32	36	41	45	50	54	59	64	= ly1
$Z_{4t}(t)$	33	38	43	49.0	54	60	65	71	= ly2

Durch die eingebaute Automatik zur linearen Regression des TI-NspireCAS oder von GeoGebra ergeben sich folgende Funktionen:



Anhand des folgenden CAS-Protokolls des TI-Nspire kann nachvollzogen werden, wie solch ein System zu den angezeigten Ergebnissen kommt.

Der Dreipunktbiegeversuch

Definitionen und (Hand)–Rechnung:

$\mathbf{lx} := \{ 2.5, 5, 7.5, 10, 12.5, 15, 17.5, 20 \}$ $\mathbf{ly1}$ $\triangleright$ *Fertig*

$:= \{ 32, 36, 41, 45, 50, 54, 59, 64 \}$ $\mathbf{f(x)} := m \cdot x + b$

$\mathbf{gla(m,b)} := \text{sum}((\mathbf{f(lx)} - \mathbf{ly1})^2)$ $\mathbf{gla(m,b)}$

$\triangleright 8 \cdot b^2 + b \cdot (180 \cdot m - 762) + 1275 \cdot m^2 - 9530 \cdot m + 19019.$

$\frac{d}{d m}(\mathbf{gla(m,b)}) \rightarrow \mathbf{gl1}$ $\triangleright 2550 \cdot m + 180 \cdot b - 9530.$

$\frac{d}{d b}(\mathbf{gla(m,b)}) \rightarrow \mathbf{gl2}$ $\triangleright 16 \cdot b + 180 \cdot m - 762.$

$\text{solve}(\mathbf{gl1=0}$ and $\mathbf{gl2=0,m,b}) \triangleright m=1.82381$ and $b=27.1071$

Das händische Rechnen wurde dem CAS überlassen!

Das Protokoll zeigt die Definition der ermittelten Zeichnungswerte als Listen und die Definition der zu bestimmenden linearen Funktion.

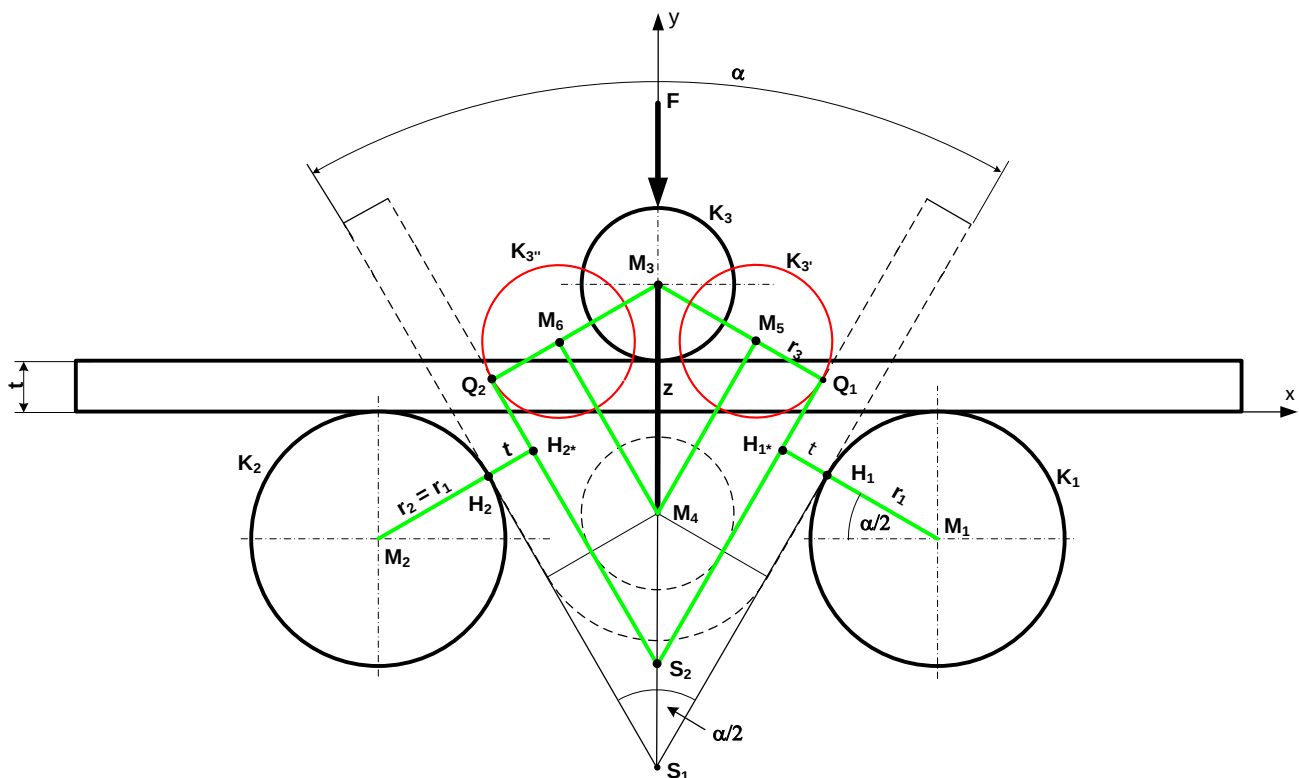
Durch den Befehl $\mathbf{gla(m,b)} := \text{sum}((\mathbf{f(lx)} - \mathbf{ly})^2)$ (händisch sehr aufwändig) wird eine Funktion mit zwei Veränderlichen erzeugt.

Durch Ableiten nach jeweils einer der Veränderlichen erhält man zwei Gleichungen, die jeweils Null gesetzt werden müssen und damit ein Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Das Ergebnis deckt sich mit dem bereits ermittelten.

Dreipunkt-Biegeversuch –Lösungsvariante 2

Eine mathematische Herleitung



Zeichnung 2: Versuchsanordnung mit Hilfskreisen und -linien

Konstruktionsbeschreibung

- H_1 und H_2 sind sofort konstruierbar, womit sich die Geraden g_1 und g_2 als Senkrechte zu $\overline{M_1H_1}$ und $\overline{M_2H_2}$ konstruieren lassen und somit auch sofort (als Parallele zu g_1 und g_2 im Abstand t) die Geraden h_1 und h_2 . [$g_1 \cap g_2$ ergibt S_1 ; $h_1 \cap h_2$ ergibt S_2]
- Denkt man sich K_3 senkrecht zu h_1 bzw. h_2 verschoben bis zur Berührung mit h_1 bzw. h_2 , so ergeben sich die zu konstruierenden Punkte Q_1 bzw. Q_2 als Lotfußpunkte der Lote von M_3 auf h_1 bzw. h_2 .
- Damit sind dann R_1 bzw. R_2 sofort konstruierbar. Die Senkrechten durch R_1 bzw. R_2 zu $\overline{M_3Q_1}$ bzw. $\overline{M_3Q_2}$ schneiden sich in M_4 .
- $\overline{M_3M_4}$ ist die gesuchte Länge.

Herleitung der Berechnungsformel für $d = 4t$ und $\alpha = 60^\circ$

Der Kreis K_{1^*} um M_1 (nicht eingezeichnet) mit dem Radius $r_{1^*} = 25 + t$, $\varphi = \frac{5}{6} \cdot \pi = 150^\circ$, $y_m = -25$ und $x_m = \frac{1}{2} \cdot (2t + 4t + 10 + 50) = 3t + 30$ hat die Gleichung

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= 3 \cdot t + 30 + (25 + t) \cdot \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) \\ y(\varphi) &= -25 + (25 + t) \cdot \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) \end{aligned} \quad \text{und liefert den Punkt } H_{1^*} \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} H_{1^*} &= \left(\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot t - \frac{25 \cdot \sqrt{3}}{2} + 30, -\frac{25}{2} + \frac{t}{2} \right) \\ &\approx (2.1339746t + 8.349365, 0.5t - 12.5) \end{aligned}$$

Die Tangente an diesen Kreis durch H_{1^*} (mit $x = 0$) und der Steigung $m = \tan(60^\circ) = \sqrt{3}$

$$\frac{y - \left(-\frac{25}{2} + \frac{t}{2}\right)}{x - \left(\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot t - \frac{25 \cdot \sqrt{3}}{2} + 30\right)} = m \quad \text{ergibt den Punkt } S_2$$

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \left(0, \left(2 - 3 \cdot \sqrt{3}\right) \cdot t - 30\sqrt{3} + 25\right) \\ &\approx (0, -3.19615t - 26.961524) \end{aligned}$$

Für die Länge $\overline{M_3 S_2}$ erhält man $\overline{M_3 S_2} \approx 3t - (-3.19615t - 26.961524) = 6.19615 \cdot t + 26.961524$

Daraus berechnet man $\overline{M_3 Q_1}$ zu $\overline{M_3 Q_1} = \overline{M_3 S_2} \cdot \sin(30^\circ) \approx 3.098075 \cdot t + 13.480762$

$\overline{M_3 R_1}$ ergibt sich zu $\overline{M_3 R_1} = \overline{M_3 Q_1} - 2t = 1.098075 \cdot t + 13.480762$

Aus dem $\triangle M_3 R_1 Z$ erhält man $z(t) = \frac{\overline{M_3 R_1}}{\sin(30^\circ)} \quad \boxed{z(t) \approx 2.19615 \cdot t + 26.9615}$

Verallgemeinerungen

Eine erste Verallgemeinerung für $d = 4t$ und beliebigem Winkel α

Wie bei der Lösungsvariante 2 gilt hier (Winkel im Bogenmaß):

$$\begin{aligned}x(\varphi) &= 3t + 30 + (25 + t) \cdot \cos(\varphi) \\y(\varphi) &= -25 + (25 + t) \cdot \sin(\varphi)\end{aligned}\quad \text{für } \varphi = \pi - \frac{\alpha}{2} \text{ erhält man}$$

$$\begin{aligned}x(\varphi) &= 3t + 30 + (25 + t) \cdot \cos\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) = 3t + 30 - (25 + t) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\y(\varphi) &= -25 + (25 + t) \cdot \sin\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) = -25 + (25 + t) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

$$H_1^*(t) = \left(3t + 30 - (25 + t) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right); -25 + (25 + t) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)$$

Aus $y = m \cdot x + b$ erhält man mit $m = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ und $H_1^*(t)$ b zu $b = y - m \cdot x$

Das weitere Vorgehen wird für das CAS beschrieben; es werden verschiedene Funktionen beschrieben, um zur Lösung zu gelangen:

$$\triangleright b4(t, \alpha) := -25 + (25 + t) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(3t + 30 - (25 + t) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)$$

Da $b4(t, \alpha)$ sich im gewählten Koordinatensystem negativ ergibt, der Fahrweg z aber positiv sein soll, ergibt sich $\overline{M_3S_2}$ zu

$$\triangleright \overline{M_3S_2} \quad m3s2(t, \alpha) := -b4(t, \alpha) + 3t$$

$$\triangleright \overline{M_3Q_1} \quad m3q1(t, \alpha) := m3s2(t, \alpha) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\triangleright \overline{M_3R_1} \quad m3r1(t, \alpha) := m3q1(t, \alpha) - 2t$$

$$\triangleright z4t(t, \alpha) := \frac{m3r1(t, \alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Die ausführliche Formel lautet:

$z4t(t, \alpha) := \frac{\left(25 - (25 + t) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(3t + 30 - (25 + t) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) + 3t \right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2t}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$
--

Eine weitere Verallgemeinerung für $d = n \cdot t$ und beliebigem Winkel α

Mit dem Austausch $3 \cdot t \rightarrow \left(1 + \frac{n}{2}\right) \cdot t$ und $2 \cdot t \rightarrow \frac{n}{2} \cdot t$ in $z4t(t, \alpha)$ erhält man den Verfahrweg z in seiner allgemeinsten Form in Abhängigkeit vom Durchmesser d des Prüfkörpers, der Werkstückdicke t und dem verlangten Biegewinkel α , vereinfacht durch ein CAS.

$$znt(n, t, \alpha) := \frac{(n+2) \cdot t \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right) + 10 \cdot \left(\sqrt{61} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)\right) - 5 \right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Berechnungsbeispiele:

$$znt(3, t, 60^\circ) = 1.83.127 \cdot t + 26.96152$$

$$znt(4, t, 60^\circ) = 2.196152 \cdot t + 26.96152$$

$$znt(3, t, 50^\circ) = 1.94576 \cdot t + 30.180168$$

Diagramm für $d = 3t$

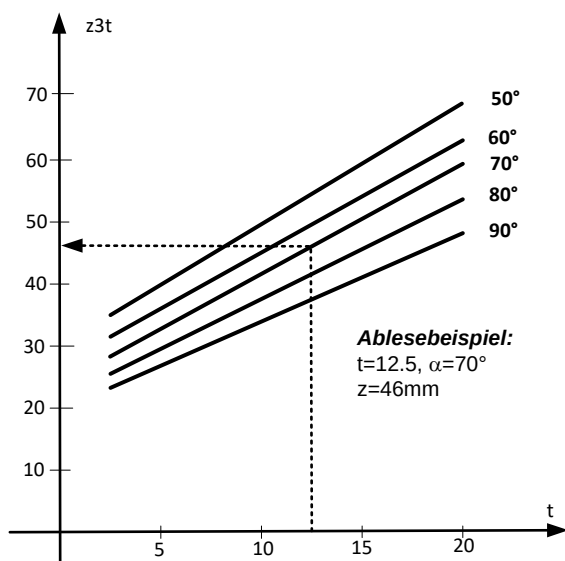
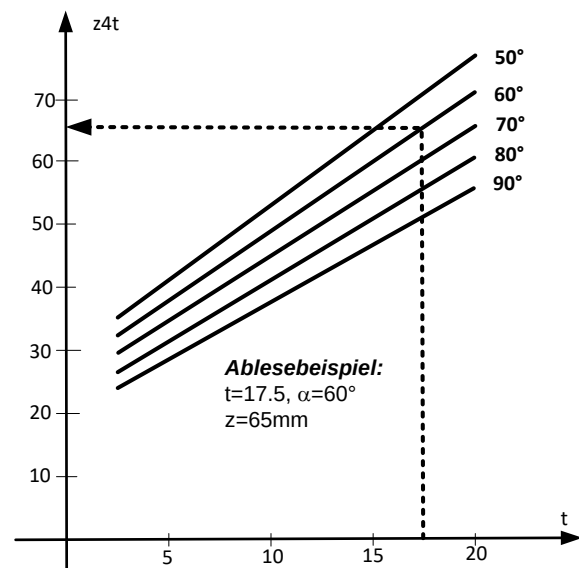


Diagramm für $d = 4t$



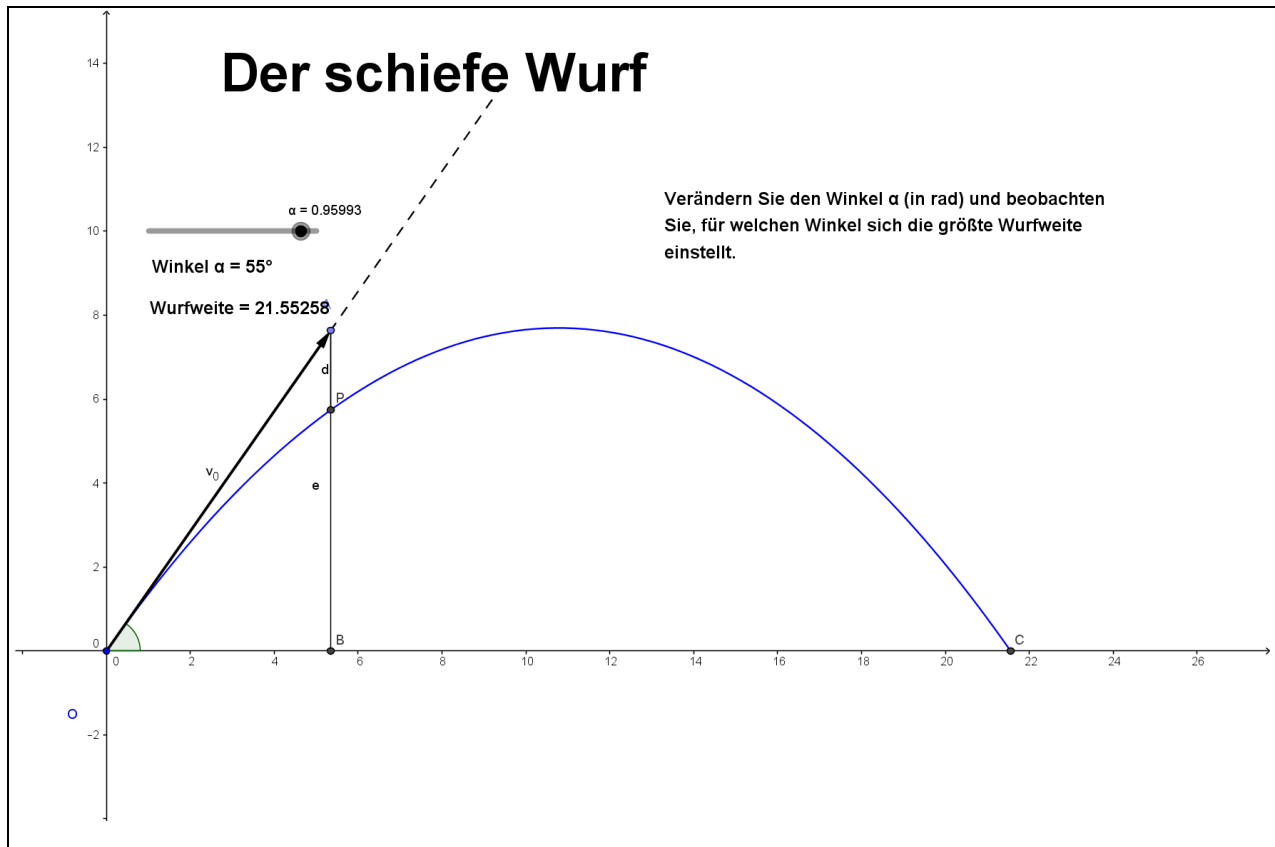
Derartige Diagramme, die den Zusammenhang von drei Größen darstellen, sind in der Technik sehr gebräuchlich, z. B. ein Drehzahldiagramm, das eine grafische Ermittlung einer Drehzahl n in Abhängigkeit vom Werkstückdurchmesser d und der Schnittgeschwindigkeit v_c zulässt. Rechnerisch:

$$n = \frac{1000 \cdot v_c}{\pi \cdot d} \quad v_c \text{ in } [m/min], \quad d \text{ in } [mm], \quad n \text{ in } [1/min]$$

Der schiefe Wurf

I. Die Wurfparabel

Ein Gegenstand wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 [m/s] unter dem Winkel α zur Horizontalen abgeschossen.

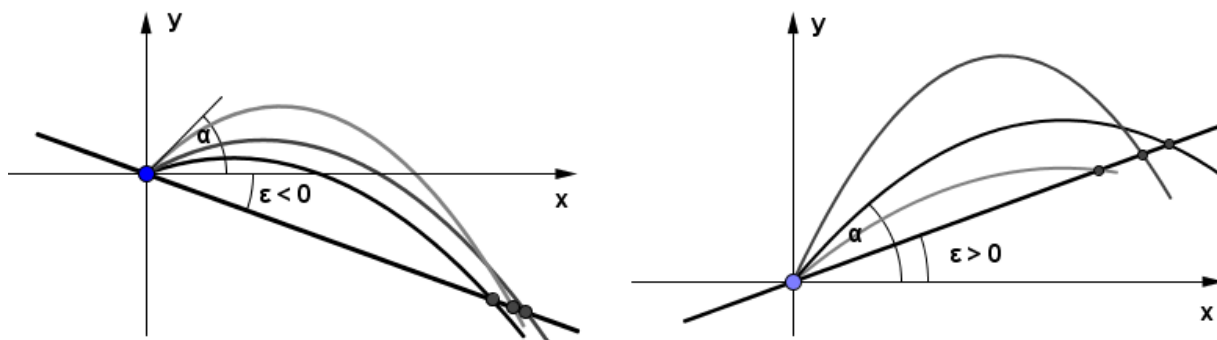


Aufgaben:

- 1) Für welchen Winkel α wird die größte Wurfweite erreicht? Experimentieren Sie mit der GeoGebra-Datei!
- 2) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P in der Form $x(t)$ und $y(t)$, die beide von v_0 , der Zeit t [in s] und dem Winkel α abhängen!
- 3) Verbinden Sie beide Gleichungen so, dass Sie die Zeit t eliminieren und eine Funktion $y = f(x)$ erhalten.
- 4) Ermitteln Sie aus $f(x)$ die Koordinaten von C in allgemeiner Form!
- 5) Aus der GeoGebra-Datei haben Sie die größte Wurfweite unter einem bestimmten Winkel ermittelt. Berechnen Sie daraus die zugrundeliegende Anfangsgeschwindigkeit v_0 !

II. Wurfweite am schrägen Hang¹⁰

Unter welchem Winkel α muss ein Gegenstand mit der Geschwindigkeit v_0 abgeschossen werden, um auf einem schrägen Hang mit dem Neigungswinkel ε möglichst weit zu fliegen?



Aufgaben:

- 1) Beschreiben Sie den schrägen Hang als lineare Funktion der Form $g(x) = m \cdot x + b$
- 2) Berechnen Sie den Schnittpunkt x_2 aus $g(x)$ und der Wurfparabel $f(x)$ in allgemeiner Form! [$x_1 = 0$]
- 3) x_2 ist bei gegebenem Neigungswinkel ε vom Winkel α abhängig [v_0 und g sind Konstanten], $x_2 = f(\alpha)$ soll also ein Maximum werden. Bestimmen Sie α in allgemeiner Form als Funktion von ε !
- 4) Erstellen Sie mit GeoGebra eine Datei, mit der Sie das Ganze veranschaulichen können. Definieren Sie dazu: $v_0 = 15$ und $g = 9.81$
- 5) Die Wurfweite [x_2] ist abhängig vom Winkel α . Mit dem Ergebnis aus 3) kann x_2 in Abhängigkeit von ε definiert werden $\rightarrow x_2 = f(\varepsilon)$. Bestimmen Sie diese Funktion und stellen Sie sie grafisch dar im Intervall $-\frac{\pi}{4} \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{4}$!

Der schiefe Wurf

Lösungen zu I

Zu 1) Mit $\alpha = 45^\circ$ wird die größte Wurfweite mit 22,93578 m erreicht.

Zu 2) und 3)

Die Wurfparabel kann durch eine Funktion in Parameterform beschrieben werden:

$$(1) \quad x = v_0 \cdot t \cdot \cos(\alpha)$$

$$(2) \quad y = v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha) - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Gleichung (1) wird umgeformt in

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}$$

Dieser Term in (2) eingesetzt ergibt die Funktion f mit

$$f: y = x \cdot \tan(\alpha) - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2$$

Zu 4)

Aus
$$x \cdot \tan(\alpha) - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2 = 0 \quad \text{folgt}$$

$$x \cdot \left(\tan(\alpha) - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x \right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$$

Das heißt:

$$C = \left(\frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha); 0 \right)$$

Zu 5)

Aufzulösen ist die Gleichung $\frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha) = 22.93578$ nach v_0 . Es ergibt sich

$$v_0^2 = \frac{22.93578 \cdot 9.81}{\sin(2 \cdot 45^\circ)} = 225$$

$$v_0 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Lösungen zu II – Wurfweite am schrägen Hang

Zu 1)

Der schräge Hang hat die Form einer Ursprungsgeraden:

$$y = x \cdot \tan(\varepsilon) = m \cdot x$$

Zu 2)

Zu berechnen sind nun die Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$; durch Gleichsetzen ergibt sich:

$$\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2 + x \cdot [m - \tan(\alpha)] = 0$$

$$x_1 = 0$$

mit den Lösungen

$$x_2 = \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot [\tan(\alpha) - m] \cdot \cos^2(\alpha)$$

zu 3)

$x_2 = f(\alpha)$ soll ein Maximum werden; es genügt,

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) - m \cdot \cos^2(\alpha)$$

zu betrachten.

$$f'(\alpha) = \cos(2\alpha) - m \cdot \sin(2\alpha) \Rightarrow \tan(2\alpha) = -\frac{1}{m}$$

Für α erhält man also zunächst folgende Lösungsformel:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(-\frac{1}{\tan(\varepsilon)}\right)$$

Beispiele

$$\varepsilon = -45^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(-\frac{1}{\tan(-45^\circ)}\right) \quad \underline{\alpha = 22.5^\circ}$$

$$\varepsilon = -25^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(-\frac{1}{\tan(-25^\circ)}\right) \quad \underline{\alpha = 32.5^\circ}$$

$$\varepsilon = 35^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(-\frac{1}{\tan(35^\circ)}\right) \quad \alpha = -27.5^\circ \quad ???$$

Zu 4)

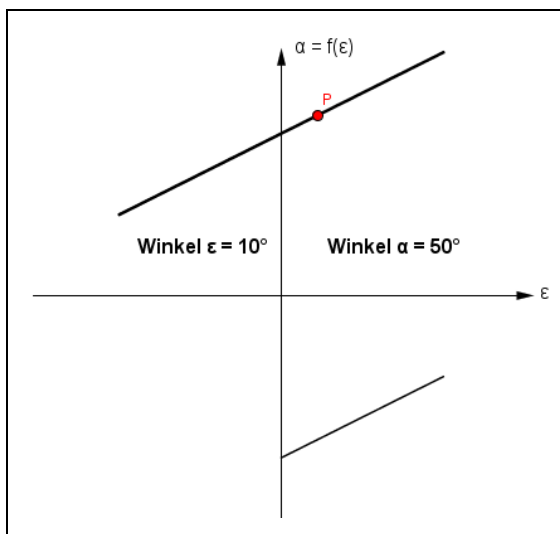
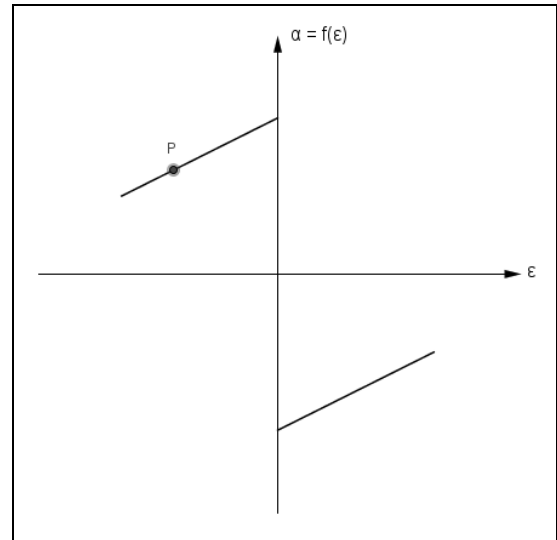
Der Ausdruck $\alpha = f(\varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(-\frac{1}{\tan(\varepsilon)}\right)$ liefert folgende Grafik:

Die y-Koordinate des Punktes P auf der Funktion liefert den Wert des Winkels α im Bogenmaß.

Für negative ε ergibt das den korrekten Wert für α , für positive ε jedoch negative α -Werte.

Dies ist jedoch – siehe Aufgabenstellung – nicht möglich.

Daher muss der Ausdruck $\alpha = f(\varepsilon)$ modifiziert werden. Bei genauer Betrachtung fällt auf, dass der untere Ast der Funktion insgesamt um $\pi/2$ nach unten verschoben ist. Setzt man ihn direkt an den linken Ast an, ergibt sich folgendes Bild.



$$\alpha = f(\varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(-\frac{1}{\tan(\varepsilon)}\right) = \frac{-(2 \cdot \text{mod}(-x, \pi) - \pi)}{4}$$

kann einfacher geschrieben werden als

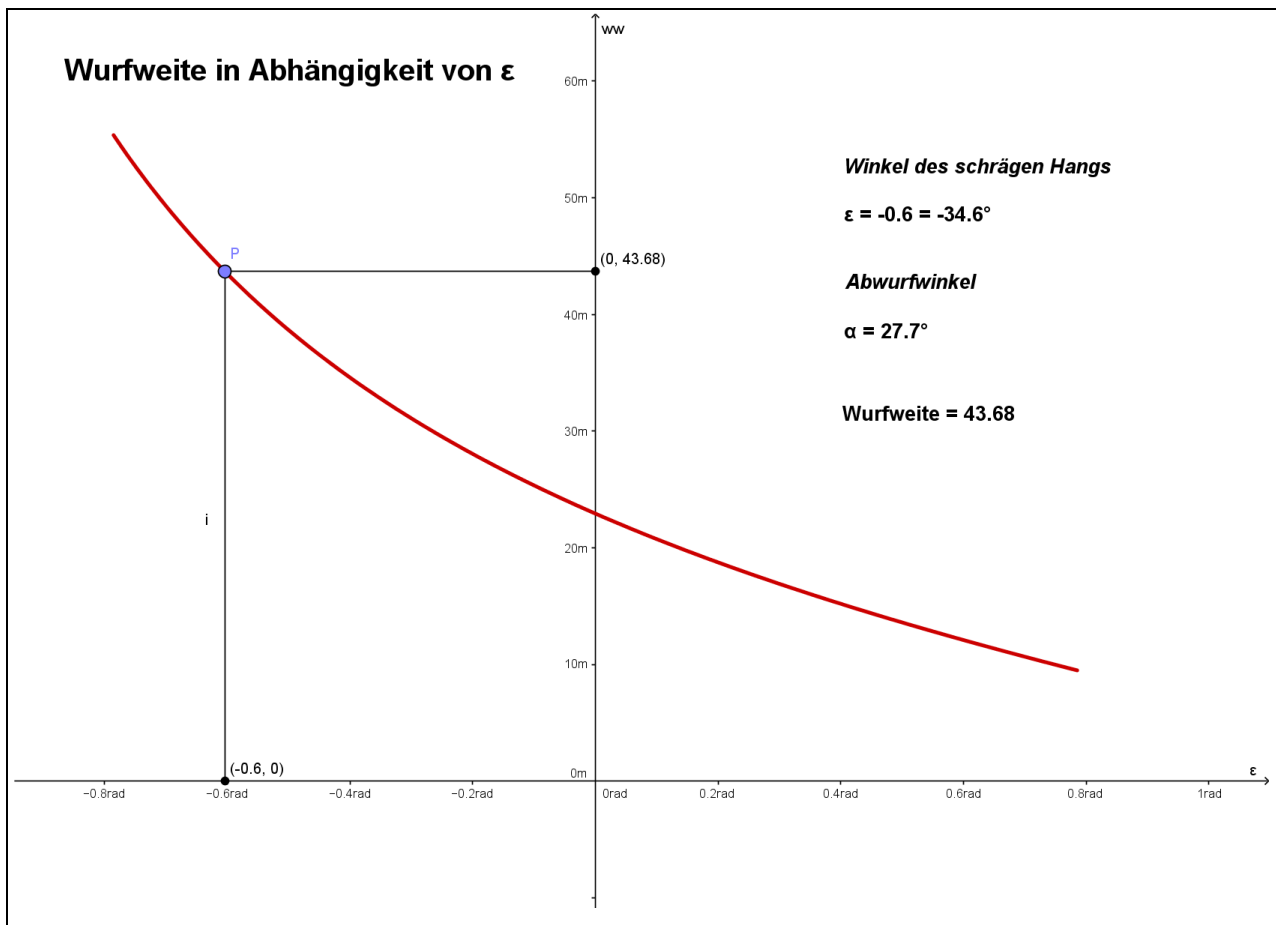
$$\alpha = f(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{\pi}{4} \quad \text{für } -\frac{\pi}{4} \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{4}$$

Zu 5)

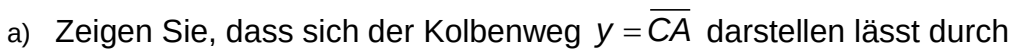
$$x_2 = \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot [\tan(\alpha) - \tan(\varepsilon)] \cdot \cos^2(\alpha) = \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) - \tan(\varepsilon) \cdot \cos^2(\alpha) \right]$$

mit $\alpha = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4}$ ergibt sich

$$x_2 = f(\varepsilon) = \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \cos(\varepsilon) - \tan(\varepsilon) \cdot \cos^2\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$



Mit dem im Bild dargestellten Kurbeltrieb lässt sich eine Kreisbewegung in eine periodische geradlinige Bewegung umwandeln und umgekehrt. Dies ist ein Beispiel für eine erzwungene ungedämpfte mechanische Schwingung.



Benutzen Sie dazu die rechtwinkligen Dreiecke ABD und BCD, das schiefwinklige Dreieck ACD sowie den „trigonometrischen Pythagoras“ $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$

- $$y_L(t) = \cos(t) + L \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{L} \cdot \sin(t)\right)^2}.$$

In einem weiteren Koordinatensystem ist für $L = 3$

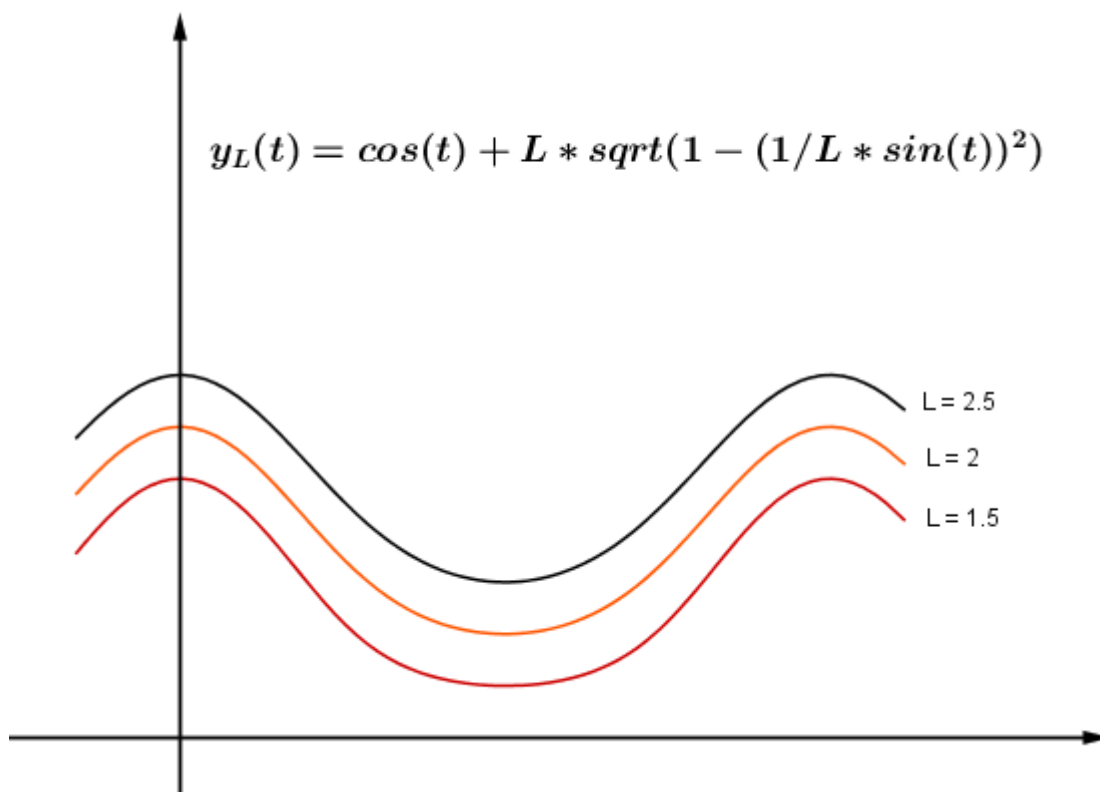
- für eine Periodenlänge zu zeichnen. Für welche Werte von t ergibt sich die Geschwindigkeit $v = 0$, wann ist die Beschleunigung $a = 0$?

- Berechnen Sie dazu beispielhaft auch $y_3(\pi)$, $\int_0^\pi y_3'(t)dt$

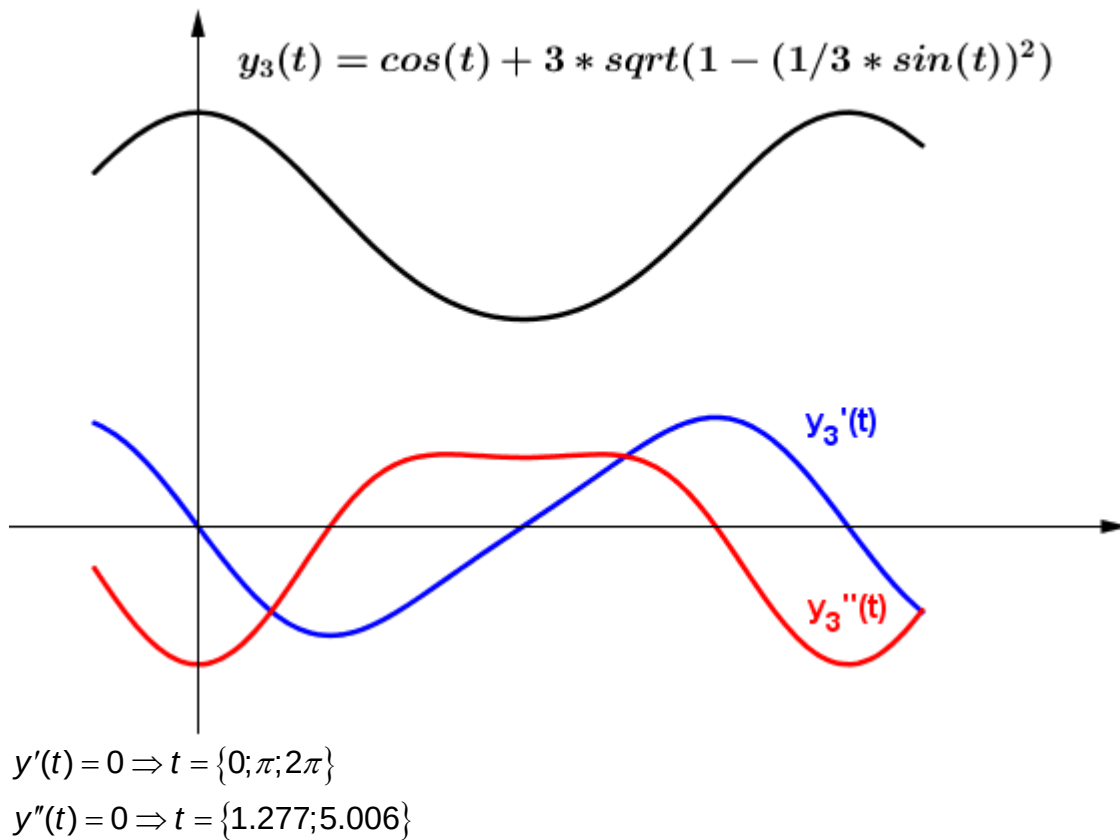
Teilaufgabe a)

$$\left. \begin{array}{lcl}
 y & = & \overline{CB} + \overline{BA} \\
 \Delta BCD : \overline{CB} & = & r \cdot \cos(\varphi) \\
 \Delta ABD : \overline{BA} & = & L \cdot \cos(\alpha) \\
 \Delta ACD : \frac{\sin(\alpha)}{r} & = & \frac{\sin(\varphi)}{L} \\
 & \cos(\alpha) = & \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}
 \end{array} \right\} \Rightarrow y(\varphi) = r \cdot \cos(\varphi) + L \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{r}{L} \cdot \sin(\varphi)\right)^2} \quad \text{q.e.d.}$$

Teilaufgabe b)



$$\begin{aligned}
 y(t) &= \cos(t) + 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{9} \sin^2(t)} \\
 y'(t) &= \frac{-\sin(t) \cdot \left(\sqrt{\cos^2(t) + 8} + \cos(t) \right)}{\sqrt{\cos^2(t) + 8}} \\
 y''(t) &= \frac{-\left(\cos(t) \cdot \left[\cos^2(t) + 8 \right]^{\frac{3}{2}} + \cos^4(t) + 16 \cdot \cos^2(t) - 8 \right)}{\left(\cos^2(t) + 8 \right)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$



Wie in der Zeichnung dargestellt, bewegt sich der Kolben bei der Bewegung des Punktes D auf dem oberen Halbkreis nach links, daher ist v hier negativ. Für den unteren Bogen ergibt sich dann eine positive Geschwindigkeit [v ist ein VEKTOR]. In den Extremwerten von v ändert sich dann das Vorzeichen von a !

Kugel auf gerader und gekrümmter Bahn

Im Buch von **Albrecht Beutelspacher**¹² wird im Experiment 77

Zwei Bahnen verbinden einen höher gelegenen Punkt mit dem Ziel am Fußboden. Die eine Bahn verläuft geradlinig, die andere ist gebogen in Form einer Zyклоide.

- die Frage gestellt, welche Kugel bei gleichzeitigem Start den Zielpunkt zuerst erreicht.

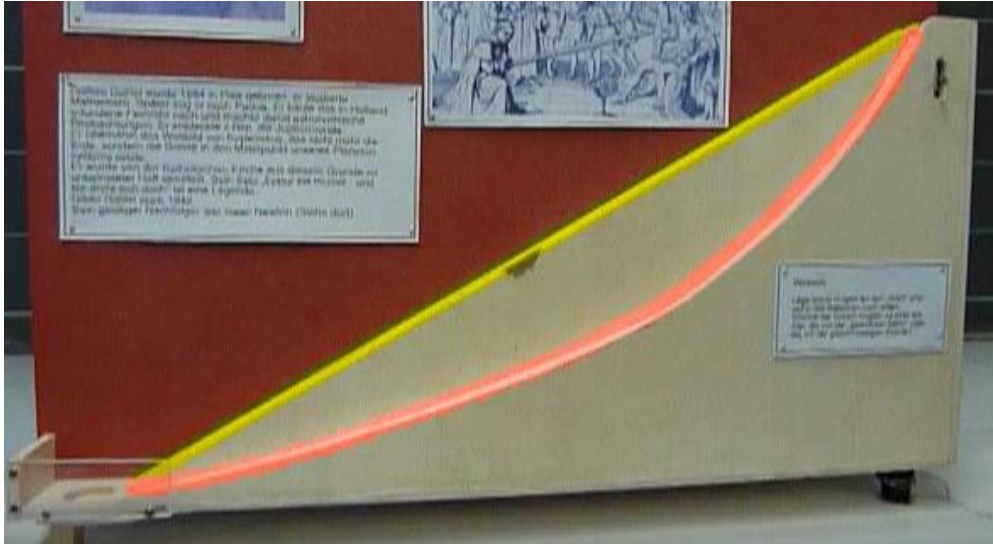


Bild siehe 13,14

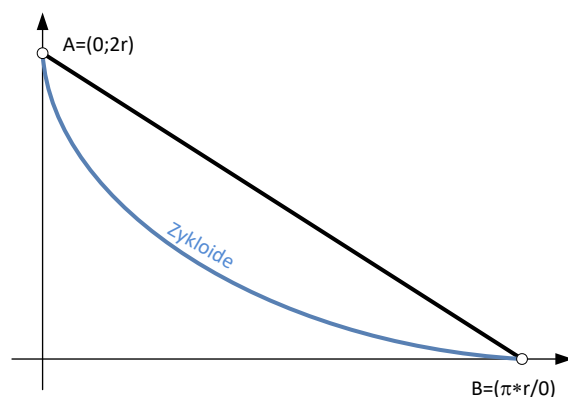
Man beobachtet, dass die Kugel auf der gekrümmten Bahn trotz des längeren Weges „deutlich“ schneller das Ziel erreicht als die Kugel auf der geraden Bahn.

Dieses Ergebnis bietet Anlass zu einigen mathematischen Überlegungen.

Aufgaben

Zugrunde gelegt für die nachfolgenden Betrachtungen wird eine Zyклоide (gespiegelt an $y = r$) mit Kreisradius r ; daraus ergeben Punkte A und B.

- 1) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Geraden und der Zyклоide mit ihrem eingeschränkten Definitionsbereich!
- 2) Berechnen Sie die gemeinsame Endgeschwindigkeit auf der geraden und der gekrümmten Bahn in Abhängigkeit von r !



Berechnungen auf der geraden Bahn

- 3) Ermitteln Sie den Wert des konstanten Beschleunigungsvektors, die Länge s der geraden Bahn in Abhängigkeit von r und damit die Zeit $t(r)$, die die Kugel für die Strecke s benötigt.
- 4) Ergänzen Sie folgende Tabelle und stellen Sie für beliebiges r das t - s -, t - v - und t - a -Diagramm in einer Grafik dar!

r	0.5	1	1.5	2	2.5	3
s						
t						
$V_{\max}$						

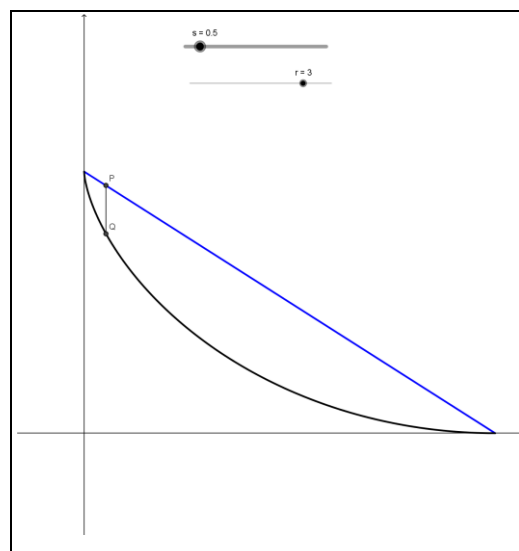
Berechnungen auf der gekrümmten Bahn

Für Kurven in Parameterdarstellung gilt für die Bogenlänge $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt$

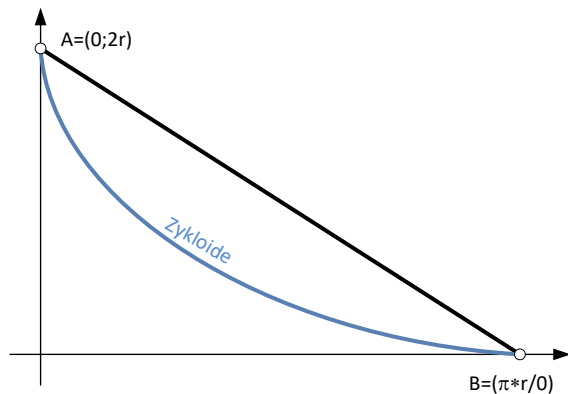
- 5) Berechnen sie die Länge des Zykloidenbogens in Abhängigkeit von r !
- 6) Die Beschleunigung und der Tangentenwinkel ändert sich entlang des Weges. Bestimmen Sie $\alpha(t)$ und $a(t)$. Hinweis: $\dot{f}(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$ und fassen Sie die Ergebnisse in folgender Tabelle zusammen.

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3
α						
a						

- 7) Erstellen Sie mit GeoGebra eine Grafik wie dargestellt und nutzen Sie diese, um eine Liste von Werten für P und Q zu erzeugen (Ansicht Tabelle). Daraus lassen sich Polygone in einem KS erzeugen, aus denen man wie beim Integralmittelwert die mittlere Geschwindigkeit auf der geraden und der gekrümmten Bahn mit hinreichender Genauigkeit bestimmen kann.



Grundlegende Betrachtungen zu 1) und 2)



Zugrunde gelegt für die nachfolgenden Betrachtungen wird eine Zyklode (gespiegelt an $y = r$) mit Kreisradius r ; daraus ergeben sich die Punkte A und B und folgende Funktionsgleichungen:

$$g(x) = -\frac{2}{\pi} \cdot x + 2 \cdot r; \quad 0 \leq x \leq \pi \cdot r$$

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot (t - \sin(t)) \\ r \cdot (1 + \cos(t)) \end{pmatrix}; \quad 0 \leq t \leq \pi$$

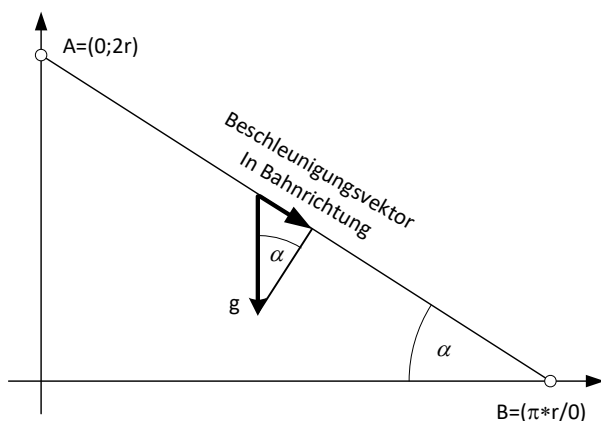
Durch die Erdanziehung werden beide Kugeln während des Laufs immer schneller, bis sie im Punkt B die maximale Geschwindigkeit erreichen. Diese ist bei beiden gleich, da an dieser Stelle jeweils die gesamte Lageenergie (E_{pot}) in Bewegungsenergie (E_{kin}) umgewandelt wurde.

$$\left. \begin{array}{l} E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h \\ E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot v^2 \end{array} \right\} \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad \text{hier: } \boxed{v_{\text{max}} = 2 \cdot \sqrt{g \cdot r} \approx 6.2642 \cdot \sqrt{r}}$$

Es handelt sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung auf der Länge

$s_g = r \cdot \sqrt{4 + \pi^2} \approx 3.7242 \cdot r$ bzw. um eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung auf der Zyklode mit der Länge $s_{zy} = 4 \cdot r$ (siehe unten).

Berechnungen an der geraden Bahn zu 3) und 4)



Für den konstanten Beschleunigungsvektor entlang der Geraden gilt:

$$a = g \cdot \sin(\alpha)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

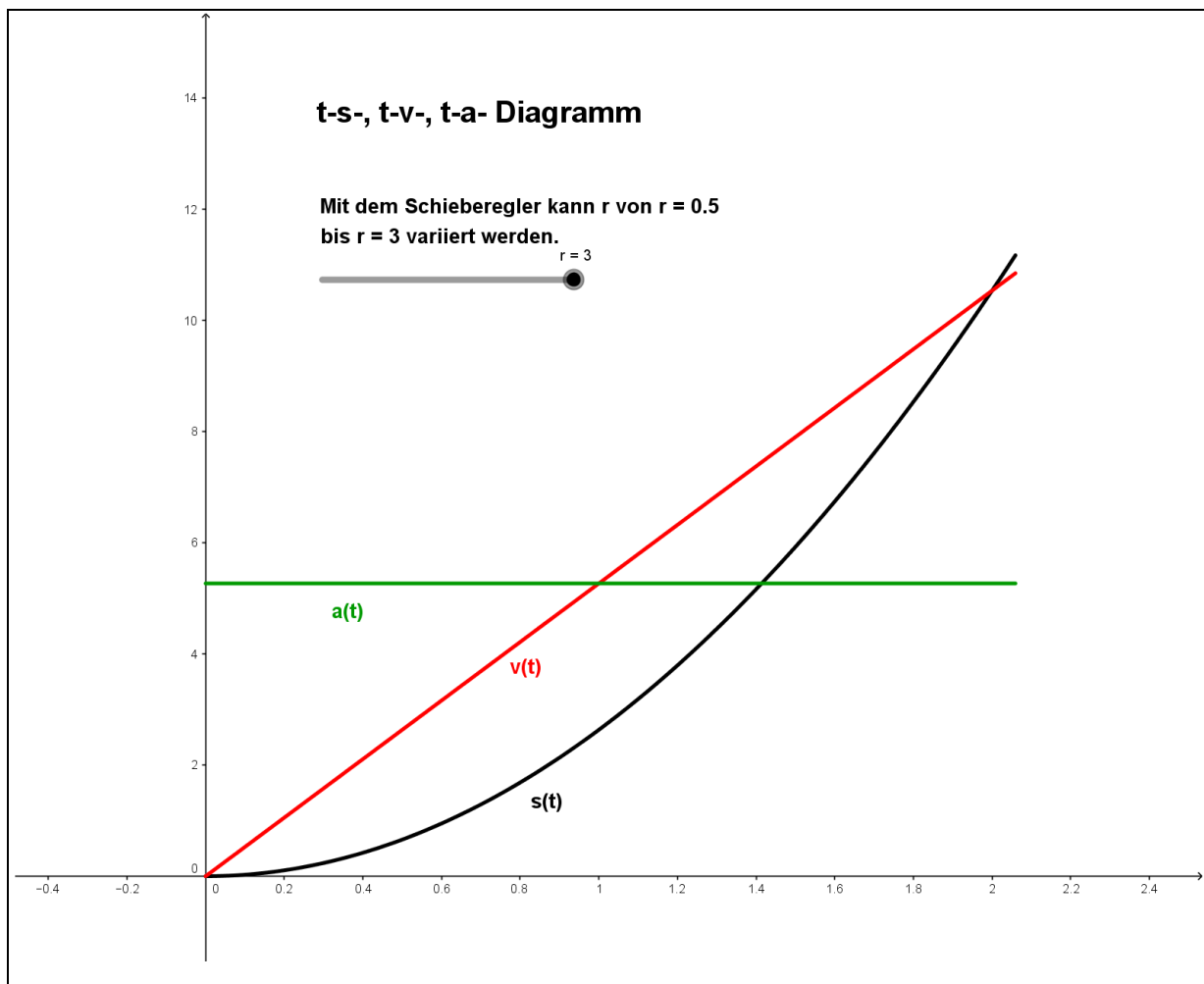
$$\boxed{a = g \cdot \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)\right) = 5.26826}$$

Aus der Gleichung $s = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$ mit $v_0 = 0$ und $s_0 = 0$ (oder mit $\frac{v_{\max}}{2}$) lässt sich die benötigte Zeit aus $r \cdot \sqrt{4 + \pi^2} = \frac{g}{2} \cdot \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)\right) \cdot t^2$ ermitteln zu $t(r) \approx 1.18904 \cdot \sqrt{r}$

Eine kleine Tabelle

r	0.5	1	1.5	2	2.5	3
s	1.8621	3.7242	5.5863	7.4484	9.3105	11.1726
t [Zeit]	0.8408	1.189	1.456	1.681	1.880	2.059
V _{max}	4.43	6.26	7.67	8.86	9.9	10.85

mit dem dazugehörigen Diagramm für $r = 3$



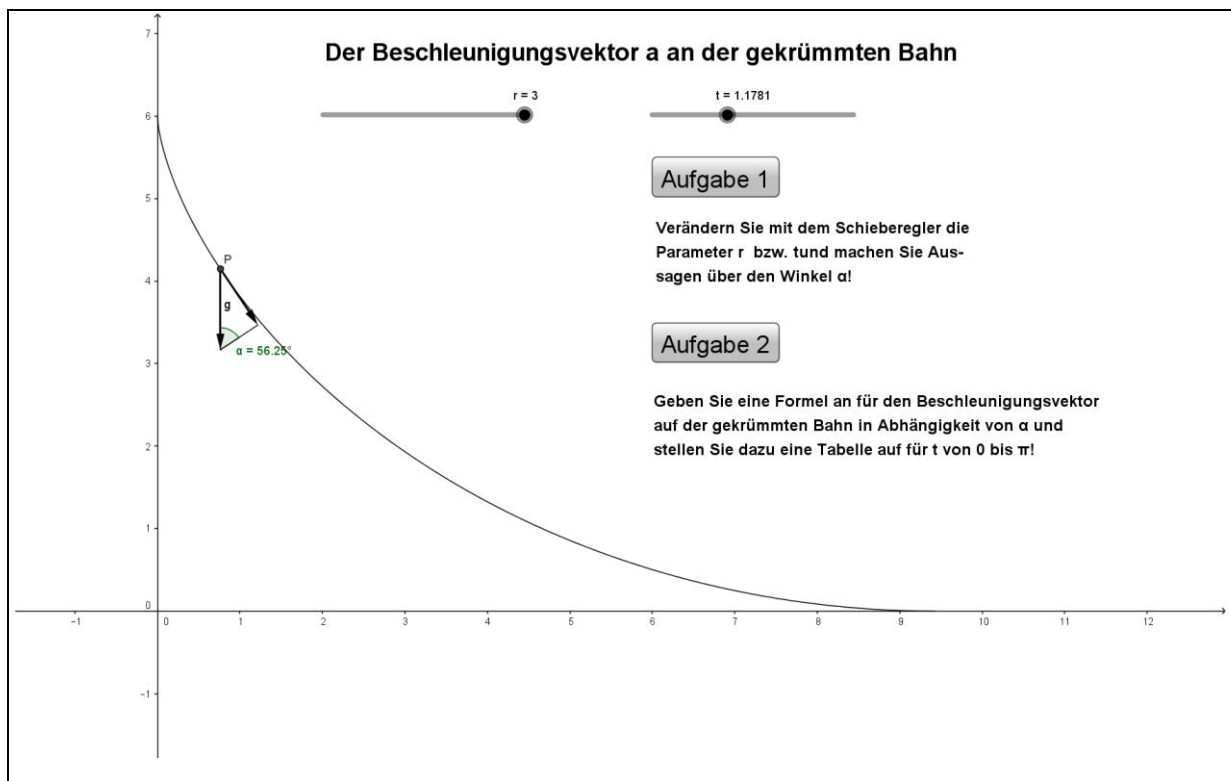
Jedes beliebige r liefert ein ähnliches Diagramm!

Die Datei befindet sich im Ordner *GeoGebra-Dateien ts-tv-ta-Diagramm_gerade Bahn.ggb*

Berechnungen an der gekrümmten Bahn zu 5), 6) und 7)

Hier gestalten sich die Berechnungen deutlich schwieriger, denn es handelt sich um eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Zum Verständnis soll die folgende GeoGebra-Datei beitragen.



Ordner s. o.: *Beschleunigung gekrümmte Bahn.ggb*

Ergebnisse:

- Unabhängig von r haben alle Tangenten der Zykloidschar an einer beliebigen Stelle t den gleichen Steigungswinkel und den gleichen Beschleunigungsvektor!
- Für den Beschleunigungsvektor a gilt: $a = g \cdot \sin(\alpha) = 9.81 \cdot \sin(\alpha)$
- Daraus ergibt sich folgende Tabelle:

t	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$
α	78.75°	67.5°	56.25°	45°	33.75°	22.5°	11.25°
a	9.6215	9.0633	8.1567	6.9367	5.4501	3.7541	1.9138

Nun soll der **Weg der gekrümmten Bahn** berechnet werden; dazu wird die „normale“ Zykloide betrachtet, die die gleiche Länge hat wie die im Bild dargestellte gespiegelte und nach oben verschobene Kurve.

Es gilt dann:

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot (t - \sin(t)) \\ r \cdot (1 - \cos(t)) \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq t \leq \pi$$

Für die Bogenlänge einer Kurve in Parameterdarstellung gilt:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt \text{ und hier } L = \int_0^{\pi} \sqrt{(r \cdot (1 - \cos(t)))^2 + (r \cdot \sin(t))^2} dt$$

Für diesen halben Zykloidenbogen erhält man also

$$L = \int_0^{\pi} r \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(t))} dt = 4 \cdot r, \text{ wie in der Literatur angegeben.}$$

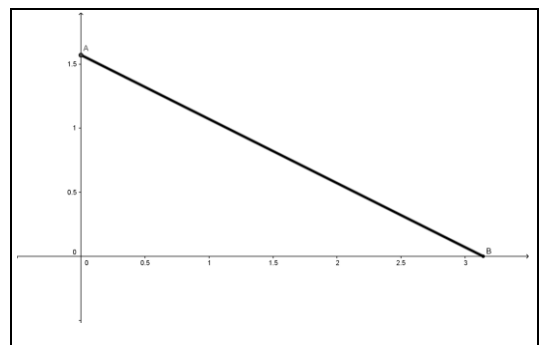
Die **Beschleunigung** sowie der **Winkel** α ändert sich entlang des Weges (siehe oben); es folgt eine mathematische Herleitung.

Für den Winkel α benötigt man die Tangentensteigung; diese erhält man für Kurven in Parameterdarstellung aus $\dot{f}(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$. Damit der Winkel positiv wird, nimmt man den

$$\text{Betrag: } |\dot{f}(t)| = \left| \frac{-r \cdot \sin(t)}{r \cdot (1 - \cos(t))} \right| = \left| \frac{\sin(t)}{\cos(t) - 1} \right| = \left| \frac{-1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \right| = \tan(\alpha)$$

$$\rightarrow \alpha(t) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \right)$$

Grafik $\rightarrow$



kann vereinfacht werden zu

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \cdot (\pi - t) \quad | 0 \leq t \leq \pi$$

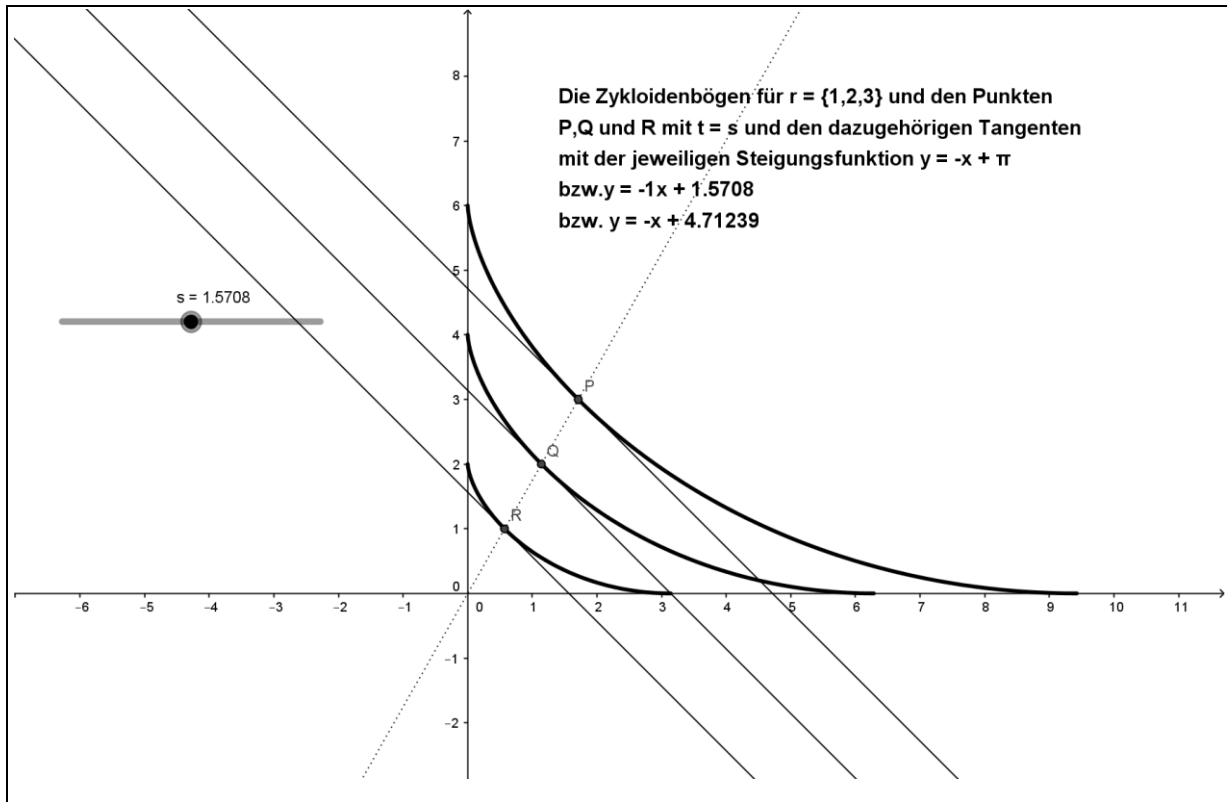
Daraus ergibt sich wie bei der geraden Bahn die Beschleunigung zu $a = g \cdot \sin(\alpha)$

a ist von t abhängig:

$$a(t) = g \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot (\pi - t)\right) = g \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

Die aus der Grafik ermittelten Werte der obigen Tabelle kann man damit verifizieren.

In der unteren Grafik ist dieser Zusammenhang ebenfalls dargestellt; der Betrag des Steigungswertes der Tangenten führt auf die in der Tabelle angegebenen Winkel.

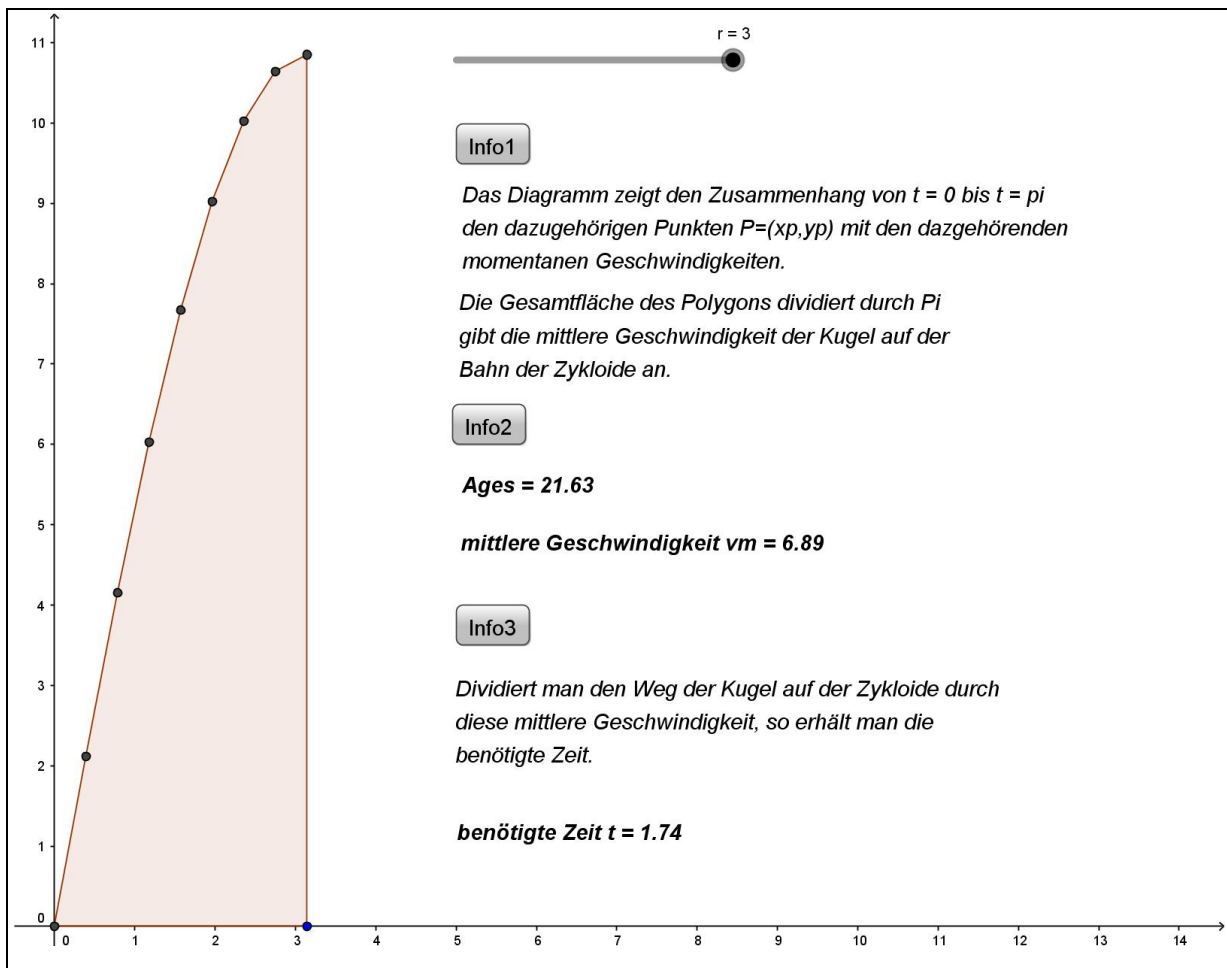


Ordner s. o.:

Tangenten an verschiedene Zykloiden.ggb

Im Folgenden wird mit Hilfe einer GeoGebra-Datei für das Intervall $t \in [0; \pi]$ mit der Schrittweite $\pi/8$ eine Tabelle erstellt, in der für jedes t aus dem Intervall die Koordinaten x_p und y_p des Punktes P ermittelt und zu jedem P die Momentangeschwindigkeit v aus $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (2r - y_p)}$ ermittelt.

Anschließend wird ein Diagramm aus den neun Punkten (t, v) dargestellt und daraus ein Polygon gezeichnet. Die Gesamtfläche des Polygons dividiert durch die Breite π ergibt die mittlere Geschwindigkeit der gekrümmten Kurve für ein beliebiges r.



Datei: v und t gekrümmte Bahn.ggb

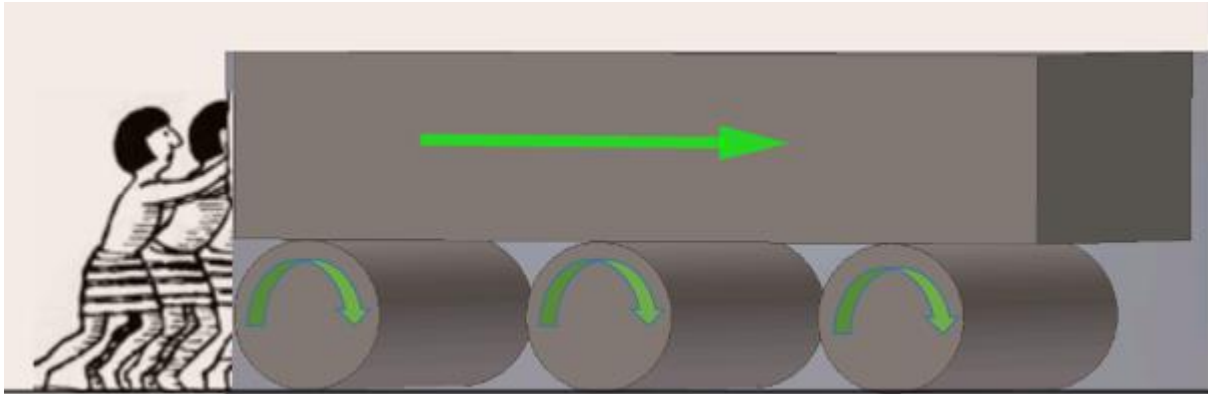
Tabelle gekrümmte Bahn

r	0.5	1	1.5	2	2.5	3
s	2	4	6	8	10	12
v_m	2.81	3.98	4.87	5.62	6.29	6.89
t [Zeit]	0.71	1.01	1.23	1.42	1.59	1.74
$V_{\max}$	4.43	6.26	7.67	8.86	9.9	10.85

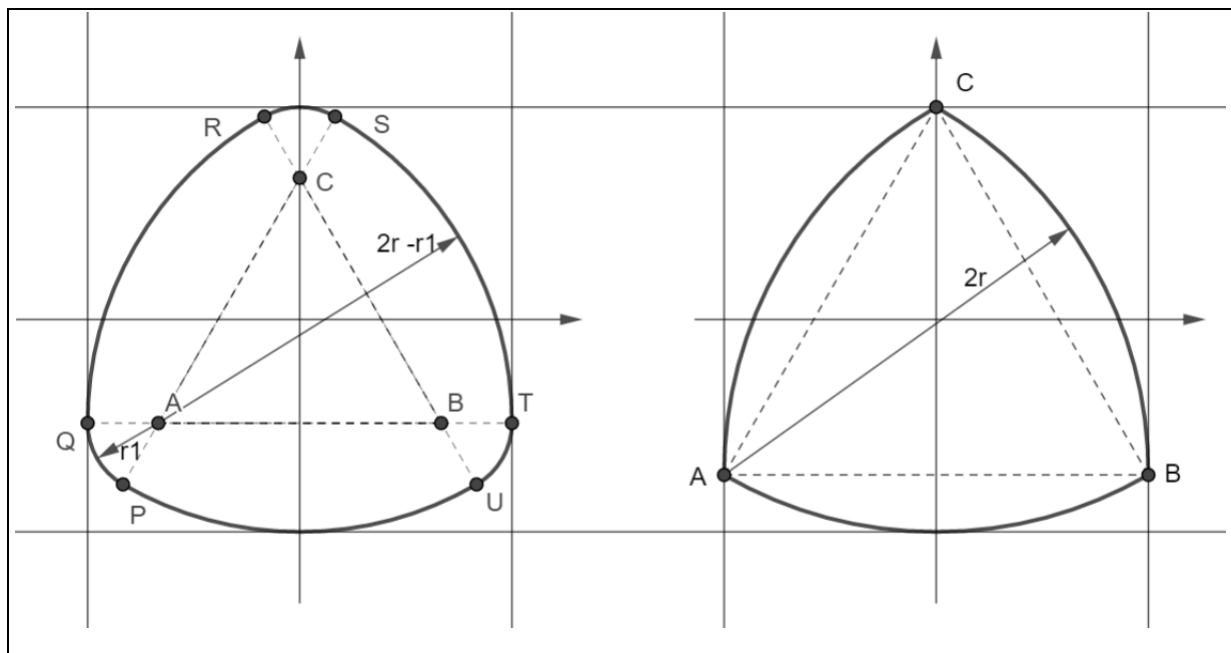
Tabelle gerade Bahn zum Vergleich siehe S.

Kurven gleicher Breite

Die Idee, schwere Gegenstände auf Rollen mit rundem Querschnitt zu transportieren ist schon sehr alt. Der Block bewegt sich parallel zum Untergrund. Aber ein kreisförmiger Rollenquerschnitt (K) ist nicht der einzig brauchbare.



Es gibt weitere Formen, die, wenn sie gedreht werden, stets die gleiche Breite aufweisen. Zwei dieser Formen sind unten abgebildet.



Links ein *Sechsbogengleichdick* (SBG), basierend auf einem gleichseitigen Dreieck mit Kreisbögen verschiedener Radien,
rechts eine Form ebenfalls auf der Basis eines gleichseitigen Dreiecks mit Kreisbögen → *Dreibogengleichdick* (DBG)

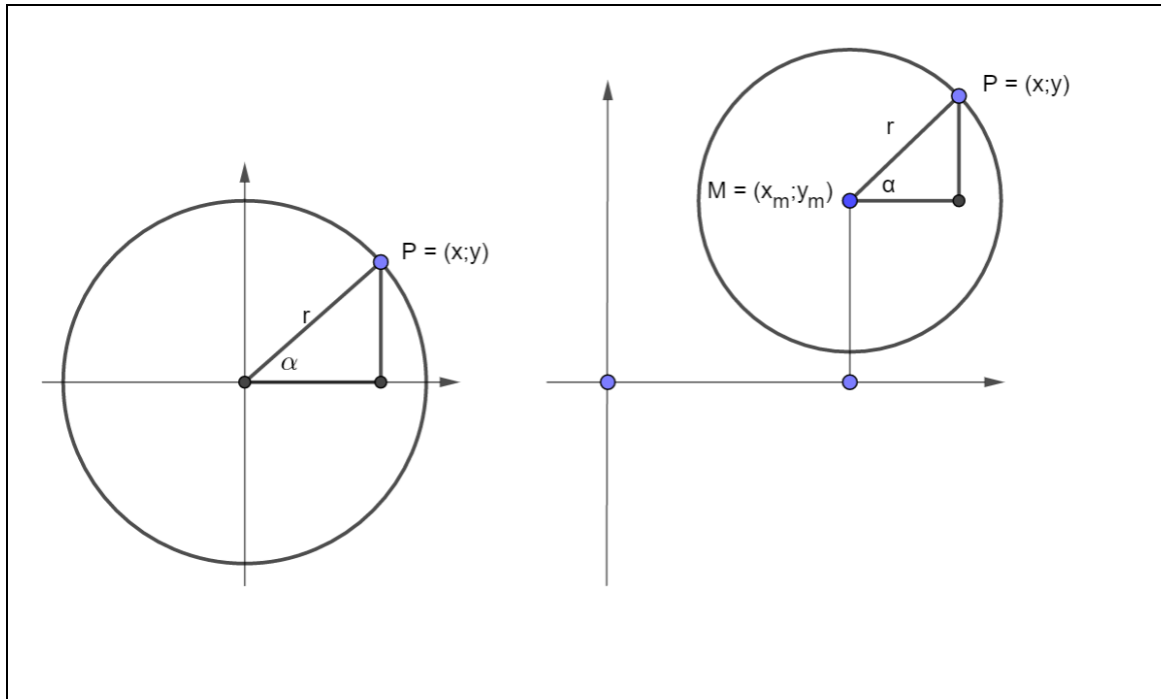
Gegeben: Kreisradius: $R = r$
 Radius DBG: $R = 2r$

Radius 1 SBG: $R_1 = r_1$
Radius 2 SBG: $R_2 = 2r - r_1$

Siehe auch Zeichnung!

Aufgaben

- Zeichnen Sie die drei Figuren nebeneinander in einen parallelen Streifen der Breite $2r$ ($=6\text{ cm}$) ein! DIN A4 – Blatt querlegen!
- Zeigen Sie an Hand der Zeichnung links, dass für einen Kreis mit Radius r um den Ursprung die Relation $x^2 + y^2 = r^2$ gilt.



Geben Sie auch die allgemeine Gleichung eines verschobenen Kreises an. Orientieren Sie sich an der Zeichnung links!

- Geben Sie jeweils für das DBG bzw. für das SBG die Geradengleichungen g_{AC} sowie g_{BC} an!
- Bestimmen Sie jeweils für das DBG / das SBG die Punkte A, B und C und zusätzlich für das SBG die Punkte P, Q, R, S, T und U in allgemeiner Form in Abhängigkeit von r bzw. von r und r_1 !

Hinweis: Es genügt, für das SBG den Punkt S zu bestimmen, um auf P, R und U schließen zu können.

Q und T lassen sich aus A und B ableiten.

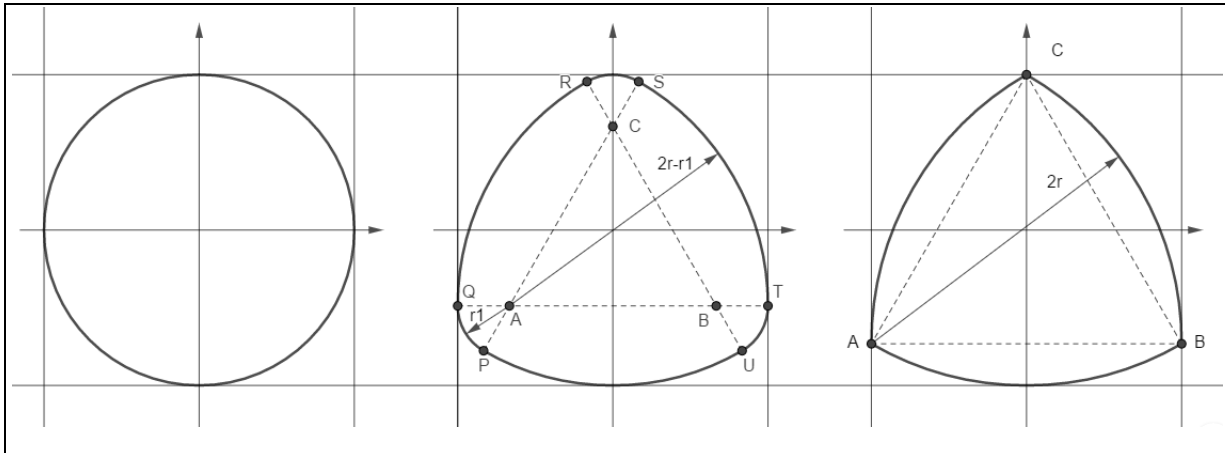
- Berechnen Sie in allgemeiner Form (und für $r = 3$ und $r_1 = 1$) die Flächen A_K , A_{DBG} und A_{SBG} .
Alle Figuren liegen in einem Quadrat Q mit der Seitenlänge $a = 2 \cdot r$.

Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächen $\frac{A_K}{Q}$. Was fällt auf?

- f) Im SBG stoßen z. B. im Punkt S zwei Kreisbögen aneinander. Geben Sie die Gleichung des oberen Kreisbogens um A von T nach S als Funktionsgleichung an. Ebenso die Gleichung des oberen Kreisbogens um C über S nach R. Ist die zusammengesetzte Kurve in S differenzierbar? Wie sieht es mit der Krümmungsgleichheit aus?
- g) K, DBG und SBG schneiden aus dem Quadrat Q eine Fläche heraus. Die Restfläche kann jeweils einfach mit $A_R = Q - A_K$ usw. berechnet werden. Schwieriger ist es in diesem Fall, diese mit Hilfe der Integralrechnung zu ermitteln. Stellen Sie für K, das DBG und das SBG die entsprechenden Ansätze auf und versuchen Sie, diese mit Hilfe eines CAS zu lösen.

Lösungen

Lösung zu a)



Lösung zu b)

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\alpha) \rightarrow x^2 = r^2 \cdot \cos^2(\alpha) \\ y &= r \cdot \sin(\alpha) \rightarrow y^2 = r^2 \cdot \sin^2(\alpha) \end{aligned} \quad \text{außerdem gilt: } x^2 + y^2 = r^2$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \cdot \cos^2(\alpha) + y^2 \cdot \sin^2(\alpha) \\ &= r^2 \cdot \left(\underbrace{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}_{=1} \right) \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = r^2} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Für den verschobenen Kreis gilt:

$$\begin{aligned} x &= x_m + r \cdot \cos(\alpha) \rightarrow (x - x_m)^2 = r^2 \cdot \cos^2(\alpha) \\ y &= y_m + r \cdot \sin(\alpha) \rightarrow (y - y_m)^2 = r^2 \cdot \sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

Daraus folgt analog zu oben:

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \cdot \left(\underbrace{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}_{=1} \right) \quad \boxed{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2}$$

Lösung zu c)

DBG:

$$g_{AC} : y = \sqrt{3} \cdot x + r$$

$$g_{BC} : y = -\sqrt{3} \cdot x + r$$

SBG:

$$g_{AC} : y = \sqrt{3} \cdot x + (r - r_1)$$

$$g_{BC} : y = -\sqrt{3} \cdot x + (r - r_1)$$

Lösung zu d)

Dreibogengleichdick

$A = (-r; y)$ liegt auf $g_{AC} : y = \sqrt{3} \cdot x + r$. Daraus folgt: $A = (-r; -r \cdot (\sqrt{3} - 1))$

B ergibt sich durch Spiegelung an der y-Achse: $B = (r; -r \cdot (\sqrt{3} - 1))$

$$C = (0; r)$$

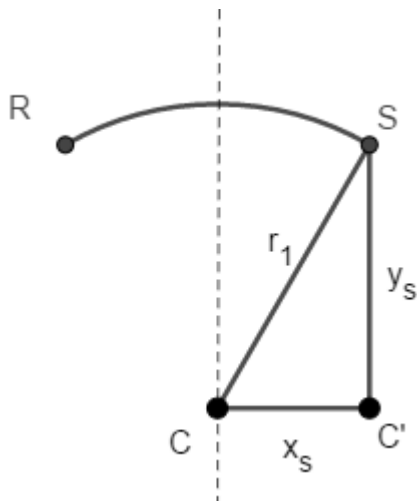
Sechsbogengleichdick

$A = (-(r - r_1); y)$ liegt auf $g_{AC} : y = \sqrt{3} \cdot x + r - r_1$. Daraus folgt:

$$A = (-(r - r_1); -(r - r_1) \cdot (\sqrt{3} - 1))$$

B ergibt sich durch Spiegelung an der y-Achse: $B = ((r - r_1); -(r - r_1) \cdot (\sqrt{3} - 1))$

$$C = (0; r - r_1)$$



Dieser Ausschnitt aus der Grafik der Aufgabenstellung dient zur Ermittlung des Punktes S.

Der Winkel am Punkt C des Dreiecks CC'S beträgt 60° , daraus folgt:

$$x_s = r_1 \cdot \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \cdot r_1$$

$$y_s = r_1 \cdot \sin(60^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot r_1$$

Damit ergibt sich S

$$S = \left(\frac{1}{2} \cdot r_1; r - r_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \right) \right)$$

Mit x_s und y_s lassen sich die Punkte P und U ermitteln, R ergibt sich durch Spiegelung von S an der y-Achse, Q und T ergeben sich aus A und B in Verbindung mit dem Radius r_1 .

$$R = \left(-\frac{1}{2} \cdot r_1; r - r_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \right) \right)$$

$$Q = (-r; -(r - r_1) \cdot (\sqrt{3} - 1)) \quad T = (r; -(r - r_1) \cdot (\sqrt{3} - 1))$$

$$U = \left(r - \frac{1}{2} \cdot r_1; -r \cdot (\sqrt{3} - 1) - r_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \right) \right) \quad P = \left(-\left(r - \frac{1}{2} \cdot r_1 \right); -r \cdot (\sqrt{3} - 1) - r_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \right) \right)$$

Alternative Berechnung von S

Man bestimmt den Schnittpunkt von $g_{AC} : y = \sqrt{3} \cdot x + r - r_1$ mit einem Kreis um C mit Radius r_1 : $K : x^2 + (y - (r - r_1))^2 = r_1^2$

Setzt man die Geradengleichung in K ein, erhält man

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + (\sqrt{3} \cdot x + r - r_1 - (r - r_1))^2 = r_1^2 \\ x^2 + 3 \cdot x^2 = r_1^2 \\ 4 \cdot x^2 = r_1^2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = +\frac{1}{2} \cdot r_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \cdot r_1 \end{array} \quad \text{wobei } x_1 \text{ die Lösung darstellt (s.o.)}$$

Lösung zu e)

Kreis:

$$A_K = \pi \cdot r^2$$

$$A = 9 \cdot \pi \approx 28.274 \text{ FE}$$

Dreibogengleichdick: Fläche wird berechnet aus drei Kreisausschnitten mit Radius $R = 2r$ und $\alpha = 60^\circ$ vermindert um zwei gleichseitige Dreiecke mit $a = 2r$.

$$A = 3 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (2r)^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{(2r)^2}{4} \quad A_{DBG} = 2 \cdot r^2 \cdot (\pi - \sqrt{3})$$

Für $r = 3$ ergibt sich

$$A_{DBG} \approx 25.372 \text{ FE}$$

Sechsbogenrund: Fläche kann berechnet werden aus drei Kreisausschnitten mit Radius $2 \cdot r - r_1$ und $\alpha = 60^\circ$ plus drei Kreisausschnitten mit Radius r_1 und $\alpha = 60^\circ$ abzüglich zweier gleichseitiger Dreiecke mit $a = 2 \cdot r - r_1$!

$$A = 3 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (2r - r_1)^2 + 3 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot r_1^2 - 2 \cdot \frac{(2r - r_1)^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$A_{SBG} = \frac{\pi}{2} \cdot [(2 \cdot r - r_1)^2 + r_1^2] - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot (r - r_1)^2$$

Mit $r = 3$ und $r_1 = 1$ erhält man

$$A_{SBG} \approx 26.9843 \text{ FE}$$

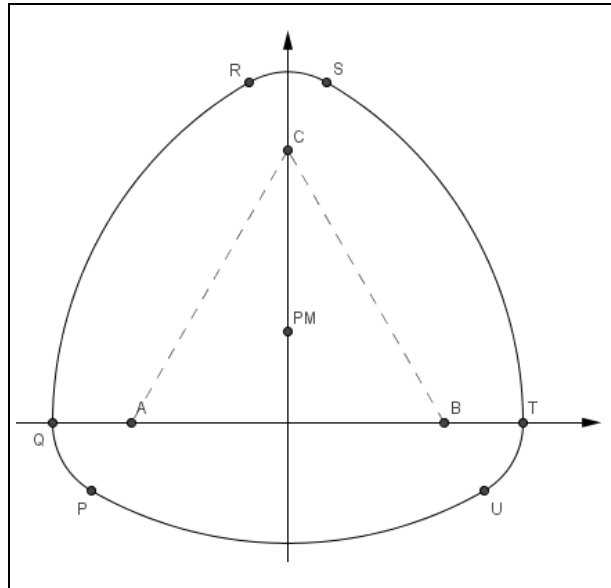
$$\text{Das Verhältnis } \frac{A_K}{Q} = \frac{\pi \cdot r^2}{4 \cdot r^2} = \frac{\pi}{4}$$

Lösung zu f)

Ist die Kurve an der Stelle S (zwei Kreisbögen treffen aufeinander) differenzierbar?

Lösung:

Kreis 1 um A mit r_1 :



$$\left(x + \frac{r-r_1}{2}\right)^2 + y^2 = r^2 \rightarrow y = f_1(x) = \sqrt{r^2 - \left(x + \frac{r-r_1}{2}\right)^2}$$

$$\text{Kreis 2 um C mit } r_1: x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (r-r_1)\right)^2 = r_1^2 \rightarrow y = f_2(x) = \sqrt{r_1^2 - x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (r-r_1)$$

Diese nach y aufgelösten Kreisbögen werden abgeleitet und in die Ableitung der x-Wert des Punktes S eingesetzt: $x_s = \frac{1}{2} \cdot r_1$

$$f'_1(x) = -\frac{x + \frac{r-r_1}{2}}{\sqrt{r^2 - \left(x + \frac{r-r_1}{2}\right)^2}}; f'_1\left(\frac{r_1}{2}\right) = -\frac{\frac{r}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4} \cdot r^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'_2(x) = -\frac{x}{\sqrt{r_1^2 - x^2}}; f'_2\left(\frac{r_1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

K1 und K2 berühren sich im Punkt S!

Da die Kreisbögen verschiedene Radien haben, liegt keine Krümmungsgleichheit vor!

Lösung zu g)

Kreis:

$$\left. \begin{array}{l} A_Q = 4 \cdot r^2 \\ A_K = \pi \cdot r^2 \end{array} \right\} \rightarrow A_R = r^2 \cdot (4 - \pi)$$

Mit $r = 3$ ergibt sich:

$$A_R = 7.726 \text{ FE}$$

Dreibogengleichdick:

$$\left. \begin{array}{l} A_Q = 4 \cdot r^2 \\ A_{DBG} = 2 \cdot r^2 \cdot (\pi - \sqrt{3}) \end{array} \right\} \rightarrow A_R = 2 \cdot r^2 \cdot (2 + \sqrt{3} - \pi)$$

Mit $r = 3$ erhält man

$$A_R = 10.628 \text{ FE}$$

Sechsbogengleichdick:

$$\left. \begin{array}{l} A_Q = 4 \cdot r^2 \\ A_{SBG} = \frac{\pi}{2} \cdot \left[(2 \cdot r - r_1)^2 + r_1^2 \right] - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot (r - r_1)^2 \end{array} \right\} \rightarrow A_R = 4 \cdot r^2 - \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \left[(2 \cdot r - r_1)^2 + r_1^2 \right] - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot (r - r_1)^2 \right\}$$

Mit $r = 3$ und $r_1 = 1$ ergibt sich

$$A_R = 9.0157 \text{ FE}$$

Die Ergebnisse bestätigen die Flächenberechnungen aus Teil e) der Aufgabe.

Restfläche Kreis

Exemplarisch für den Kreis soll die Restfläche mit Hilfe der Integralrechnung bestimmt werden. Für den 1. Quadranten gilt $A = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$.

1. Schritt: Integration durch Substitution

$$x = r \cdot \sin(z)$$

$$\frac{dx}{dz} = r \cdot \cos(z) \rightarrow dx = r \cdot \cos(z) dz$$

Damit erhält das Integral die folgende Form; auf die Änderung der Grenzen wird hier verzichtet.

$$A = \int \underbrace{\sqrt{r^2 - r^2 \cdot \sin^2(z)}}_{=r \cdot \cos(z)} \cdot r \cdot \cos(z) dz$$

$$A = \int r^2 \cdot \cos^2(z) dz$$

2. Schritt: Partielle Integration

$$\left. \begin{array}{l} A = r^2 \cdot \int \underbrace{\cos(z)}_{=u'} \cdot \underbrace{\cos(z)}_{=v} dz \\ u(z) = \sin(z) \quad v'(z) = -\sin(z) \end{array} \right\} \rightarrow A = r^2 \cdot \left[\sin(z) \cdot \cos(z) + \int \sin^2(z) dz \right]$$

Weiter mit

$$\begin{aligned} A &= r^2 \cdot \left[\sin(z) \cdot \cos(z) + \int (1 - \cos^2(z)) dz \right] \\ A &= r^2 \cdot \left[\sin(z) \cdot \cos(z) + \int 1 dz - \int \cos^2(z) dz \right] \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int \cos^2(z) dz &= r^2 \cdot \left[\sin(z) \cdot \cos(z) + \int 1 dz \right] \\ \int \cos^2(z) dz &= \frac{r^2}{2} \cdot \left[\sin(z) \cdot \cos(z) + z \right] \end{aligned} \quad \text{Die geänderten Grenzen: } z_1 = 0, z_2 = \pi/2$$

Eingesetzt in das Integral erhält man

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos^2(z) dz = \frac{r^2}{2} \cdot \left[\frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{4} \cdot r^2 \quad \text{Für den gesamten Kreis: } A_K = \pi \cdot r^2$$

$$\boxed{A_R = 4 \cdot r^2 - \pi \cdot r^2 = r^2 \cdot (4 - \pi) \approx 7.726 \text{ FE}}$$

Restfläche Dreibogengleichdick

Dazu werden die Funktionsgleichungen des Kreisbogens um A durch B und C und die um C durch A und B benötigt:

$$\text{Um A: } f_1(x) = \sqrt{4 \cdot r^2 - (x+r)^2} - r \cdot (\sqrt{3} - 1) \quad \text{Um C: } f_2(x) = -\sqrt{4 \cdot r^2 - x^2} + r$$

$$A_{R1} = \int_0^r \left[r - \left(\sqrt{4 \cdot r^2 - (x+r)^2} - r \cdot (\sqrt{3} - 1) \right) \right] dx \quad \text{Mit } r = 3 \text{ erhält man } A_{R1} = 4.533 \text{ FE}$$

$$A_{R2} = \int_0^r \left(-\sqrt{4 \cdot r^2 - x^2} + r + r \right) dx \quad \text{Mit } r = 3 \text{ erhält man } A_{R2} = 0.781 \text{ FE}$$

$$\boxed{A_R = 2 \cdot (A_{R1} + A_{R2}) = 10.682 \text{ FE}}$$

Restfläche Sechsbogengleichdick

Um die Restfläche durch Integralrechnung zu bestimmen, sind hier 4 Integrale nötig; im Bild ist dazu eine CAS-Rechnung (TI-Nspire CX CAS) dargestellt.

Restfläche Sechsbogengleichdick – Funktionsgleichungen der Kreisbögen

Kreis um C durch S und R; Kreis um A durch T und S

$$f1(x) := \sqrt{r1^2 - x^2} + r - r1; f2(x) := \sqrt{(2 \cdot r - r1)^2 - (x + r - r1)^2} - (r - r1) \cdot (\sqrt{3} - 1) \quad \text{Fertig}$$

Kreis um B durch U und T; Kreis um C durch P und U

$$f3(x) := -\sqrt{r1^2 - (x - (r - r1))^2} - (r - r1) \cdot (\sqrt{3} - 1); f4(x) := -\sqrt{(2 \cdot r - r1)^2 - x^2} + r - r1 \quad \text{Fertig}$$

Die Restflächen

$$ar1(r, r1) := 2 \cdot \int_0^{\frac{r1}{2}} (r - f1(x)) dx; ar1(r, r1) | r=3, \text{ and } r1=1 \quad \text{0.043389}$$

$$ar2(r, r1) := 2 \cdot \int_0^r (r - f2(x)) dx; ar2(r, r1) | r=3, \text{ and } r1=1 \quad \text{6.96777}$$

$$ar3(r, r1) := 2 \cdot \int_{r-r1}^r (f3(x) + r) dx; ar3(r, r1) | r=3, \text{ and } r1=1 \quad \text{1.501}$$

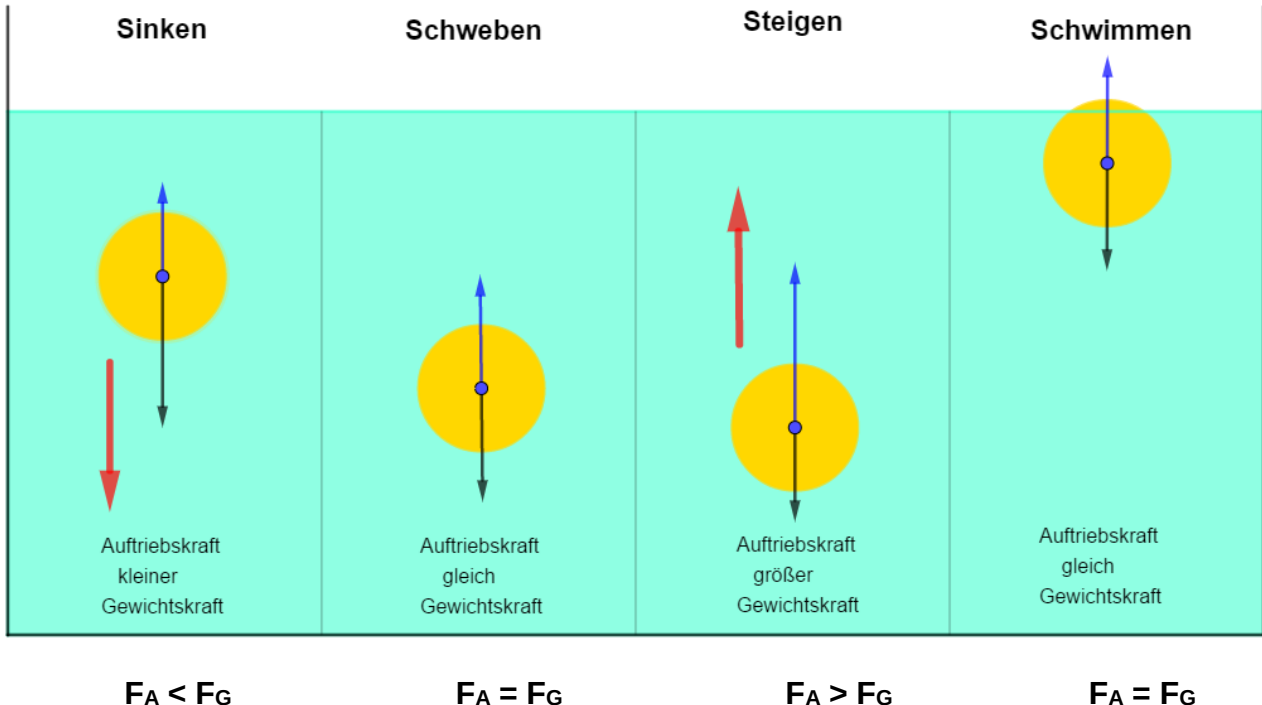
$$ar4(r, r1) := 2 \cdot \int_0^{r-r1} (f4(x) + r) dx; ar4(r, r1) | r=3, \text{ and } r1=1 \quad \text{0.546927}$$

Diese Integrale händisch lösen zu wollen, ist mit Schulmathematik wohl nicht möglich. Immerhin liefert die Integralrechnung ebenfalls die auf Seite 8 errechneten Ergebnisse.

Warum kompliziert, wenn elementare Geometrie die Lösungen liefert!

Warum schwimmt ein Schiff?

Die Frage eines Studierenden der Fachschule-Technik mit Schwerpunkt Schiffbau ist einfach zu beantworten; das spezifische Gewicht eines Körpers (Schiffes) muss kleiner sein als das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, in der es schwimmt. Man kann folgende Fälle in Anlehnung an DudenPaetec¹⁵ unterscheiden:



Am Beispiel einer Hohlkugel aus Metall mit gegebenem Innendurchmesser d_i soll bestimmt werden, bis zu welchem Außendurchmesser d_a diese in der Flüssigkeit schwimmt, bei welchem Außendurchmesser sie schwebt, und wann sie sinkt.

Für den Fall des Schwimmens soll außerdem die Eintauchtiefe ermittelt werden.

Bezeichnungen – Formeln – bestimmte Zahlenwerte

Volumen einer Kugel: $V_K = \frac{\pi}{6} \cdot d_a^3$

Volumen einer Hohlkugel: $V_{Hk} = \frac{\pi}{6} \cdot (d_a^3 - d_i^3)$

Dichte einer Flüssigkeit: ρ_{Fl} für Wasser gilt: $\rho_{Fl} = 1 \frac{kg}{dm^3}$

Dichte eines Werkstoffs: ρ_W für Stahl gilt: $\rho_W = 7.85 \frac{kg}{dm^3}$

Dichte eines Gases: ρ_G für Luft gilt: $\rho_G = 1.293 \frac{kg}{m^3}$

Masse: $m = V \cdot \rho$

Einheiten beachten (ρ_G)

Lösungen

Berechnungen:

Gegeben ist di

Masse der eingeschlossenen Luft: $m_L = \frac{\pi}{6} \cdot d_i^3 \cdot \rho_G \approx 0.000677 \cdot d_i^3$

Masse der Hohlkugel: $m_{Hk} = \frac{\pi}{6} \cdot \rho_W \cdot (d_a^3 - d_i^3) \approx 4.11025 \cdot (d_a^3 - d_i^3)$

Gesamtmasse: $m_{ges} = 4.11025 \cdot d_a^3 - 4.10957 \cdot d_i^3$

Nun lässt sich die Dichte der Hohlkugel aus der Gesamtmasse und dem äußeren Kugelvolumen berechnen:

$$\rho_{Hk} = \frac{m_{ges}}{V} = \frac{4.11025 \cdot d_a^3 - 4.10957 \cdot d_i^3}{\frac{\pi}{6} \cdot d_a^3} = 7.85 - \frac{7.848707 \cdot d_i^3}{d_a^3}$$

Es wird $\rho_{Hk} = 1$ gesetzt, um den Schwebezustand zu bestimmen, daraus lassen sich die anderen Fälle ableiten.

Aus $7.85 - \frac{7.848707 \cdot d_i^3}{d_a^3} = 1$ folgt: $d_{as} \approx 1.0464 \cdot d_i$ der max. Außendurchmesser

Wählt man für $d_i = 1m = 10 dm$, ergibt sich folgendes:

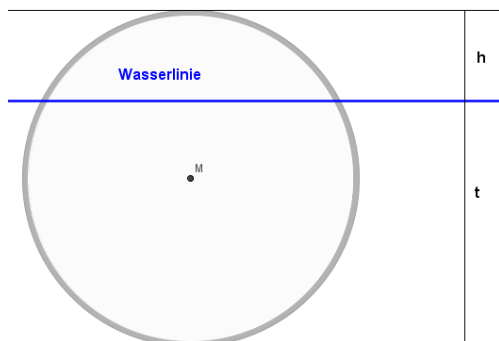
$d_a < 10.464 dm \rightarrow$ Hohlkugel schwimmt

$d_a = 10.464 dm \rightarrow$ Hohlkugel schwebt

$d_a > 10.464 dm \rightarrow$ Hohlkugel sinkt

Für $d_a = 10.4 dm$, also einer Wandstärke von 2 cm, ergibt sich eine Gesamtmasse von $m_{Hk} \approx 513.9 kg$, ein Volumen von $V = 588.977 dm^3$, so dass man ein spezifisches

Gewicht (Dichte) von $\rho_{Hk} \approx 0.87253 \frac{kg}{dm^3}$ erhält $\rightarrow$ der Hohlkörper schwimmt also.



Nun soll die Eintauchtiefe dieses Hohlkörpers mit den gegebenen Maßen berechnet werden.

Es gilt: $t = d_a - h$

Für die Gewichtskraft der Hohlkugel erhält man

$$F_{Hk} = 5041.35 N$$

Nachdem die Kugel bzw. die Hohlkugel sich im Wasser im Ruhezustand befindet, gilt:

Gewichtskraft der Kugel = Auftriebskraft

$5041.35 = \rho_{Fl} \cdot g \cdot V_u$, wobei V_u das Volumen des unter Wasser liegenden Teils der Kugel ist.

$$V_u = \underbrace{\frac{\pi}{6} \cdot d_a^3}_{\text{Kugel}} - \underbrace{\pi \cdot h^2 \cdot \left(\frac{d_a}{2} - \frac{h}{3} \right)}_{\text{Kugelabschnitt}}$$

Daraus lässt sich die Höhe des herausragenden Teils der Kugel und damit die Eintauchtiefe berechnen.

$$5401.35 = 9.81 \cdot 1 \left[\frac{\pi}{6} \cdot 10.4^3 - \pi \cdot h^2 \cdot \left(\frac{10.4}{2} - \frac{h}{3} \right) \right] \quad \rightarrow \quad \boxed{\begin{matrix} h = 2.324 \text{ dm} \\ t = 8.076 \text{ dm} \end{matrix}}$$

Verallgemeinerungen

Für eine Hohlkugel sollen nun abschließend die bisherigen Ergebnisse verallgemeinert werden.

Gesamtmasse

Für die Masse des eingeschlossenen Gases gilt: $m_g = \frac{\pi}{6 \cdot 1000} \cdot d_i^3 \cdot \rho_g$

Durch den Faktor 1000 werden die Einheiten von ρ_G und ρ_W kompatibel.

Für die Masse der Hohlkugel gilt: $m_{Hk} = \frac{\pi}{6} \cdot (d_a^3 - d_i^3) \cdot \rho_W$

$$m_{ges} = \frac{\pi}{6} \cdot \left[d_a^3 \cdot \rho_W - \frac{d_i^3}{1000} \cdot (1000 \cdot \rho_W - \rho_G) \right]$$

Mit $V = \frac{\pi}{6} \cdot d_a^3$ ermittelt man das spezifische Gewicht der Hohlkugel zu

$$\rho_{Hk} = \rho_W - \left(\frac{d_i}{d_a} \right)^3 \cdot \left(\rho_W - \frac{\rho_G}{1000} \right)$$

Mit dem Ansatz $\rho_{Hk} = 1$ ergibt d_{as} für den Schwebezustand zu

$$d_{as} = \frac{d_i}{10 \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho_W - 1}{1000 \cdot \rho_W - \rho_G}}}$$

Für die Eintauchtiefe kann man den Ansatz $F_A = F_G$ (siehe Grafik auf Seite 94) verwenden:

$$F_A = \rho_{FL} \cdot V_U \cdot g = \rho_{FL} \cdot (V - V_O) \cdot g ; V_O = \text{Kugelabschnitt oberhalb der Wasseroberfläche}$$

$$F_G = \rho_{HK} \cdot V \cdot g$$

Daraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{FL} \cdot (V - V_O) \cdot g &= \rho_{HK} \cdot V \cdot g \\ \frac{V - V_O}{V} &= \frac{\rho_{HK}}{\rho_{FL}} \\ 1 - \frac{V_O}{V} &= \frac{\rho_{HK}}{\rho_{FL}} \\ 1 - \frac{\frac{\pi}{6} \cdot h^2 \cdot (3 \cdot d_a - 2 \cdot h)}{\frac{\pi}{6} \cdot d_a^3} &= \frac{\rho_{HK}}{\rho_{FL}} \\ 1 - 3 \cdot \left(\frac{h}{d_a}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{h}{d_a}\right)^3 &= \frac{\rho_{HK}}{\rho_{FL}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Damit lässt sich f als Funktion in Abhängigkeit von} \\ &\rightarrow h, d_a, \rho_{HK} \text{ und } \rho_{FL} \text{ darstellen} \\ &f(h, d_a, \rho_{HK}, \rho_{FL}) = 2 \cdot \left(\frac{h}{d_a}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{h}{d_a}\right)^2 + 1 - \frac{\rho_{HK}}{\rho_{FL}} \end{aligned}$$

Mit $\rho_{HK} = \rho_W - \left(\frac{d_i}{d_a}\right)^3 \cdot \left(\rho_W - \frac{\rho_G}{1000}\right)$ erhält man folgende Funktion mit mehreren

Veränderlichen:

$$f(h, d_a, d_i, \rho_W, \rho_G, \rho_{FL}) = 2 \cdot \left(\frac{h}{d_a}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{h}{d_a}\right)^2 + 1 - \frac{\rho_W - \left(\frac{d_i}{d_a}\right)^3 \cdot \left(\rho_W - \frac{\rho_G}{1000}\right)}{\rho_{FL}}$$

$$d_i < d_a < d_{as}$$

wobei für d_a gilt:

$$d_i < d_a < \frac{d_i}{10 \cdot \sqrt{\frac{\rho_W - 1}{1000 \cdot \rho_W - \rho_G}}}$$

Mit den auf Seite 1 und Seite 2 angegebenen Werten erhält man

$$f(h, d_a) = 2 \cdot \left(\frac{h}{d_a}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{h}{d_a}\right)^2 + \frac{7848.71 - 6.85 \cdot d_a^3}{d_a^3}$$

Die Nullstelle dieser Funktion für ein d_a in dem o. a. Bereich gibt die Höhe des aus dem Wasser ragenden Kugelabschnitts an; für $d_a = 10.4$ erhält man $h = 2.324$ dm und damit eine Eintauchtiefe von $t = d_a - h = 8.076$ dm

Grafische Veranschaulichung mit GeoGebra

Betrachtet wird dazu (siehe S. 4) die Gleichung $2 \cdot \left(\frac{h}{d_a}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{h}{d_a}\right)^2 + 1 = \frac{\rho_{HK}}{\rho_{Fl}}$ und damit

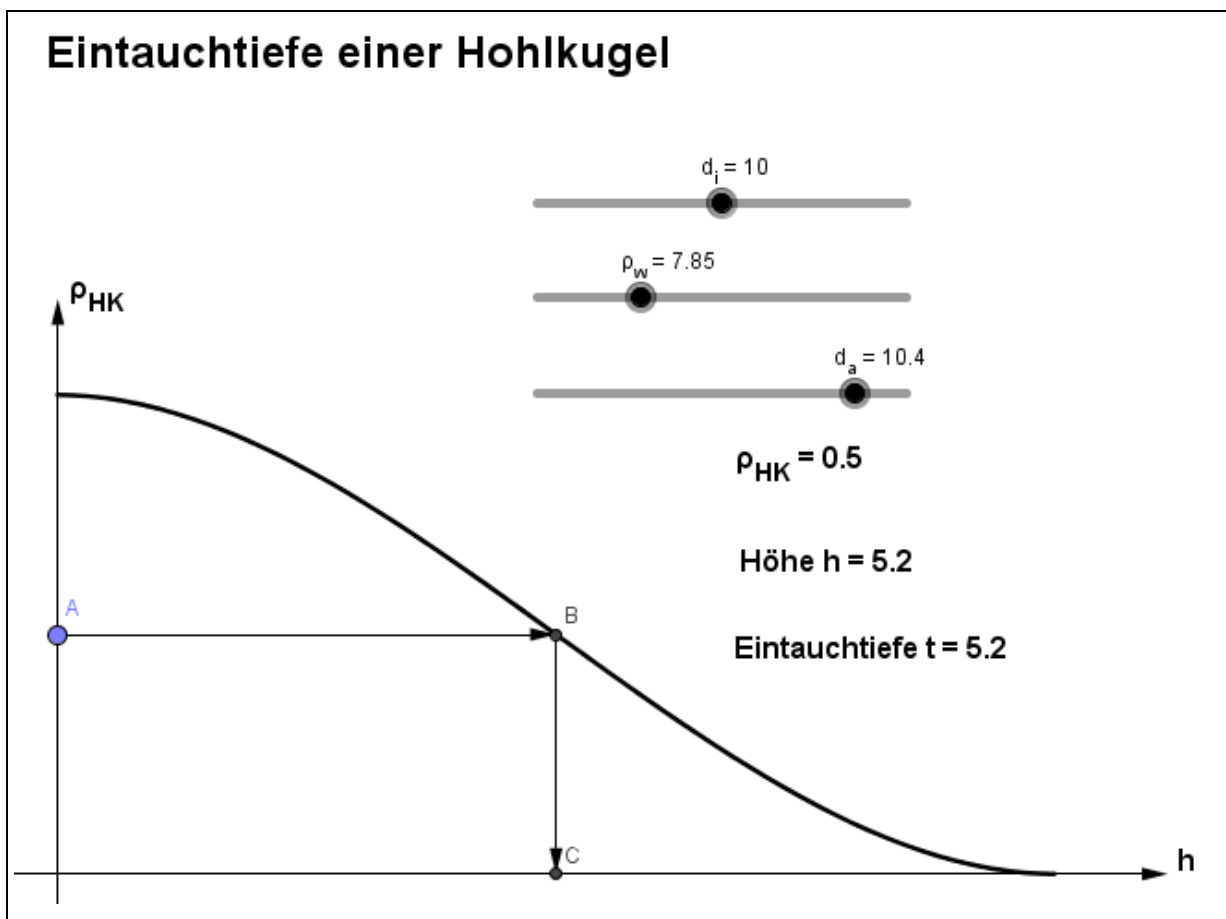
ρ_{HK} als Funktion von h . Die Grafik unten stellt $\rho_{HK}(h) = 2 \cdot \left(\frac{h}{d_a}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{h}{d_a}\right)^2 + 1$ dar; $\rho_{Fl} = 1$

wird als Konstante betrachtet.

Die Grafik zeigt die Abhängigkeit des spezifischen Gewichts der Hohlkugel von der Höhe des herausragenden Teils der Hohlkugel aus der Flüssigkeit. Das spezifische Gewicht der Flüssigkeit wird mit $\rho_f = 1$ als Konstante betrachtet.

Ausgehend von einem spez. Gewicht kann man aus der Grafik die Höhe $h = x(C)$ des herausragenden Teils der Hohlkugel ablesen. Die Eintauchtiefe beträgt $t = d_a - h$. Der Innendurchmesser d_i , das spez. Gewicht des Werkstoffs ρ_w und der Außendurchmesser d_a lassen sich in Grenzen verändern.

Durch Ziehen des Punktes A verändert man das spez. Gewicht der Hohlkugel; die Ergebnisse werden angezeigt.



The Rolling Bridge

Die Rolling Bridge ist eine Brücke im Londoner Stadtteil Paddington.

Das nur 12 m Meter lange Bauwerk wurde 2004 vom britischen Architekten *Thomas Heatherwick* entworfen. Die Konstruktion besteht aus acht dreieckigen Abschnitten aus Stahl und Holz und kann durch Hydraulik-Pumpen, die Wellen unterhalb des Geländers bewegen, zusammen-gerollt werden. Der gesamte Vorgang des Ein- bzw. Aufrollens dauert 180 Sekunden. Die Technik dafür ist in einem separaten Gebäude untergebracht. Vollständig ein-gerollt bildet die Brücke ein Achteck. Die Brücke wird jeden Freitag zur Mittagszeit ausgerollt

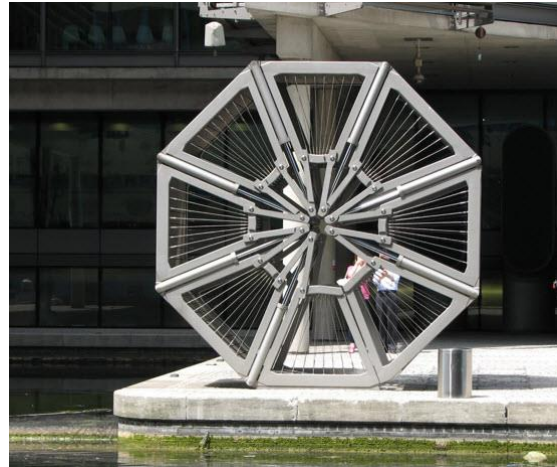


Bild 1: Rolling Bridge eingerollt

Unten sind zwei weitere Zustände dargestellt.



Bild 2: Ausrollvorgang



Bild 3: Ausgerollter Zustand

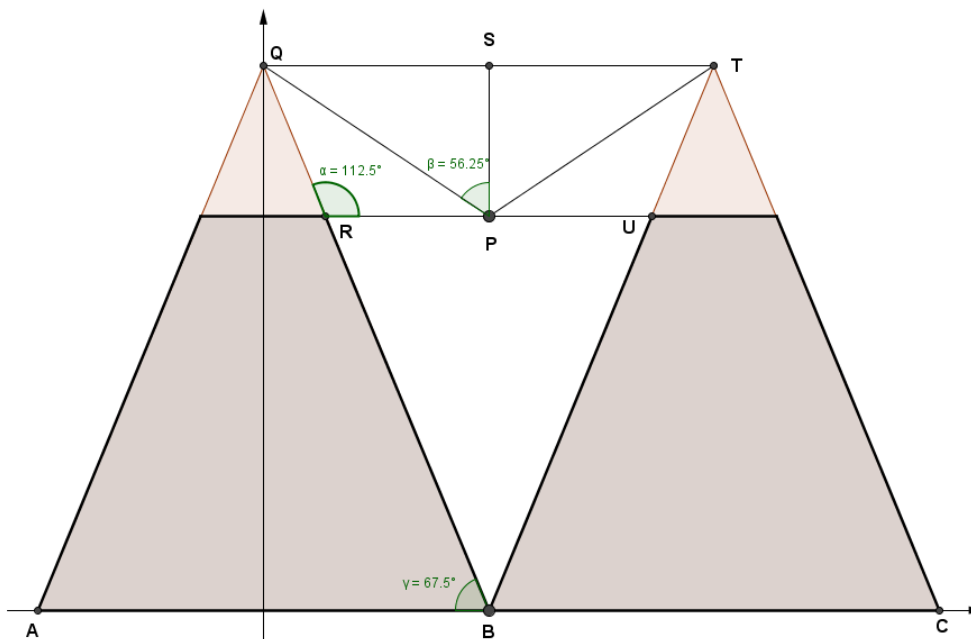
In den Bildern ist zu sehen, dass zwei Segmente beim Abrollen auf der Maschinenseite aufliegen, auf der gegenüberliegenden Seite nur ein Segment.

Der folgende Link zeigt eine Animation des Vorgangs.

<https://www.bing.com/videos/search?q=rolling+bridge+london&view=detail&mid=CD068B8E28A302770961CD068B8E28A302770961&FORM=VIRE>

Zur Vereinfachung für die folgenden Betrachtungen wird im eingerollten Zustand von einem Achteck ohne Gelenke, Hydraulikkolben etc. ausgegangen. Im ausgerollten Zustand sieht man acht Trapeze und sieben Dreiecke. Grund- und Oberseite dieser Figur werden als absolut parallel betrachtet.

Ein Ausschnitt dazu ist in der Zeichnung unten dargestellt.



Zeichnung 3: Zwei Segmente der Rollbrücke

Die Frage, die gestellt werden könnte, betrifft die Höhe des Geländers der Brücke.

Die Höhe des Dreiecks $\Delta_{ABQ} = h_1$ vermindert um die Strecke $\overline{PS} = h_2$ ergibt die Höhe h des Brückengeländers. $\overline{AB} = s = \frac{12m}{8} = 1.5m$

In B und P befinden sich Gelenke, damit das Δ_{BCT} an das linke Dreieck heran-gedreht werden kann. Dadurch legt sich $\overline{RP}$ auf $\overline{RQ}$ (d. h. $\overline{RP} = \overline{RQ}$) und $\overline{PU}$ auf $\overline{UT}$ und es entstehen zwei der acht Dreiecke des regelmäßigen Achtecks.

Höhe des Dreiecks Δ_{ABQ} : $h_1 = \frac{s}{2} \cdot \tan(67.5^\circ) \approx 1.81066 \text{ m}$

Radius des Achtecks ($\overline{AQ} = r$): $r = \frac{s}{2 \cdot \cos(67.5^\circ)} \approx 1.95984445 \text{ m}$

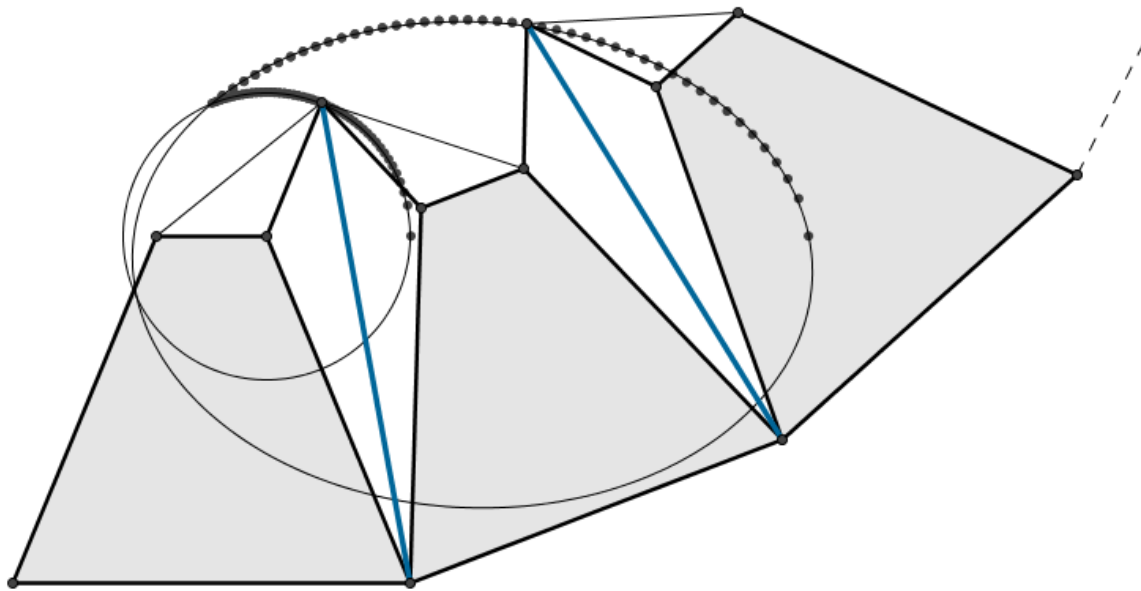
Da $\overline{RP} = \overline{RQ}$ sein muss, ist das Dreieck Δ_{PQR} gleichschenkelig und aus dem rechtwinkligen Dreieck Δ_{PQS} kann h_2 berechnet werden.

$\overline{PS} = h_2 = \frac{s}{2 \cdot \tan(56.25^\circ)} \approx 0.501133978 \text{ m} \rightarrow \text{Geländerhöhe } \boxed{h = 1.3095m}$

Die Rollbrücke in London - Paddigton

Info

Das nur 12 m Meter lange Bauwerk wurde 2004 vom britischen Architekten Thomas Heatherwick entworfen. Die Konstruktion besteht aus acht dreieckigen Abschnitten aus Stahl und Holz und kann durch Hydraulik-Pumpen, die Wellen unterhalb des Geländers bewegen, zusammengerollt werden. Der Schaltfläche Start setzt eine Animation in Gang. Die Spur der Punkte S_1 und S_2 wird angezeigt und kann wieder gelöscht werden.



Der Punkt P der 1. Zeichnung endet im Punkt Q und beschreibt einen Kreis um R mit Radius $\overline{RP} = \overline{RQ} \rightarrow (x - 0.20758)^2 + (y - 1.30953)^2 = 0.54242^2$

Der zu betrachtende Punkt des 2. Segments beschreibt nahezu exakt eine schief liegende Ellipse mit der Gleichung

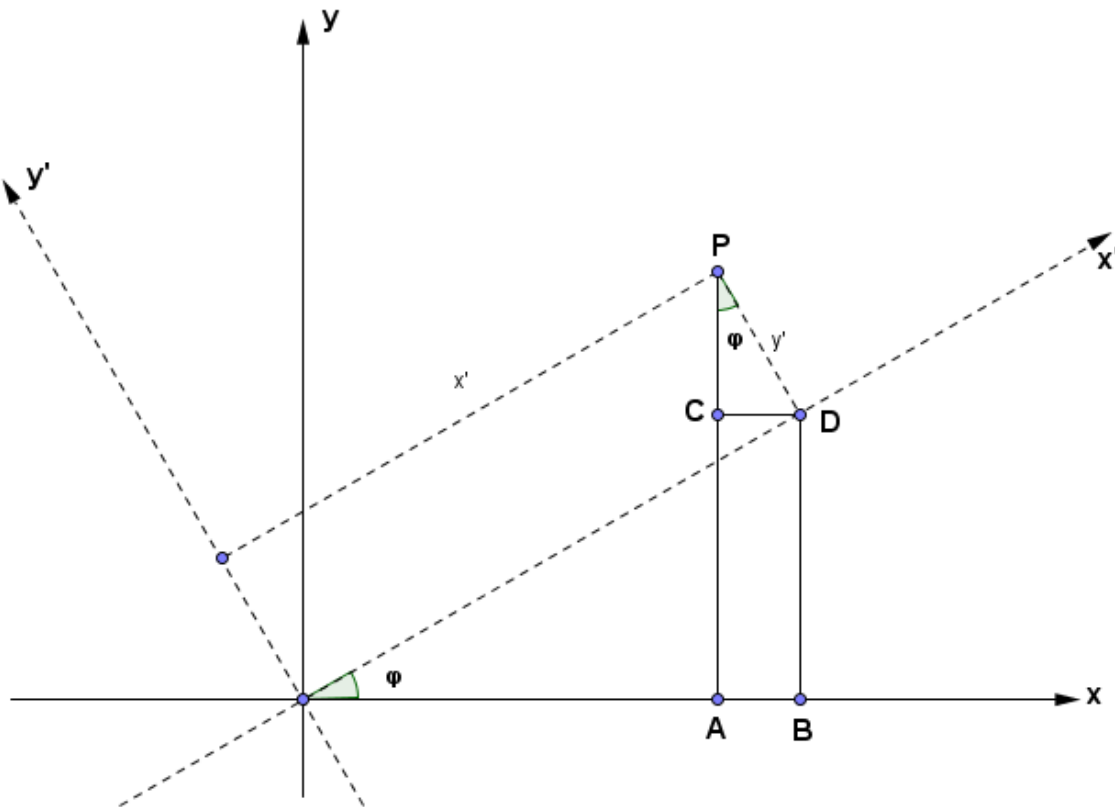
$$\begin{array}{ccccccc}
 13.3924 \cdot x^2 & + & 1.1114 \cdot x \cdot y & + & 26.2783 \cdot y^2 & - & 27.6419 \cdot x & - & 64.1929 \cdot y & + & 30.1343 & = & 0 \\
 A \cdot x^2 & + & B \cdot x \cdot y & + & C \cdot y^2 & + & D \cdot x & + & E \cdot y & + & F & = & 0
 \end{array}$$

In der zweiten Zeile ist die allgemeine Kegelschnittgleichung dargestellt. Der Term $B \cdot x \cdot y$ bewirkt dabei die Neigung des Kegelschnitts.

Exkurs - Die allgemeine Kegelschnittgleichung¹⁷

Die allgemeine Kegelschnittgleichung im rechtwinkligen Koordinatensystem lautet

$A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$. Darin bewirkt der Term $B \cdot x \cdot y$ eine Drehung um den Winkel φ .



Zeichnung 4: Koordinatentransformation

Ein Punkt P' im $x'-y'$ -KS hat die Koordinaten $P' = (x'/y')$. Im $x-y$ -KS lauten die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x &= x' \cdot \cos(\varphi) - y' \cdot \sin(\varphi) \\ y &= x' \cdot \sin(\varphi) + y' \cdot \cos(\varphi) \end{aligned} \quad \text{Setzt man dies in die obige Gleichung ein, ergibt sich}$$

$$\begin{aligned} & \left(A \cdot \cos^2(\varphi) + B \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + C \cdot \sin^2(\varphi) \right) \cdot x'^2 + \\ & \left[B \cdot (\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) - 2 \cdot (A - C) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \right] \cdot x' \cdot y' + \\ & \left(A \cdot \sin^2(\varphi) - B \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + C \cdot \cos^2(\varphi) \right) \cdot y'^2 + \\ & (D \cdot \cos(\varphi) + E \cdot \sin(\varphi)) \cdot x' + (E \cdot \cos(\varphi) - D \cdot \sin(\varphi)) \cdot y' + F = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Der Winkel φ wird so gewählt, dass das gemischt quadratische Glied verschwindet.

Man erhält $\boxed{\tan(2\varphi) = \frac{B}{A-C}}$ (2)

Daraus folgt eine reduzierte Gleichung der Form

$A' \cdot x'^2 + B' \cdot y'^2 + C' \cdot x' + D' \cdot y' + E' = 0$ deren Koeffizienten aus (1) abgelesen werden können.

$$A' = A \cdot \cos^2(\varphi) + B \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + C \cdot \sin^2(\varphi)$$

$$B' = A \cdot \sin^2(\varphi) - B \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + C \cdot \cos^2(\varphi)$$

$$C' = D \cdot \cos(\varphi) + E \cdot \sin(\varphi)$$

$$D' = E \cdot \cos(\varphi) - D \cdot \sin(\varphi)$$

$$E' = F$$

Ein Beispiel

$$\frac{7}{2} \cdot x^2 - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot y + \frac{13}{2} \cdot y^2 + 16 \cdot (2 - \sqrt{3}) \cdot x - 16 \cdot (1 + 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot y + 224 = 0$$

führt mit $\tan(2\varphi) = \frac{-3 \cdot \sqrt{3}}{7-13} = \sqrt{3}$ auf $\varphi = 30^\circ$; damit lassen sich $A', \dots, E'$ berechnen und

es ergibt sich

$$2 \cdot x^2 + 8 \cdot y^2 - 32 \cdot x - 64 \cdot y + 224 = 0 \quad \text{und damit}$$

$$\boxed{\frac{(x-8)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1}$$

Weitere Ellipsengleichungen

Eine im x-y-KS verschobene Ellipse hat (siehe Beispiel) die Gleichung

$$\boxed{\frac{(x-x_m)^2}{a^2} + \frac{(y-y_m)^2}{b^2} = 1}$$

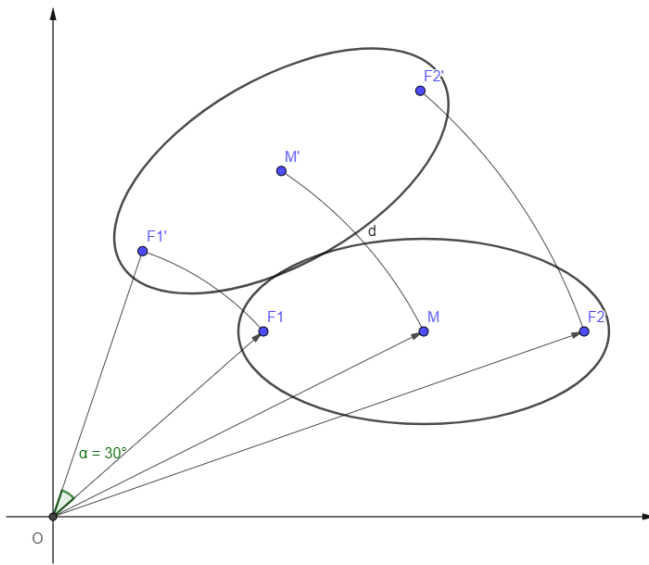
Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner, Auflösen der Klammern, ordnen und nach entsprechender Bezeichnung der Koeffizienten von x und y ergibt sich

$$\boxed{A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x + D \cdot y + E = 0}$$

Die obige Ellipse hat den Mittelpunkt $M = (8;4)$ und die Halbachsen $a = 4$ und $b = 2$.

Die Brennpunkte dieser Ellipse errechnen sich aus $\boxed{a^2 - e^2 = b^2}$ mit $e = \sqrt{12} = 2 \cdot \sqrt{3}$ zu $F_1 = (8 - 2 \cdot \sqrt{3}; 4)$ und $F_2 = (8 + 2 \cdot \sqrt{3}; 4)$

Umsetzung mit GeoGebra



Zeichnung 5: Bsp. für eine Koordinatentransformation

Hat man die Ellipse mit den zu den Koordinatenachsen parallelen Halbachsen a und b und damit M , F_1 und F_2 bestimmt, lassen sich daraus mit

$$x' = x \cdot \cos(\varphi) - y \cdot \sin(\varphi)$$

$$y' = x \cdot \sin(\varphi) + y \cdot \cos(\varphi)$$

die Koordinaten von M' , F_1' und F_2' bestimmen.

In GeoGebra lassen sich alle Objekte auch mit Drehung um 30° um den Ursprung erzeugen.

Für die schiefe Ellipse ergeben sich folgende Punkte.

$$M = (8/4) \xrightarrow{\varphi=30^\circ} M' = (4 \cdot \sqrt{3} - 2 / 2 \cdot \sqrt{3} + 4) \approx (4.93 / 7.46)$$

$$F_1 = (8 - 2 \cdot \sqrt{3} / 4) \xrightarrow{\varphi=-30^\circ} F_1' = (4 \cdot \sqrt{3} - 5 / \sqrt{3} + 4) \approx (1.93 / 5.73)$$

$$F_2 = (8 + 2 \cdot \sqrt{3} / 4) \xrightarrow{\varphi=30^\circ} F_2' = (4 \cdot \sqrt{3} + 1 / 3 \cdot \sqrt{3} + 4) \approx (7.93 / 9.196)$$

Die schiefe Ellipse der Rollbrücke (siehe S. 3 unten)

$$13.3924 \cdot x^2 + 1.1114 \cdot x \cdot y + 26.2783 \cdot y^2 - 27.6419 \cdot x - 64.1929 \cdot y + 30.1343 = 0$$

Für die zu den Achsen parallele Ellipse ergibt sich:

$$13.36852 \cdot x^2 + 26.30225 \cdot y^2 - 24.85564 \cdot x - 65.3223 \cdot y + 30.13431 = 0$$

mit

$$M = (0.929633 / 1.24176) \quad a = 1.280365 \quad b = 0.90824 \quad e = 0.90246$$

$$F_1 = (0.027173 / 1.24176) \quad F_2 = (1.83209 / 1.24176)$$

$$\frac{(x - 0.929633)^2}{1.280365^2} + \frac{(y - 0.90824)^2}{0.90824^2} = 1$$

$$M = (0.929633 / 1.24176) \xrightarrow{\varphi=-2.46476^\circ} M' = (0.982178 / 1.20065)$$

$$F_1 = (0.027173 / 1.24176) \xrightarrow{\varphi=-2.46476^\circ} F_1' = (0.080552 / 1.23944)$$

$$F_2 = (1.83209 / 1.24176) \xrightarrow{\varphi=-2.46476^\circ} F_2' = (1.8838 / 1.16182)$$

Analytische Darstellung ebener Kurven¹⁸

Bemerkungen

Die derzeitigen RRL für die gymnasiale Oberstufe an Beruflichen Gymnasien in Niedersachsen verlangen einerseits die Behandlung anwendungs- bzw. berufsbezogener Aufgaben, andererseits werden beispielsweise die trigonometrischen Funktionen mit ihren vielfältigen Anwendungsgebieten fast vollständig aus den RRL „verbannt“.

Das ist nicht akzeptabel, wenn man bedenkt, dass die Absolventen Beruflicher Gymnasien mit Schwerpunkt Technik häufig auch ein technisches Studium beginnen.

Deswegen sollte man im Rahmen der Vorgaben nach Möglichkeiten suchen, den Schülerinnen und Schülern diesen wichtigen Funktionstyp nahe zu bringen.

Kurven, die sich in der Regel nicht explizit darstellen lassen, wie z. B. Epi- und Hypozykloiden oder Evolventen bieten sich an. Diese Kurven lassen sich durch eine Parameterdarstellung beschreiben - siehe dazu auch den folgenden Abschnitt.

Darstellungsformen

1. Explizite Darstellungsform

Explizite Funktionen der Form $y = f(x)$ sind nur jene in einem Intervall $I = [a, b]$ stetigen Kurven, die von den Parallelen zur y-Achse höchstens einmal geschnitten werden.

2. Implizite Darstellungsform

Ist $F(x, y)$ eine in $B \subseteq \mathbb{R}^2$ stetige Funktion der Variablen x und y , dann stellt i. a. die Menge der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $F(x, y) = 0$ eine stetige Kurve dar. Unter gewissen Voraussetzungen ist die Gleichung $F(x, y) = 0$ nach einer Variablen, z. B. y auflösbar. In diesem Fall erhält man die Gleichung einer Kurve in der expliziten Form $y = f(x)$. Als Beispiel sei hier genannt $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3 \cdot a \cdot x \cdot y = 0$, das sogenannte *kartesische Blatt*.

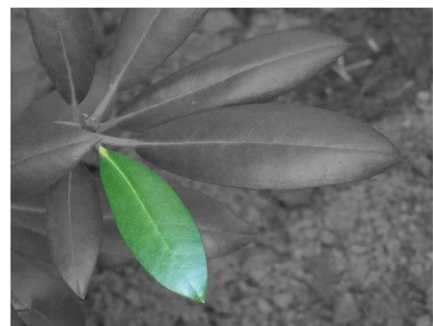
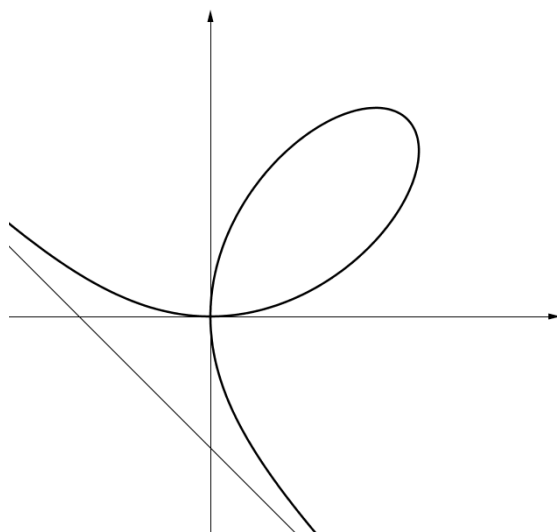
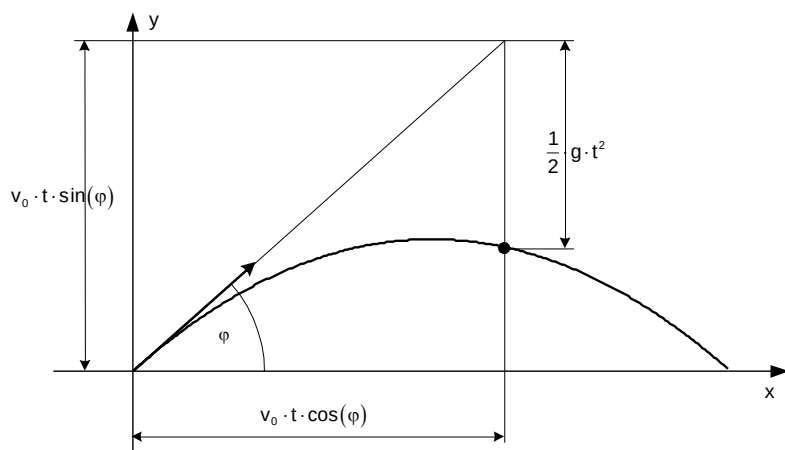


Bild 1: Ein natürliches Blatt¹⁹

3. Parameterdarstellung

Eine Kurve ist auch dann gegeben, wenn jede Koordinate x und y eines beliebigen Punktes der Kurve eine stetige Funktion eines Parameters t ist, d. h. $x = x(t), y = y(t)$ mit $a \leq t \leq b$. Das Intervall $[a, b]$ ist der Parameterbereich. Ist insbesondere die Funktion $x(t)$ umkehrbar, dann kann man in $y(t)$ den Parameter durch x ausdrücken; die Kurve ist dann in der expliziten Form darstellbar.

Ein Beispiel aus der Physik: Der Parameter ist die Zeit, z. B. beim schrägen Wurf



$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} x = v_0 \cdot t \cdot \cos(\varphi) \\ y = v_0 \cdot t \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}_0^+$$

Diese Parameterdarstellung ist aber auch als „normale“ Funktion darstellbar.

$$\text{aus } x = \dots \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\varphi)} \quad \text{folgt } y = \frac{v_0 \cdot \sin(\varphi) \cdot x}{v_0 \cdot \cos(\varphi)} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2(\varphi)}$$

$$y = f(x) = x \cdot \tan(\varphi) - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\varphi)} \cdot x^2$$

Diese Umformung in die Funktionsschreibweise ist bei vielen Kurven allerdings nicht möglich.

4. Darstellung in Polarkoordinaten

Sind x, y kartesische Koordinaten der Ebene, dann werden durch $x = r \cdot \cos(\varphi)$ und $y = r \cdot \sin(\varphi)$ die Polarkoordinaten r, φ definiert. Jeder Punkt P der Ebene kann dann durch r und φ definiert werden, wobei r der Abstand zwischen P und dem Ursprung ist.

Ein Ursprungskreis beispielsweise wird durch die Gleichung $r(\varphi) = r_0$ beschrieben.

Einige technisch relevante Kurven

Die Zykloide

Rollt ein Kreis mit Radius r auf einer Geraden ab, so beschreibt jeder Punkt des Umfangs eine Kurve, die sogenannte Zykloide. Man denke an einen Punkt auf einem Fahrradreifen oder an die Bewegung von einem Zahnrad auf einer Zahnstange.

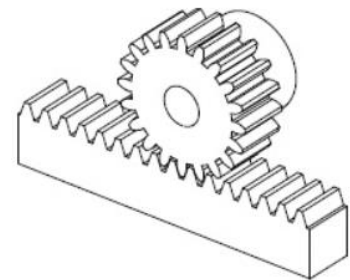
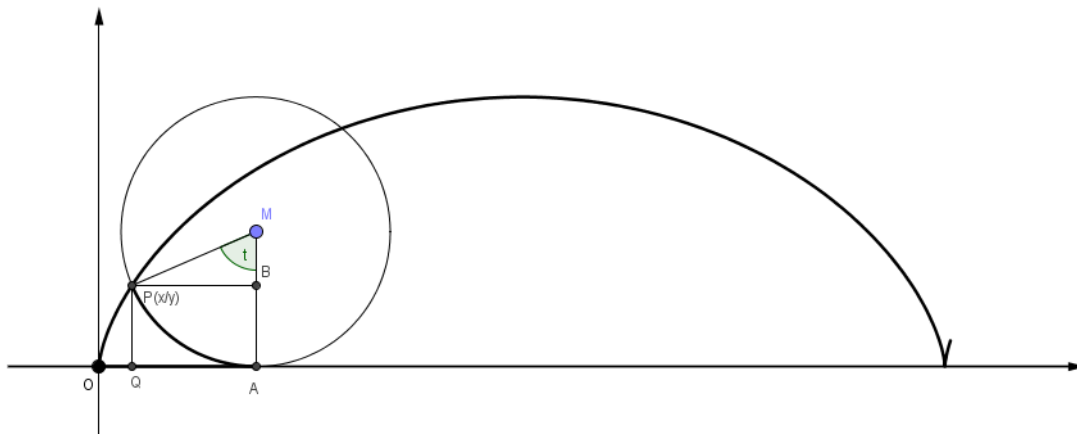


Bild 2: Stirnrad mit Zahnstange¹⁹

Mit den in der Zeichnung angegebenen Bezeichnungen lässt sich die Gleichung der Zykloide leicht herleiten:

Parameter ist der Winkel t (im Bogenmaß)



$$x = \overline{OQ} = \overline{OA} - \overline{QA} \quad \left. \begin{array}{l} \overline{QA} = r \cdot \sin(t) \\ \overline{OA} = \overline{AP} \\ = r \cdot t \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{x = r \cdot t - r \cdot \sin(t)}$$

$$y = \overline{AM} - \overline{BM} \rightarrow \boxed{y = r - r \cdot \cos(t)}$$

x und y hängen von Parameter t ab, also gilt:

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot t - r \cdot \sin(t) \\ r - r \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$$

Anwendung

Die Zykloidenverzahnung ist nach der Evolventenverzahnung der nächsthäufigste Verzahnungstyp bei Zahnrädern. Sie wird z. B. bei mechanischen Uhren verwandt. Dabei setzen sich die Zahnflanken aus Teilen von Zykloidenbögen zusammen.



Bild3: Zahnräder einer mechanischen Uhr¹⁹

Das Umlaufrädergetriebe

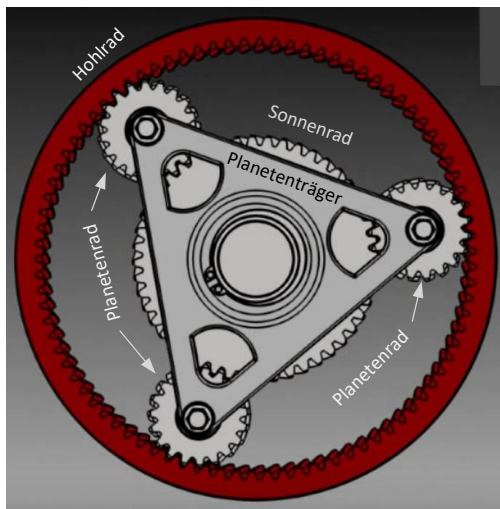


Bild 4: Planetengetriebe mit feststehendem Hohlrad¹⁹

Die nebenstehende Darstellung ist ein bearbeitetes Bildschirmfoto einer Animation von Karol Ozimy eines Umlaufrädergetriebes, auch Planetengetriebe genannt.

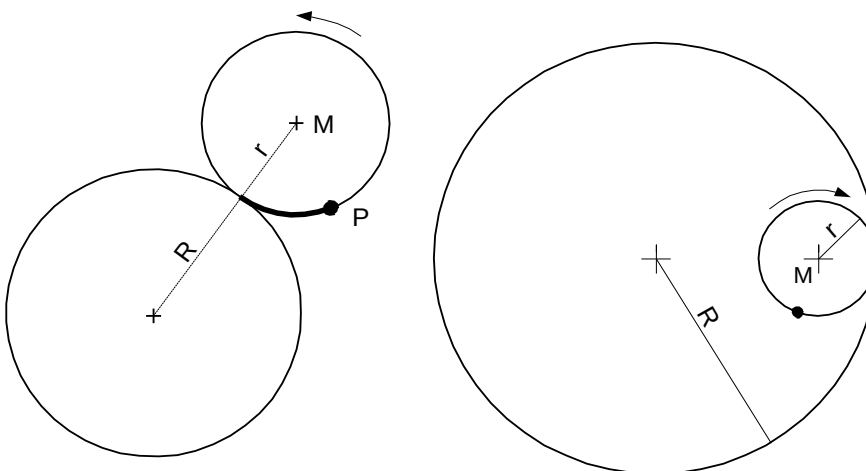
[\(Link siehe Bildverzeichnis\)](#)

Dieses Bild ist Grundlage für die folgenden Ausführungen über

- Evolventen
- Epizykloiden
- Hypozykloiden

Statt des Hohlrades kann auch das Sonnenrad feststehen; auch kann sowohl das Hohl- wie das Sonnenrad drehbar sein.

Im Maschinenbau findet die **KREISEVOLVENTE** als Profilkurve der Zahnflanken bei der Evolventenverzahnung in Getrieben Anwendung.



Rollt ein Kreis mit Radius r auf einem festen Kreis mit Radius R außen ab, so beschreibt der Punkt P des abrollenden Kreises eine **EPIZYKLOIDE**.

Rollt ein Kreis mit Radius r auf einem festen Kreis mit Radius R innen ab, so beschreibt der Punkt P des abrollenden Kreises eine **Hypozykloide**.

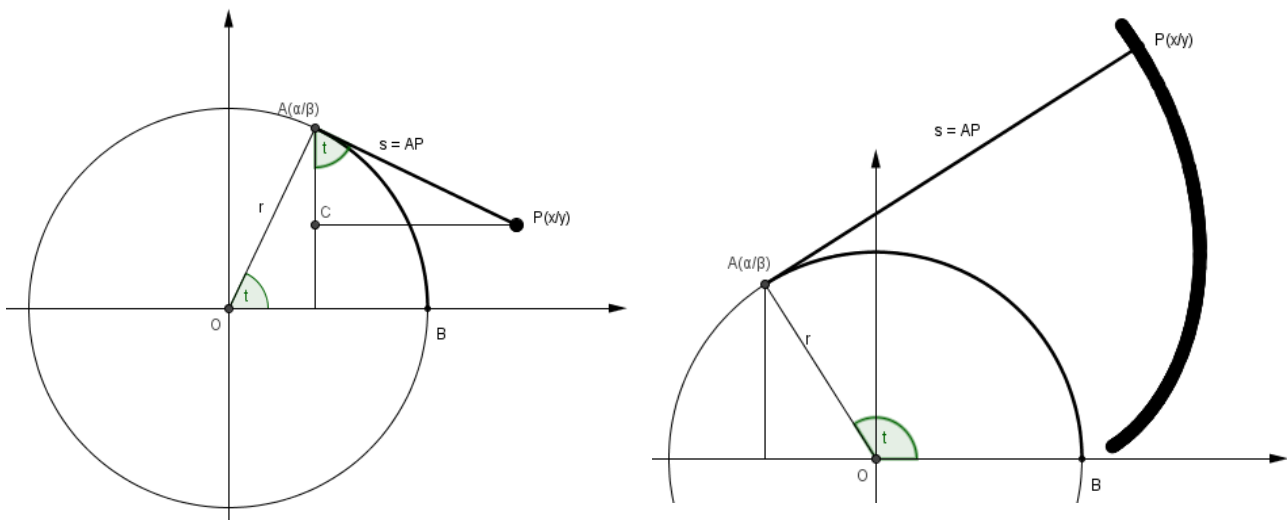
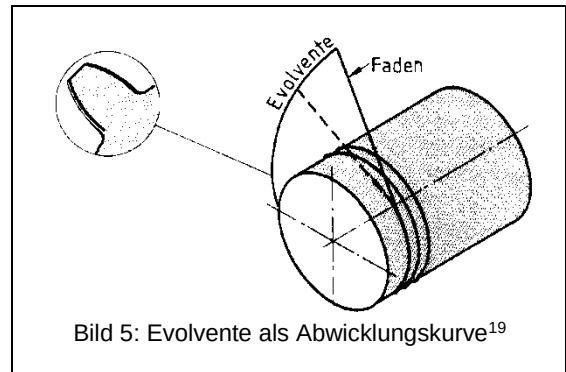
Das Verhältnis der beiden Radien wird m genannt: $R : r = m$

Diese Rollkurven sind im Planetengetriebe ebenfalls zu finden:

- Das Planetenrad rollt außen auf dem Sonnenrad ab → Epizykloide
- Das Planetenrad rollt innen auf dem Hohlrad ab → Hypozykloide

Die Evolvente

Die Kreisevolvente ist eine Abwicklungskurve. Man denke sich eine gekrümmte Kurve mit einem nicht dehnbaren Faden belegt. Der Faden sei an einem Punkt A auf der Kurve befestigt. Betrachtet man dann einen Punkt P des Fadens und wickelt den straff gehaltenen Faden von der Kurve ab, so beschreibt der Punkt P eine neue Kurve, eine *Evolvente* der Ausgangskurve. Da der Faden beim Abwickeln stets straff gehalten wird, ist der abgewickelte Teil stets Tangente an die Ausgangskurve.



Im Bild rechts ist die Spur des Punktes P eingezeichnet. Mit Hilfe der Bezeichnungen des linken Bildes kann man zeigen, dass für den Punkt P gilt:

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot [\cos(t) + t \cdot \sin(t)] \\ r \cdot [\sin(t) - t \cdot \cos(t)] \end{pmatrix}$$

Herleitung

$$\left. \begin{array}{l} x = \alpha + s \cdot \sin(t) \\ y = \beta - s \cdot \cos(t) \\ s = r \cdot t \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha = r \cdot \cos(t) \\ \beta = r \cdot \sin(t) \end{array} \Rightarrow x = r \cdot \cos(t) + s \cdot \sin(t) \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin(t) - s \cdot \cos(t)$$

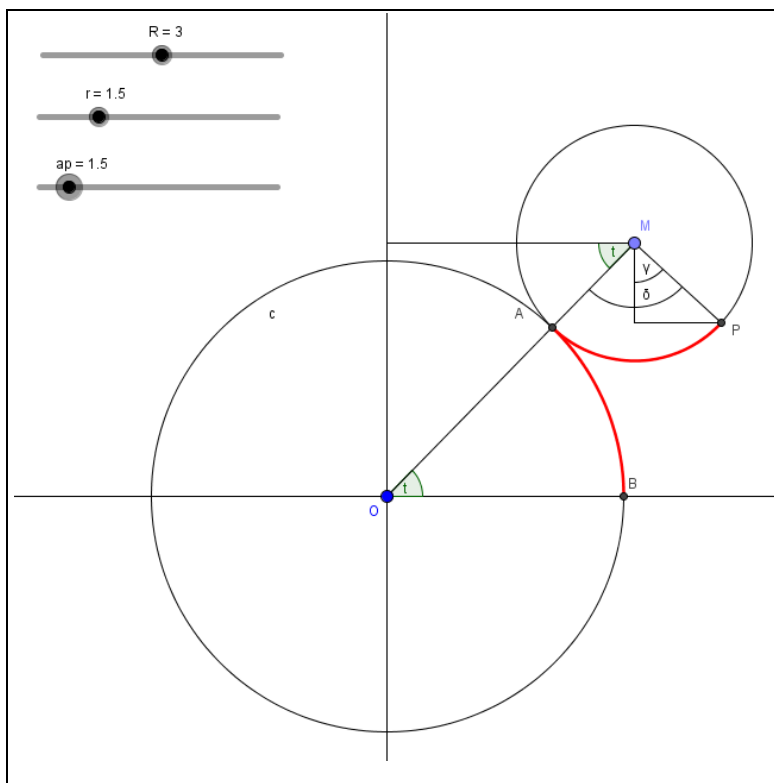
x und y hängen also vom Parameter t ab:

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot [\cos(t) + t \cdot \sin(t)] \\ r \cdot [\sin(t) - t \cdot \cos(t)] \end{pmatrix}$$

Epizykloiden und Hypozykloiden

Formelmäßige Darstellung der EPIZYKLOIDE:

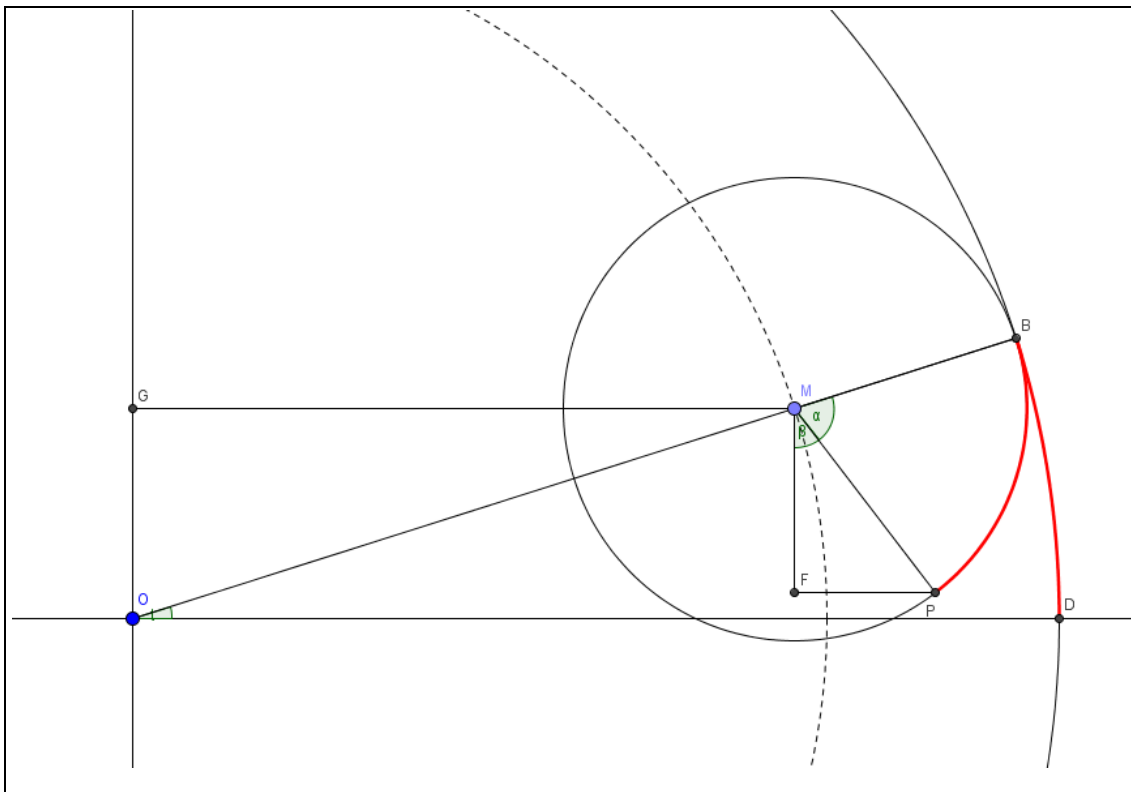
$$f: t \rightarrow \begin{pmatrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R+r) \cdot \cos(t) - a \cdot \cos\left(\frac{t \cdot (R+r)}{r}\right) \\ (R+r) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin\left(\frac{t \cdot (R+r)}{r}\right) \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \leq r \text{ oder } a > r$$



$$AB = AP \Rightarrow R \cdot t = r \cdot \delta \Rightarrow \delta = \frac{R}{r} \cdot t$$

$$x_p = (R+r) \cdot \cos(t) + r \cdot \sin\left(\frac{R+r}{r} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = (R+r) \cdot \cos(t) - r \cdot \cos\left(\frac{R+r}{r} \cdot t\right)$$

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m+1) \cdot r \cdot \cos(t) - r \cdot \cos((m+1) \cdot t) \\ (m+1) \cdot r \cdot \sin(t) - r \cdot \sin((m+1) \cdot t) \end{pmatrix}$$

$$f: t \rightarrow \begin{pmatrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R-r) \cdot \cos(t) + a \cdot \cos\left(\frac{t \cdot (R-r)}{r}\right) \\ (R-r) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin\left(\frac{t \cdot (R-r)}{r}\right) \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \leq r \text{ oder } a > r$$


Es gilt: $BD = BP \Rightarrow R \cdot t = r \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{R}{r} \cdot t$

$$\beta = \frac{\pi}{2} + t - \alpha = \frac{\pi}{2} + t - \frac{R}{r} \cdot t \rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{R-r}{r} \cdot t$$

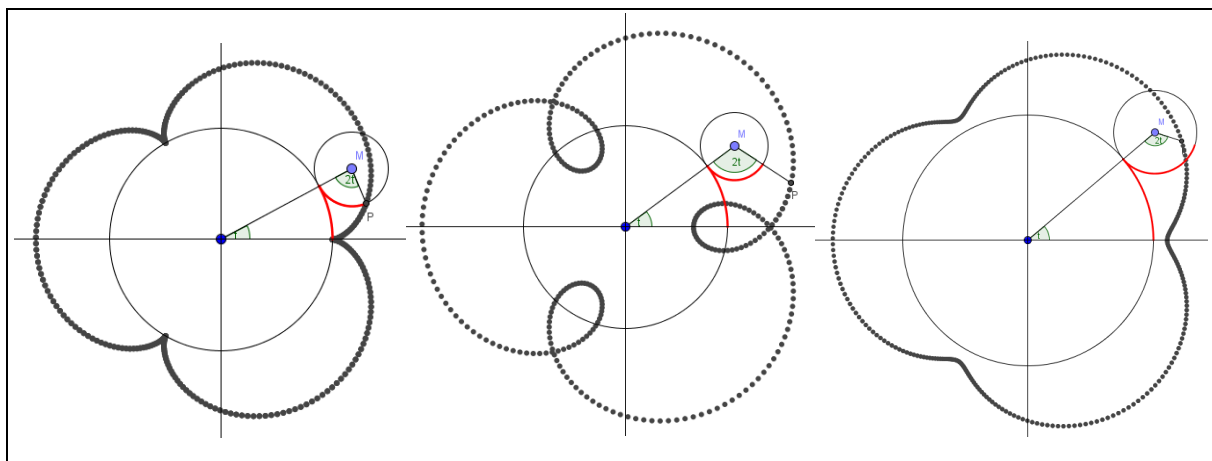
$$x_p = (R-r) \cdot \cos(t) + r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{R-r}{r} \cdot t\right) = (R-r) \cdot \cos(t) + r \cdot \cos\left(\frac{R-r}{r} \cdot t\right)$$

$$y_p = (R-r) \cdot \sin(t) - r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{R-r}{r} \cdot t\right) = (R-r) \cdot \sin(t) - r \cdot \sin\left(\frac{R-r}{r} \cdot t\right)$$

bzw. wenn P auf dem Kreis liegt, also $a = r$ ist und mit $R : r = m$

$$f(t) = \begin{pmatrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m-1) \cdot r \cdot \cos(t) + r \cdot \cos((m-1) \cdot t) \\ (m-1) \cdot r \cdot \sin(t) - r \cdot \sin((m-1) \cdot t) \end{pmatrix}$$

Einige Epizykloiden mit jeweils $R : r = 3$

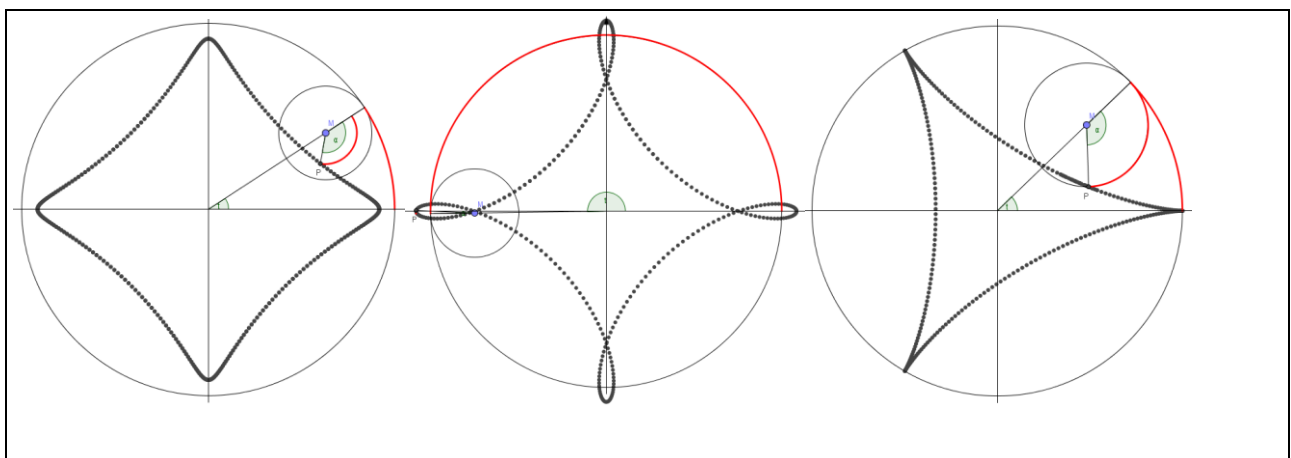


$a = r$

$a > r$

$a < r$

Einige Hypozykloiden



$R : r = 4, a < r$

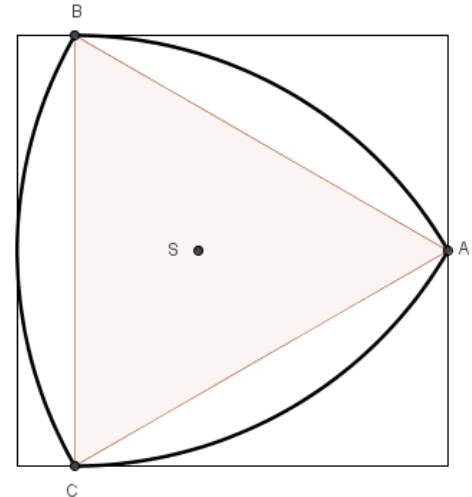
$R : r = 4, a > r$

$R : r = 3, a = r$

Dreibogengleichdick oder Reuleaux-Dreieck

Aufgabenstellung 1:

Das im Reuleaux-Dreieck (Bogendreieck) steckende gleichseitige Dreieck und das Quadrat haben dieselbe Seitenlänge a . Der Koordinatenursprung liegt im Mittelpunkt des Quadrats.

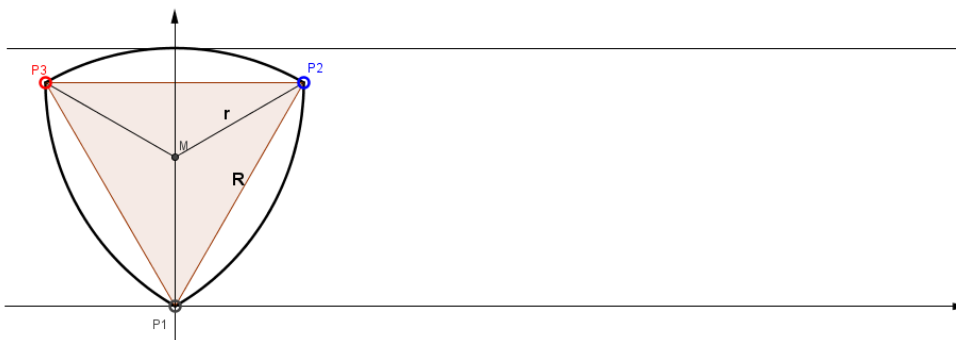


- Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C und S (Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks) in Abhängigkeit von a .
- Welche Fläche hat das Bogendreieck im Verhältnis zum Quadrat?
- Wälzt sich das Gleichdick ab, verändert sich die Lage der Punkte A, B, C und S. Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte ohne Rechnung an, wenn A um 90° , 180° und 270° gegen den Uhrzeigersinn gedreht wird, A also auf der positiven y-Achse, negativen x-Achse bzw. auf der negativen y-Achse liegt.
- Nun sollen zunächst C und A mit der unteren und der rechten Seite des Quadrats ein gleichseitiges Dreieck bilden, so dass B auf der 2. Diagonalen des Quadrates liegt. Berechnen Sie wieder die Koordinaten von A, B, C und S. Geben Sie dann auch die Koordinaten dieser Punkte – wieder ohne Rechnung – an, wenn A wieder um 90° , 180° und 270° gegen den Uhrzeigersinn gedreht wird.
- Wählen Sie eine dritte Lage des RD im Quadrat und berechnen Sie wie unter c) und d) die Koordinaten der Punkte A, B, C und S!
- Auf diese Weise haben Sie 12 verschiedene Wertepaare für S gewonnen. Beschreiben Sie die Kurve, auf der S liegt, wenn sich das Bogendreieck im Quadrat abwälzt.

Der Link²¹⁾ öffnet eine einfache Animation

Aufgabenstellung 2:

Gegeben ist nun folgende Figur, in dem das Bogendreieck in einem Parallelstreifen umgewälzt bzw. abgerollt werden kann. Gegeben ist r , der Radius des Umkreises des Dreiecks.



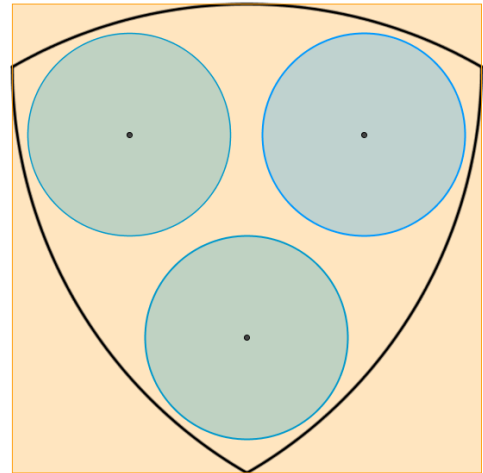
- Berechnen Sie R und h (Höhe des Dreiecks) in Abhängigkeit von r !
- Auf was für einer Kurve (in Abhängigkeit von r) bewegt sich der Mittelpunkt des Bogendreiecks, wenn dieses über eine Ebene rollt?

Aufgabenstellung 3:

Der Plattenhalter für drei CDs eines CD-Wechslers hat die Form eines Reuleaux-Dreiecks ²¹⁾.

Eine CD hat einen Durchmesser von $d = 12$ cm.

- Konstruieren Sie ein RD entsprechend nebenstehender Zeichnung für $d = 12$ in einem geeigneten KS!
- Berechnen Sie alle notwendigen Punkte und Maße des CD-Wechslers in Zahlen und in Abhängigkeit von d !

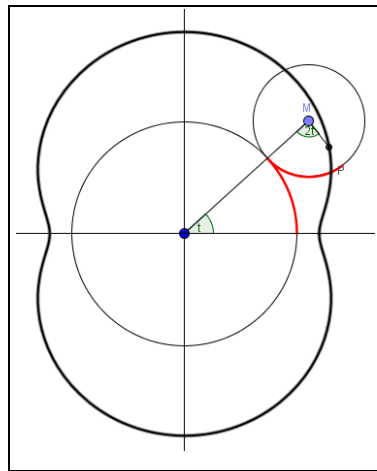


Aufgabenstellung 4:

Der Drehkolben im Wankelmotor hat in etwa die Form eines RD. Die genaue Kontur des Gehäuses ist eine Trochoide. Sie entsteht als Verlauf eines markierten Punktes auf einem kleineren Rollrad mit Radius r , wenn dieses auf einem größeren Rad mit Radius R schlupffrei abrollt. Im Falle des Wankelmotors verhalten sich die Radien des Grundkreises zum Abrollkreis wie 2:1 und ergeben die bekannte Gehäusekontur.

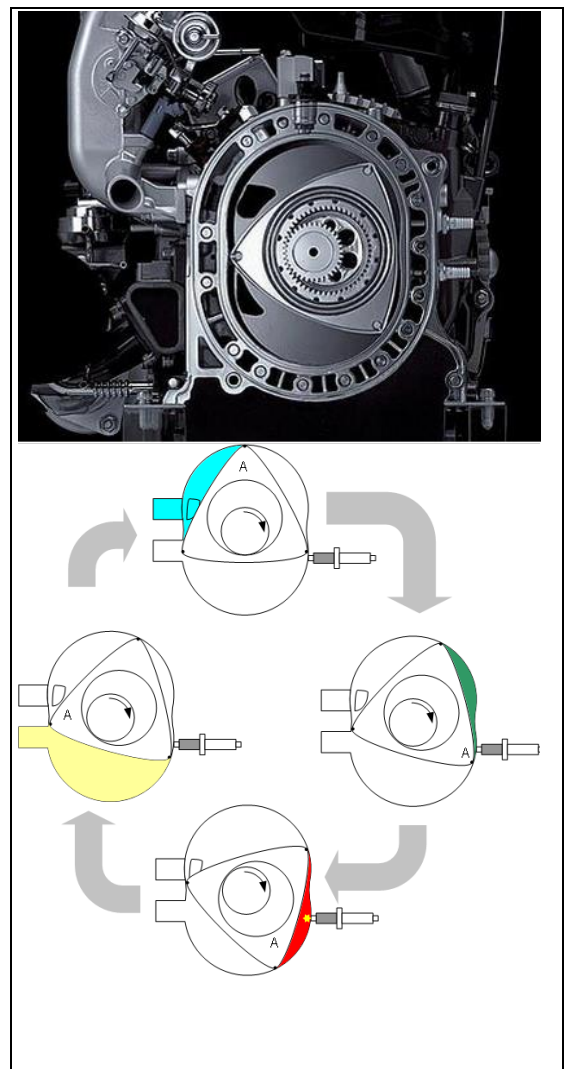
Die Trochoide ist eine Epizykloide, bei der der Punkt P innerhalb des abrollenden Kreises liegt.

Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:



$$f: t \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R+r) \cdot \cos(t) - a \cdot \cos\left(\frac{(R+r) \cdot t}{r}\right) \\ (R+r) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin\left(\frac{(R+r) \cdot t}{r}\right) \end{pmatrix}$$

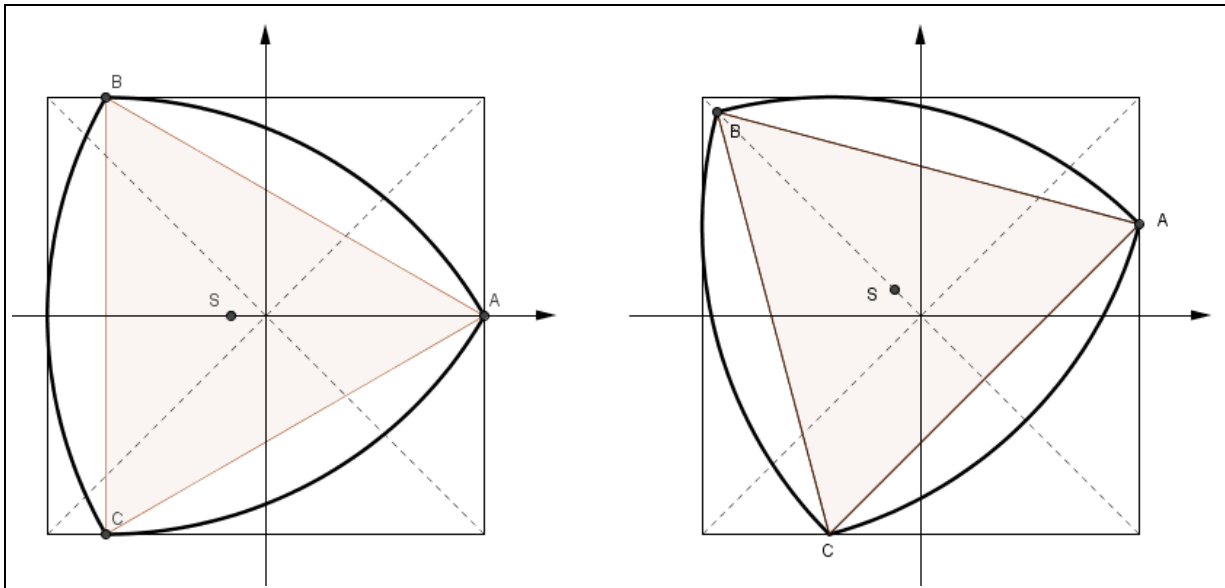
mit $a < r$



Drehkolbenmotor²¹⁾

Lösungen zu Aufgabenstellung 1 zum Reulaux-Dreieck

Zeichnungen



Lösung zu a)

Die Höhe des Dreiecks wird benötigt zur Bestimmung der Punkte B, C und S.

$$h = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Der Punkt S teilt die Höhe im Dreieck von A aus im Verhältnis 2 : 1.

Für die x-Koordinate von S gilt daher: $x_s = -\left(\frac{a}{3} \cdot \sqrt{3} - \frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{6} \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3) \approx -0.07735 \cdot a$

Für die x-Koordinate von B bzw. C gilt:

$$x_B = x_C = -\left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \approx -0.366 \cdot a$$

Damit ergeben sich die Punkte A, B, C und S zu

$$\left. \begin{array}{l} A = \left(\frac{a}{2}; 0\right) \\ B = \left(-0.366 \cdot a; \frac{a}{2}\right) \\ C = \left(-0.366 \cdot a; -\frac{a}{2}\right) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{S auch als Mittelwert von A, B und C} \\ x_s = \frac{1}{3} \cdot (0.5 \cdot a + (-0.366 \cdot a) + (-0.366 \cdot a)) = -0.0773 \cdot a \\ S = (-0.07735 \cdot a; 0) \end{array}$$

Lösung zu b)

Fläche des Quadrats: $A = a^2$

Fläche des Dreiecks: $A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$

Fläche der Segmente: $A_s = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 60^\circ}{180^\circ} - \sin(60^\circ) \right) = \frac{a^2}{4} \cdot (2 \cdot \pi - 3 \cdot \sqrt{3})$

Fläche Bogendreieck: $A_{BD} \approx 0.70477 \cdot a^2$

Lösung zu c)

Durch zyklische Vertauschung (ohne weitere Rechnung) erhält man aus den Ergebnissen zu a) die neuen Koordinaten:

Drehung um	A	B	C	S
90°	$\left(0; \frac{a}{2}\right)$	$\left(-0.366 \cdot a; -\frac{a}{2}\right)$	$\left(0.366 \cdot a; -\frac{a}{2}\right)$	$(0; -0.07735 \cdot a)$
180°	$\left(-\frac{a}{2}; 0\right)$	$\left(-0.366 \cdot a; \frac{a}{2}\right)$	$\left(0.366 \cdot a; \frac{a}{2}\right)$	$(0.07735 \cdot a; 0)$
270°	$\left(0; -\frac{a}{2}\right)$	$\left(0.366 \cdot a; \frac{a}{2}\right)$	$\left(-0.366 \cdot a; \frac{a}{2}\right)$	$(0; 0.07735 \cdot a)$

Lösung zu d)

Unmittelbar einsichtig: $\overline{PQ} = \frac{a}{2}$

$$\overline{QS} = \frac{1}{3} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a$$

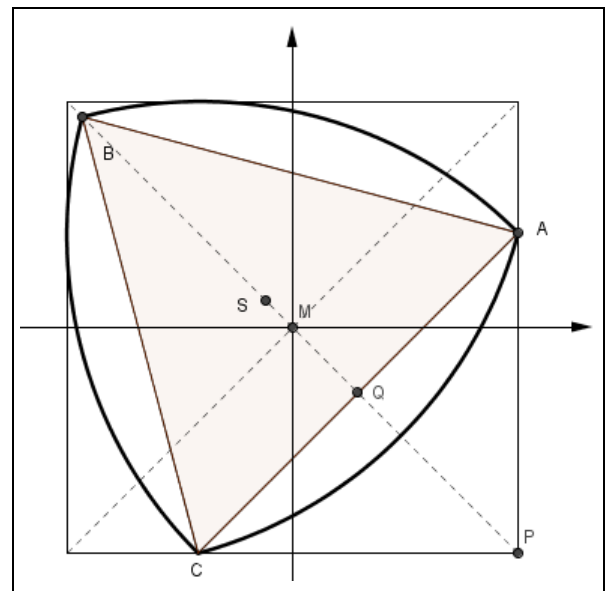
$$\overline{PM} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$$

$$\overline{MS} = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a \approx 0.08157 \cdot a$$

Daraus lassen sich die x- und y-Koordinate von S aus einem gls. Dreieck mit MS als Hypotenuse berechnen:

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \overline{MS} \approx 0.0577 \cdot a$$

Also: $S = (-0.0577 \cdot a; 0.0577 \cdot a)$



Zur Bestimmung von B wird die Strecke MB bestimmt, aus der dann die x- bzw. y-Koordinate berechnet werden kann.

$$\left. \begin{aligned} \overline{MB} &= \overline{MS} + \overline{SB} \\ \overline{MB} &= \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a \end{aligned} \right\} \rightarrow \overline{MB} \approx 0.6589186 \cdot a$$

Für die y-Koordinate ergibt sich: $y(B) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \overline{MB} \approx 0.4659258 \cdot a$

Damit ist B bestimmt: $B = (-0.4659258 \cdot a; 0.4659258 \cdot a)$

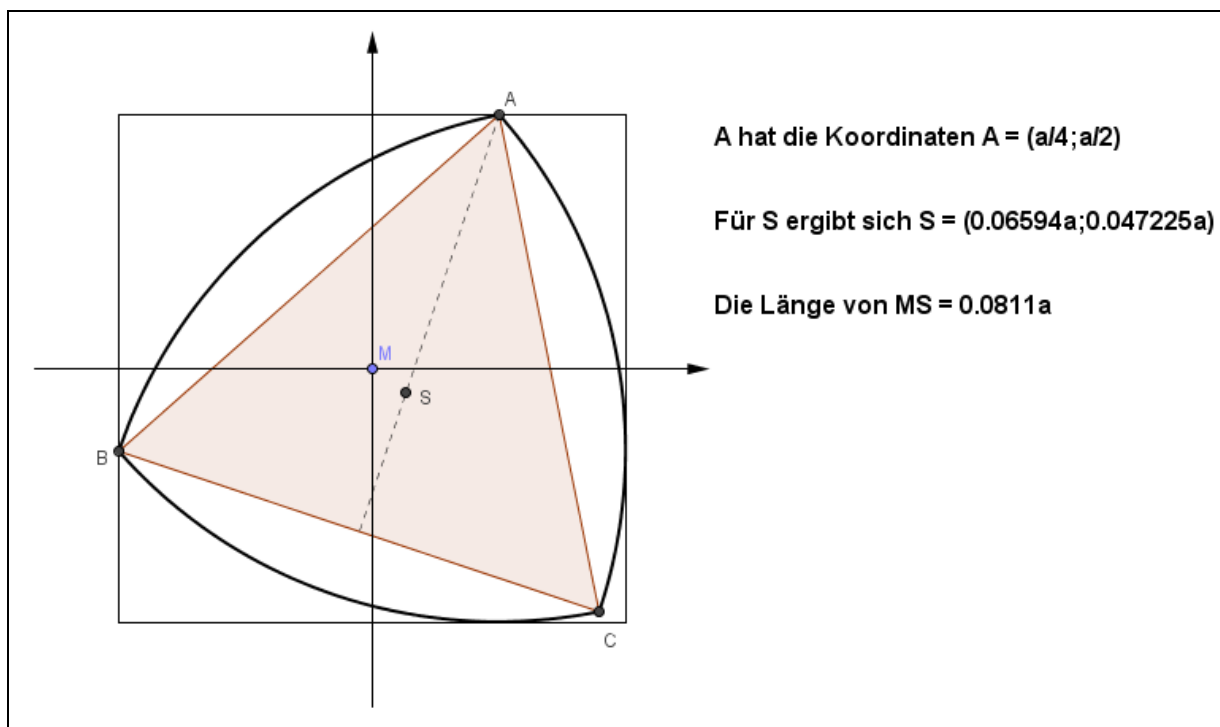
A und C ergeben sich zu

$$\left. \begin{aligned} A &= \left(\frac{a}{2}; \frac{(\sqrt{2}-1)}{2} \cdot a \right) \\ C &= \left(-\frac{(\sqrt{2}-1)}{2} \cdot a; -\frac{a}{2} \right) \end{aligned} \right\}$$

Durch zyklische Vertauschung (ohne weitere Rechnung) erhält man aus den Ergebnissen zu a) die neuen Koordinaten:

Drehung um	A	B	C	S
90°	$\left(-\frac{(\sqrt{2}-1)}{2} \cdot a; \frac{a}{2} \right)$	$(-0.466 \cdot a; -0.466 \cdot a)$	$\left(\frac{a}{2}; -\frac{(\sqrt{2}-1)}{2} \cdot a \right)$	$(-0.0577 \cdot a; -0.0577 \cdot a)$
180°	$\left(-\frac{a}{2}; -\frac{(\sqrt{2}-1)}{2} \cdot a \right)$	$(0.466 \cdot a; -0.466 \cdot a)$	$\left(\frac{(\sqrt{2}-1)}{2} \cdot a; \frac{a}{2} \right)$	$(0.0577 \cdot a; -0.0577 \cdot a)$
270°	$\left(\frac{(\sqrt{2}-1)}{2} \cdot a; -\frac{a}{2} \right)$	$(0.466 \cdot a; 0.466 \cdot a)$	$\left(-\frac{a}{2}; \frac{(\sqrt{2}-1)}{2} \cdot a \right)$	$(0.0577 \cdot a; 0.0577 \cdot a)$

Lösung zu e)



Auf die Angabe der Koordinaten von B und C wird hier verzichtet. Dreht man nun das RD wieder um 90° , 180° und 270° , so gewinnt man die Koordinaten von S_{90} , S_{180} und S_{270} mittels GeoGebra durch Drehung von S um M gegen den Uhrzeigersinn um jeweils 90° .

Lösung zu f)

Zeichnet man die 12 Mittelpunkte der Bogendreiecke in ein Koordinatensystem ein, kommt man auf den Gedanken, dass diese auf einem Kreis liegen könnten.

Dies kann aber schon aus den Berechnungen zu a), d) und e) widerlegt werden.

Bei Teilaufgabe a) ergab sich:

$$\overline{MS} = \frac{a}{6} \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3) \approx 0.07735 \cdot a$$

Bei Teilaufgabe d) ergab sich:

$$\overline{MS} = \frac{a}{6} \cdot (3 + \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{2}) \approx 0.08157 \cdot a$$

Die zusätzlich eingezeichneten Schwerpunkte stammen von einem Bogendreieck mit

$$A = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{4} \right) \text{ bzw. } A = \left(\frac{a}{4}; \frac{a}{2} \right) \text{ mit } \overline{MS} \approx 0.081106 \cdot a$$

Bei der Schwerpunktbahn handelt es sich um eine Superellipse der Form

$$\left| \frac{x}{t_1} \right|^r + \left| \frac{y}{t_2} \right|^r = 1$$

t_1 und t_2 sind die Halbachsen, die in dem oben beschriebenen RD denselben Wert haben.

In einem Artikel ²¹⁾ wird die Schwerpunktbahn nur für $a = 2$ durch $\left| \frac{x}{t} \right|^r + \left| \frac{y}{t} \right|^r = 1$ mit

$$t = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} - 1 \text{ und } r = 2.36185 \text{ angegeben.}$$

Diese Werte für t und r lassen sich auf einfache Weise nachvollziehen:

Auf Seite 3 wird die x-Koordinate des Schwerpunktes S angegeben mit

$$x_s = -\left(\frac{a}{3} \cdot \sqrt{3} - \frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{6} \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3) \approx -0.07735 \cdot a .$$

Daraus folgt für $a = 2$: $t = \frac{2}{6} \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3) = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} - 1$

Aus den Schwerpunktkoordinaten $S = (0.06594 \cdot a; 0.047225 \cdot a)$ (siehe S. 6) erhält man die

$$\text{Gleichung } \left(\frac{\frac{2 \cdot 0.06594}{\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} - 1}}{\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} - 1} \right)^r + \left(\frac{\frac{2 \cdot 0.047225}{\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} - 1}}{\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} - 1} \right)^r = 1 \rightarrow r = 2.35336$$

Für andere Werte von a ändert sich die rechte Seite der Gleichung.

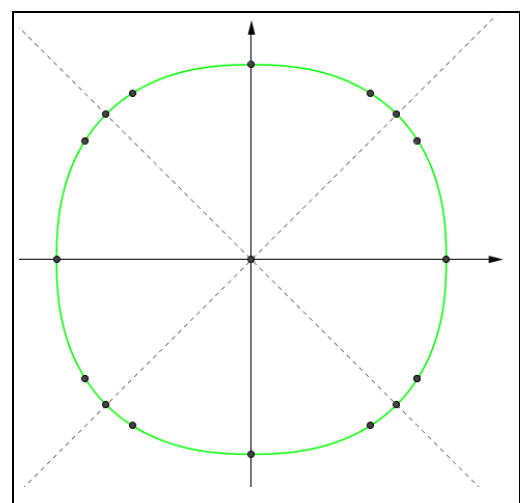
Verallgemeinernd wird der Ansatz $\left| \frac{x}{t} \right|^r + \left| \frac{y}{t} \right|^r = s$ bei unverändertem t und r gewählt und s aus den Ergebnissen aus a) bestimmt.

Mit z. B. $S = \left(\frac{a}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1); 0\right)$ erhält man die Bestimmungsgleichung.

$$s(a) = \left(\frac{\frac{a}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)}{\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} - 1} \right)^{2.36185} \approx 0.19454152 \cdot a^{2.36185}$$

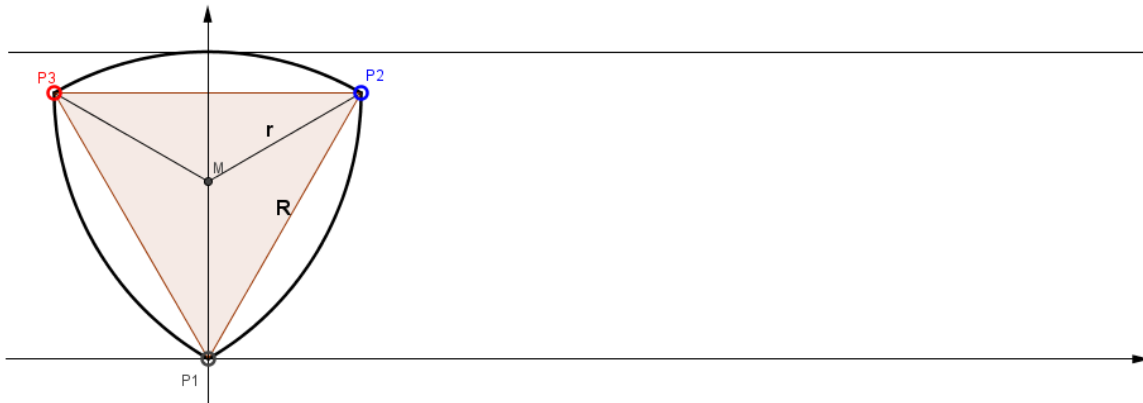
Die Punkte auf und oberhalb der x-Achse liegen

$$\text{also auf } f(x) = \pm t \cdot \left(s(a) - \left| \frac{x}{t} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$



Lösungen zu Aufgabenstellung 2 zum Reulaux-Dreieck

Der gesuchte Wert für R in Abhängigkeit von r kann mit Hilfe des Kosinussatzes bestimmt werden.



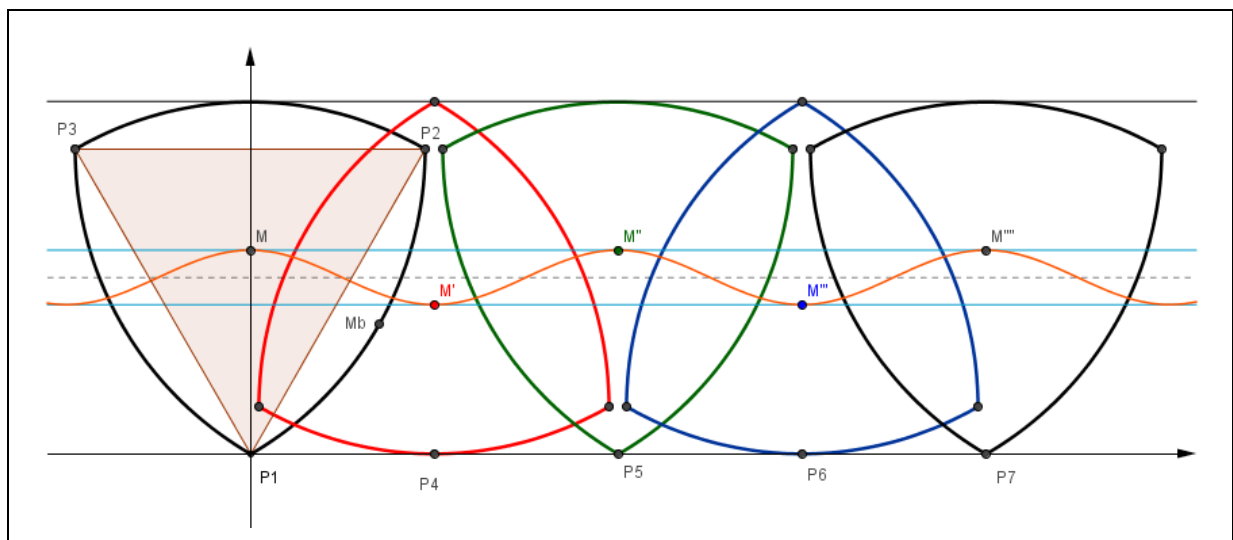
Aus dem gleichschenkligen Dreieck mit den Katheten r und dem eingeschlossenen Winkel $\alpha = 120^\circ$ erhält man die Gleichung

$$R^2 = r^2 + r^2 + 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos(120^\circ) \rightarrow \boxed{R = \sqrt{3} \cdot r}$$

Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge R hat Höhe h von $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R$

Also:

$$\boxed{h = \frac{3}{2} \cdot r}$$



- In der Ausgangsstellung hat M die Koordinaten $M = (0; r)$; dies ist der höchstmögliche Punkt.

- Rolllt der Bogen P_1P_2 zur Hälfte (30°) ab, bewegt sich Mb zum Punkt

$$P_4 = \left(\frac{\pi}{6} \cdot R; 0 \right) = \left(\frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{6} \cdot r; 0 \right) \text{ (siehe Zeichnung);}$$

$$M' \text{ hat die Koordinaten } M' = \left(\frac{\pi}{6} \cdot R; R - r \right) = \left(\frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{6} r; (\sqrt{3} - 1) \cdot r \right).$$

Dies ist der tiefstmögliche Punkt.

- Rolllt der Bogen P_1P_2 ganz (60°) ab, hat P2 die Position von P5 und M'' hat wieder den Höchstwert.

$$P_5 = \left(\frac{\pi}{3} \cdot R; 0 \right) = \left(\frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot r; 0 \right)$$

$$M'' = \left(\frac{\pi}{3} \cdot R; r \right) = \left(\frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{3} r; r \right)$$

- Dies setzt sich so fort; man erkennt in der Grafik eine Schwingung, die entweder als sinus- oder cosinus-Kurve beschrieben werden kann. Eine allgemeine Sinuskurve hat die Form $y = a \cdot \sin(b \cdot x - c) + d$ mit

- $a = r - \frac{R}{2} = (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{r}{2}$

- Die Periodenlänge p beträgt $p = \frac{\pi}{3} \cdot R$ also $\frac{1}{6}$ der Periodenlänge eines Kreises mit Radius R $\rightarrow b = \frac{6}{R} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{r}$

- Die Phasenverschiebung c ergibt sich zu $c = \frac{\pi}{2}$

- Die Phasenlage d hat den Wert $d = \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r$

Damit bewegt sich der Mittelpunkt m auf der Bahn

$$f(x, r) = -\left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot \frac{r}{2} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{r} \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r$$

Diese Funktion kann auch geschrieben werden als

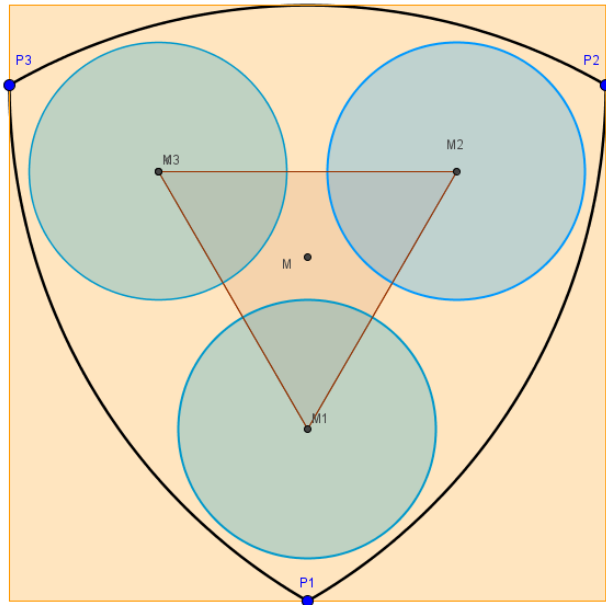
$$f(x, r) = \left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot \frac{r}{2} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{r} \cdot x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r$$

Lösungen zu Aufgabenstellung 3 zum Reulaux-Dreieck

Damit die Kreise (CDs) sich nicht schneiden, werden Abstände von $\frac{d}{2} + 2$ cm zwischen den Kreisen und den Punkten P_1 , P_2 , und P_3 bzw. von M zu den drei Kreisen eingehalten.

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} M_1 &= \left(0; -\frac{d}{2} - 2 \right) \\ M_2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{d}{2} + 2 \right); \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{2} + 2 \right) \right) \\ M_3 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{d}{2} + 2 \right); \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{2} + 2 \right) \right) \end{aligned}$$

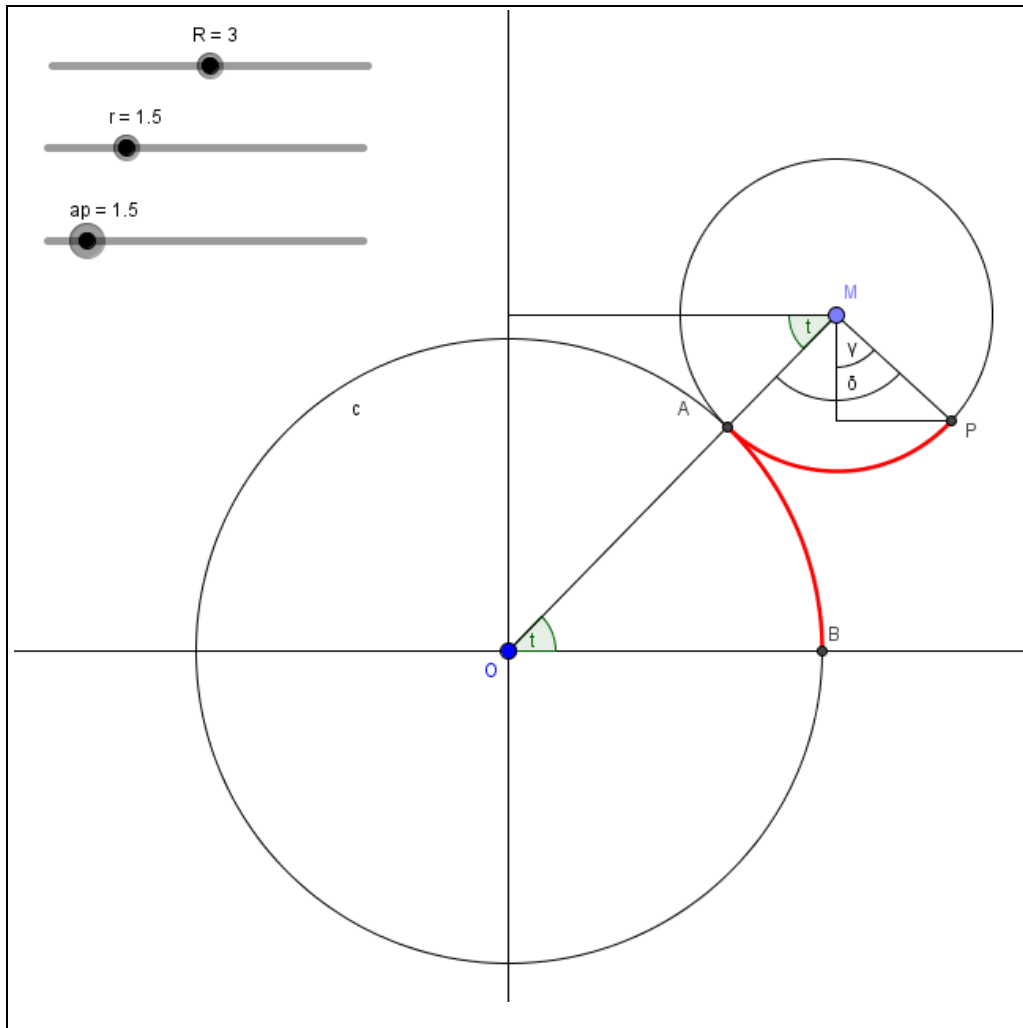


Für die Punkte des RD erhält man:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(0; -(d+4) \right) \\ P_2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (d+4); \frac{d+4}{2} \right) \\ P_3 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (d+4); \frac{d+4}{2} \right) \end{aligned}$$

Die Seitenlänge a des Quadrates hat also die Länge $a = \sqrt{3} \cdot (d+4)$

Lösungen zu Aufgabenstellung 4 zum Wankel-Motor



$$AB = AP \Rightarrow R \cdot t = r \cdot \delta \Rightarrow \delta = \frac{R}{r} \cdot t$$

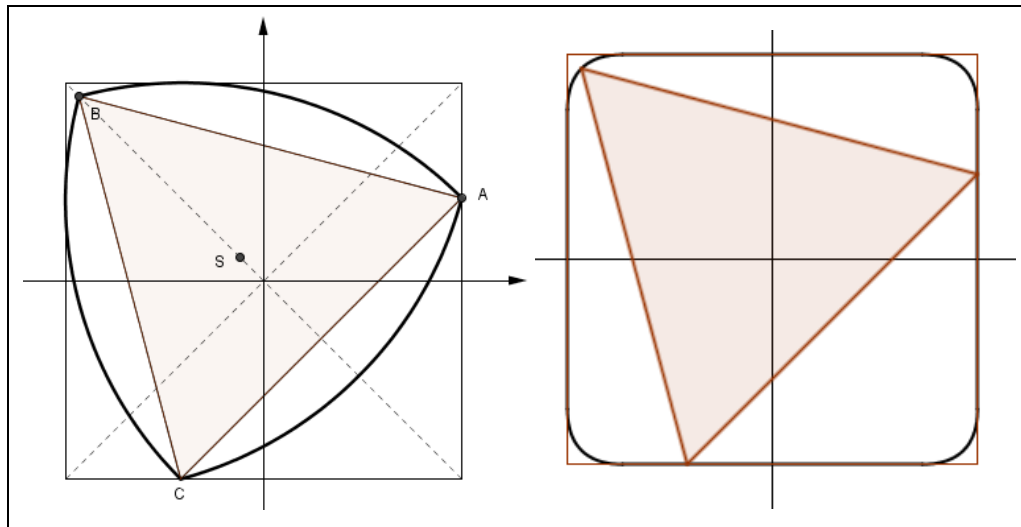
$$\gamma = \delta - \frac{\pi}{2} = \frac{R}{r} \cdot t + t - \frac{\pi}{2} \rightarrow \gamma = \frac{R+r}{r} \cdot t - \frac{\pi}{2}$$

$$x_p = (R+r) \cdot \cos(t) + r \cdot \sin\left(\frac{R+r}{r} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = (R+r) \cdot \cos(t) - r \cdot \cos\left(\frac{R+r}{r} \cdot t\right)$$

$$y_p = (R+r) \cdot \sin(t) - r \cdot \cos\left(\frac{R+r}{r} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = (R+r) \cdot \sin(t) - r \cdot \sin\left(\frac{R+r}{r} \cdot t\right)$$

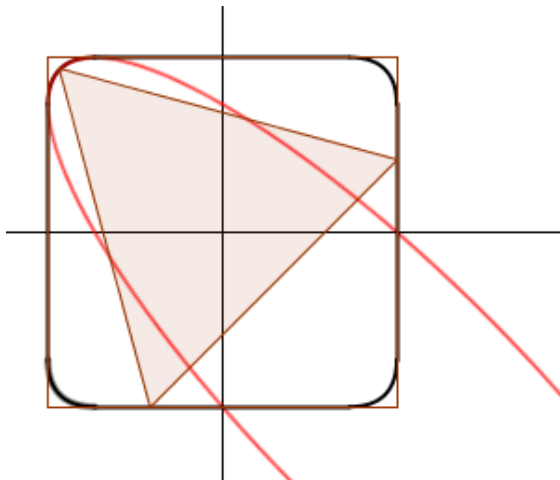
Hier liegt P auf dem abrollenden Kreis; für $a < r$ gilt somit:

$$f : t \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R+r) \cdot \cos(t) - a \cdot \cos\left(\frac{(R+r) \cdot t}{r}\right) \\ (R+r) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin\left(\frac{(R+r) \cdot t}{r}\right) \end{pmatrix}$$



Dieses Bild von Seite 114 oben zeigt, dass das RD nicht in allen Lagen mit allen drei Ecken das Quadrat berührt. Dies gelingt nur, wenn die Ecken des Quadrates abgerundet sind.

Es stellt sich die Frage nach der Gleichung dieser Kurven an den vier Quadratecken.



Es handelt sich um schiefe Ellipsen, die ihren Mittelpunkt jeweils in einer Ecke des Quadrates haben und deren Gleichung durch eine Parameterkurve beschrieben werden kann.

$$ell_1(t) = \begin{cases} \frac{a}{2} \cdot (-\cos(t) - \sqrt{3} \cdot \sin(t) + 1) \\ \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{3} \cdot \cos(t) + \sin(t) - 1) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi$$

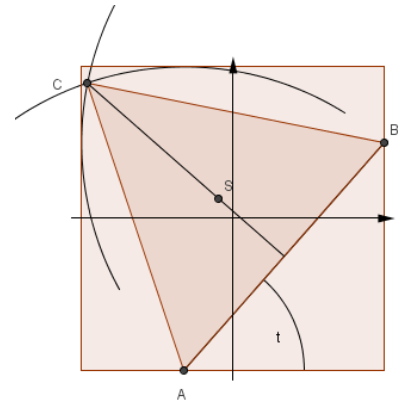
Für $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ erhält man den geeigneten Teil der Kurve. Für die anderen Ecken des Quadrates müssen lediglich $x(t)$ bzw. $y(t)$ von $ell_1(t)$ mit einem geeigneten Vorzeichen versehen werden.

Die Berechnung der schiefen Ellipse

Als Grundlage dient die folgende Grafik

$$A = \left(\frac{a}{2} - a \cdot \cos(t); -\frac{a}{2} \right) \quad K1: \left(x - \frac{a}{2} + a \cdot \cos(t) \right)^2 + \left(y + \frac{a}{2} \right)^2 = a^2$$

$$B = \left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2} + a \cdot \sin(t) \right) \quad K2: \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{a}{2} - a \cdot \sin(t) \right)^2 = a^2$$



Schnittpunkt von Kreis um A (K1) und Kreis um b (K2) mit jeweils $r = a$ liefert Punkt C mit den Koordinaten

$$C = (x1(t); y1(t)) = \left(-\frac{a}{2} \cdot (\cos(t) + \sqrt{3} \cdot \sin(t) - 1); \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{3} \cdot \cos(t) + \sin(t) - 1) \right)$$

Damit ist die auf Seite 13 dargestellt schiefe Ellipse als Parameterkurve definiert.

$$ell1(t) = \begin{pmatrix} x1(t) \\ y1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \cdot (\cos(t) + \sqrt{3} \cdot \sin(t) - 1) \\ \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{3} \cdot \cos(t) + \sin(t) - 1) \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi$$

Um lediglich die linke obere Rundung zu erhalten wird t begrenzt auf $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$

Für die rechte obere Rundung definiert man $ell2(t) = \begin{pmatrix} -x1(t) \\ y1(t) \end{pmatrix}$ mit $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$

für die rechte untere Rundung erhält man $ell3(t) = \begin{pmatrix} -x1(t) \\ -y1(t) \end{pmatrix}$ mit $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$

und für die linke untere Rundung ergibt sich $ell4(t) = \begin{pmatrix} x1(t) \\ -y1(t) \end{pmatrix}$ mit $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$

Die exakte Mittelpunktsbahn

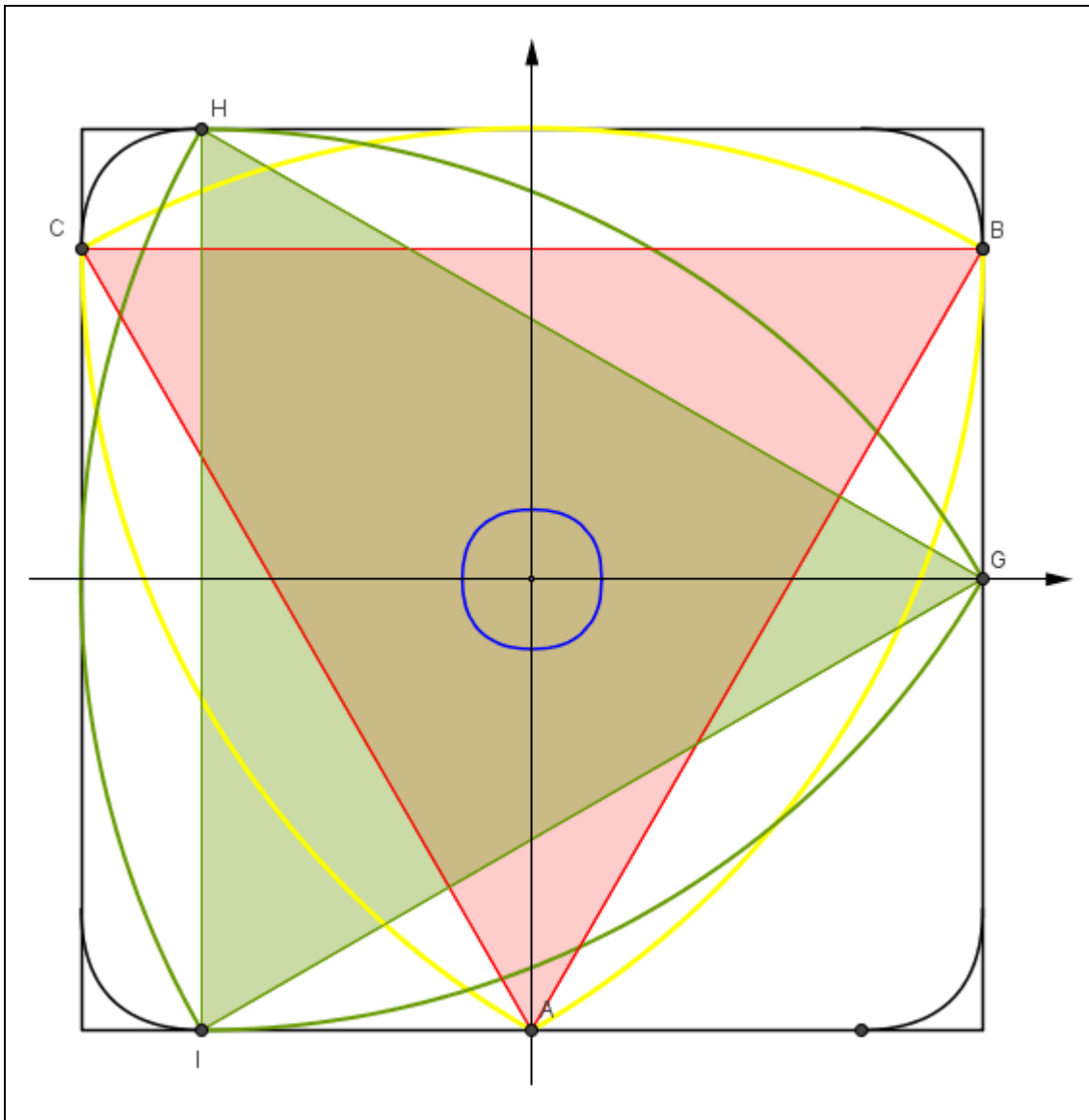
Aus den Punkten A, B und C erhält man S durch

$$S = \left(\frac{x(A) + x(B) + x(C)}{3}; \frac{y(A) + y(B) + y(C)}{3} \right)$$

$$S = \left(-\frac{a}{6} \cdot (3 \cdot \cos(t) + \sqrt{3} \cdot \sin(t) - 3); \frac{a}{6} \cdot (\sqrt{3} \cdot \cos(t) + 3 \cdot \sin(t) - 3) \right)$$

Durch die x- und y-Koordinate $[x_2(t)$ bzw. $y_2(t)]$ wird wieder eine Parameterkurve definiert, die ein ähnliches Aussehen hat wie die vorher beschriebene schiefe Ellipse.

$$ell5(t) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{6} \cdot (3 \cdot \cos(t) + \sqrt{3} \cdot \sin(t) - 3) \\ \frac{a}{6} \cdot (\sqrt{3} \cdot \cos(t) + 3 \cdot \sin(t) - 3) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{6} \quad (\text{Kurve im 2. Quadranten})$$



Die anderen Teile der Mittelpunktsbahn ergeben sich wie oben für die abgerundeten Ecken beschrieben.

Wachstumsprozesse und DGL'n

I. Vorübungen

Im Unterricht der gymnasialen Oberstufe werden neben dem linearen Wachstum (hier nicht betrachtet) folgende Wachstumsmodelle erörtert:

- Exponentielles Wachstum

$$N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$$

- Begrenztes Wachstum

$$N(t) = B + (N_0 - B) \cdot e^{-k \cdot t}$$

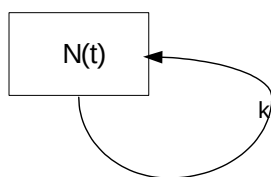
- Logistisches Wachstum

$$N(t) = \frac{B \cdot N_0}{N_0 + (B - N_0) \cdot e^{-k \cdot B \cdot t}}$$

Am Beispiel des (Bakterienwachstums) Tumorzellwachstums werden verschiedene Wachstumsmodelle und die dazu gehörenden DGL'n vorgestellt, um die oben dargestellten Formeln zu begründen.

Zur Modellierung benutzen die Mathematiker sogenannte Kompartiment-Modelle; diese könnte man auch als Regelkreise bezeichnen.

Modell 1 - unbegrenztes Wachstum



$N(t)$ = Zahl der Tumorzellen zur Zeit t

Dieser Regelkreis hat eine eigene Dynamik; Tumorzellen erzeugen Tumorzellen.

k = Wachstumsfaktor (hier konstant)

Im niedersächsischen Kerncurriculum sind als Thema Differenzialgleichungen (ohne Lösungsverfahren) genannt; trotzdem soll hier ein Lösungsverfahren dargestellt werden.

Ansatz

$$\left. \begin{array}{l} N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta t \cdot k \cdot N(t) \\ \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = k \cdot N(t) \end{array} \right\} \text{ links steht ein Differenzenquotient}$$

Durch Grenzwertbildung erhält man

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{dN(t)}{dt} = k \cdot N(t)$$

Dies ist eine gewöhnliche homogene DGL, die man durch Trennung der Variablen löst.

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = k \cdot dt$$

beidseitige Integration

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = \int k \cdot dt$$

$$\ln(N(t)) = k \cdot t + c$$

beidseitiges exponenzieren

$$N(t) = e^{k \cdot t + c} = e^{k \cdot t} \cdot e^c$$

$$N(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$$

mit der Anfangsbedingung $N(t=0) = N_0$ folgt $C = N_0$

Lösung

$$N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$$

Aufgabe 1:

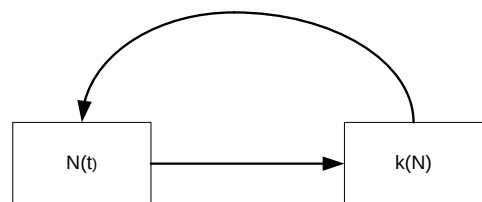
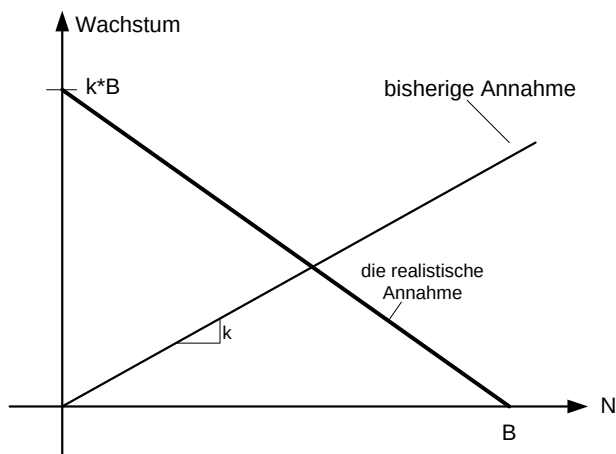
Ihr CAS ist in der Lage, Differenzialgleichungen algebraisch zu lösen und grafisch in Form von Richtungsfeldern darzustellen. Machen Sie sich mit der Syntax Ihres Rechners vertraut.

Bestätigen sie mit Ihrem CAS die durch Trennung der Variablen gefundene rechnerische Lösung für die DGL $\frac{dN(t)}{N(t)} = k \cdot dt$. Stellen Sie diese allgemeine Lösung für $k = 0.2$ und

$N_0 = (0;1)$ grafisch dar.

Modell 2 - begrenztes Wachstum

Realistisch ist es, dass das Wachstum langsamer wird, je mehr Tumorzellen vorhanden sind.



Nun gilt:

$$k(N) = k \cdot (B - N)$$

Die neue DGL

$$\frac{dN(t)}{dt} = k \cdot (B - N(t)) \text{ oder kürzer } \frac{dN(t)}{dt} = k \cdot (B - N)$$

$$N(t = 0) = N_0$$

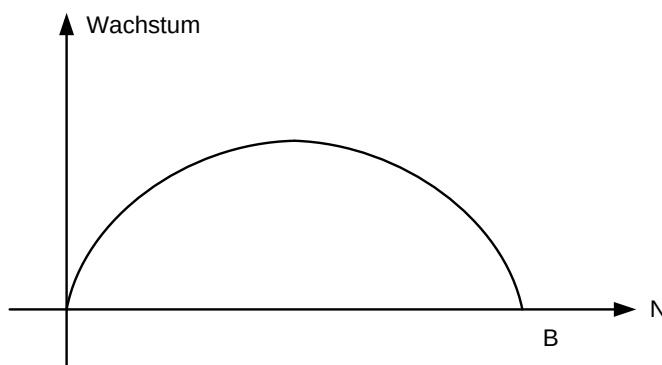
Im Modell 1 hatte man eine homogene DGL, nun eine inhomogene gewöhnliche DGL. Derartiges löst man durch Variation der Konstanten oder auch durch Trennung der Variablen.

Aufgabe 2:

Lösen Sie die DGL $\frac{dN(t)}{dt} = -k \cdot (N(t) - B)$ – wie in Beispiel 1 – durch Trennung der Variablen.

Bestätigen Sie Ihre Rechnung, indem Sie diese DGL wieder mit Ihrem CAS algebraisch lösen und grafisch darstellen.

Modell 3 – logistisches Wachstum



Das Wachstum steigt zunächst an und verlangsamt sich dann wieder bis es aufhört.

Das Zellwachstum hört auf, weil keine „Nahrung“ mehr vorhanden ist.

Dies ist eine Kombination der ersten beiden Modelle.

Es gilt nun:

$$k(N) = k \cdot N \cdot (B - N)$$

Zu lösen ist die DGL

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN(t)}{dt} = k \cdot N(t) \cdot (B - N(t)) \\ N(t = 0) = N_0 \end{array} \right. \text{ oder kürzer } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dN(t)}{dt} = k \cdot N \cdot (B - N) \\ N(t = 0) = N_0 \end{array} \right.$$

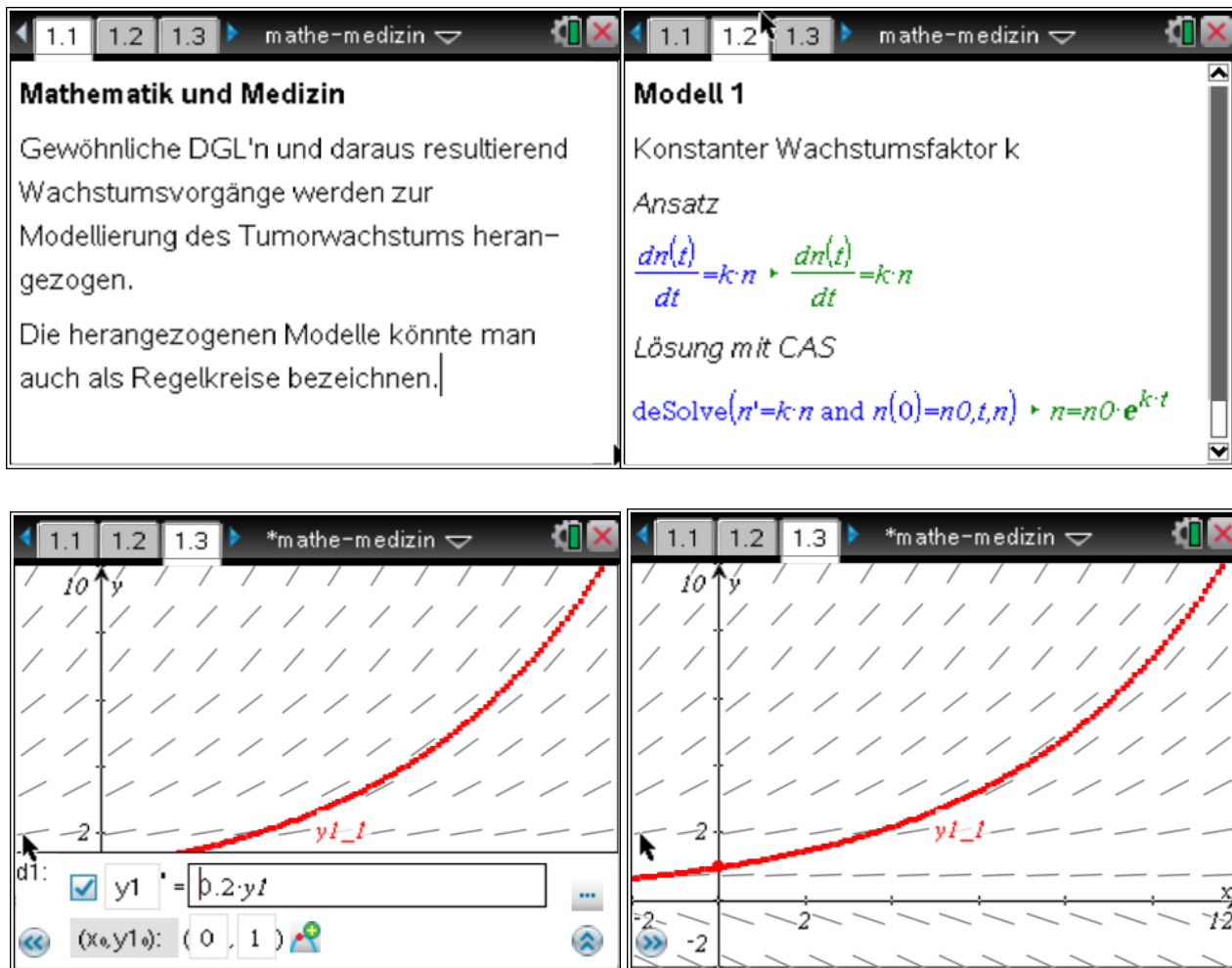
Die Lösung – hier nicht dargestellt – führt auf die logistische Gleichung.

$$N(t) = \frac{B \cdot N_0}{N_0 + (B - N_0) \cdot e^{-k \cdot B \cdot t}}$$

Aufgabe 3:

Zeigen Sie dies mit Ihrem CAS!

Lösung zu Aufgabe 1:



Syntax : siehe Bild 1.2 bzw. 1.3

$\text{Desolve}()$ im Calculator mit $\boxed{\text{menu}} - \boxed{4} - \boxed{\text{D}}$; der Grafiktyp wird eingestellt mit $\boxed{\text{menu}} - \boxed{3} - \boxed{6}$

Lösung zu Aufgabe 2:

$$\frac{dN(t)}{N(t) - B} = -k \cdot dt$$

$$\int \frac{dN(t)}{N(t) - B} = -k \cdot \int dt$$

$$\ln(N(t) - B) = -k \cdot t + C$$

$$N(t) - B = e^{-k \cdot t} \cdot e^C$$

$$N(t) = B + e^{-k \cdot t} \cdot e^C$$

$$e^C = N_0 - B$$

$$N(t) = B + (N_0 - B) \cdot e^{-k \cdot t}$$

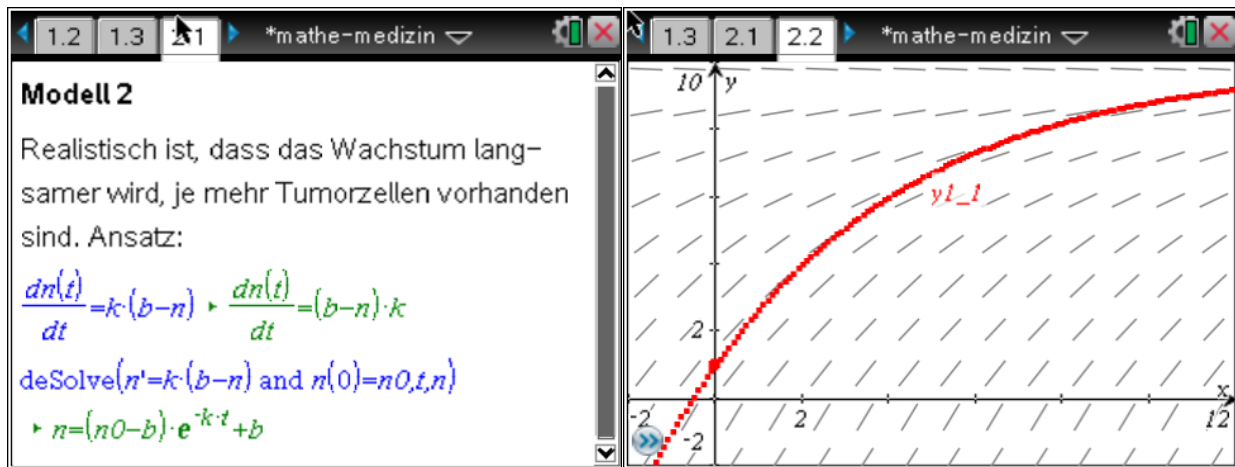
Mit der Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ folgt

Lösung mit CAS

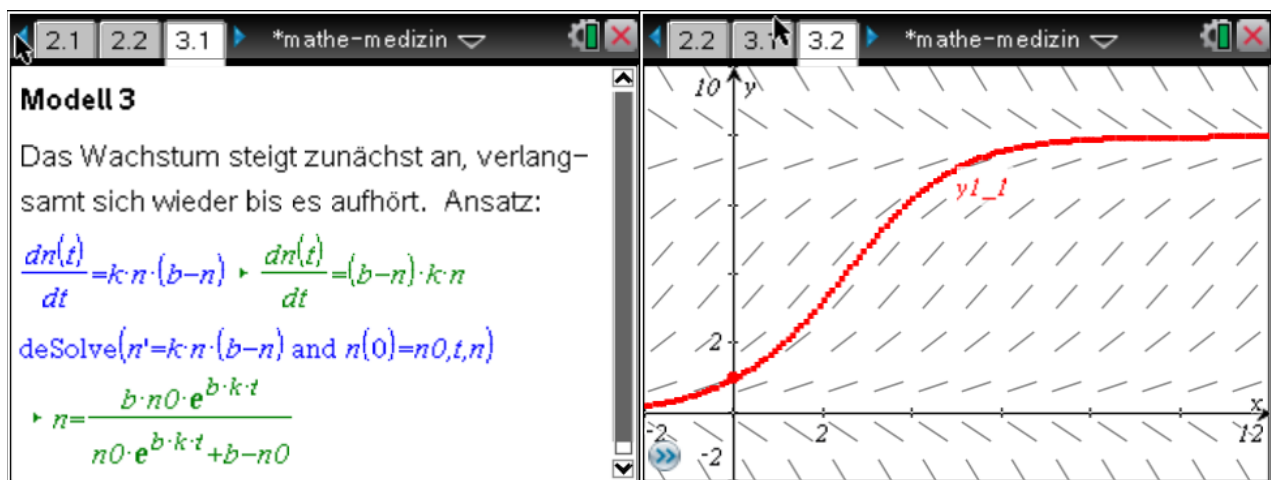
Die Eingabe in der Grafik lautet ($k = 0.2$, $B = 10$):

$$y_1' = 0.2 \cdot (10 - y_1)$$

$$(x_0, y_1)_0 : (0, 1)$$



Lösung zu Aufgabe 3:



Die Eingabe in der Grafik lautet ($k = 0.2$, $B = 10$):

$$y_1' = 0.2 \cdot y_1 \cdot (10 - y_1)$$

$$(x_0, y_1)_0 : (0, 1)$$

Die logistische Gleichung ist ein Modell für *avasculäres* Tumorwachstum. Das Problem ist, dass die Krebszellen bei Erreichen der Grenze B ein Molekül produzieren, das die Blutgefäße zum Tumorhaufen hinwachsen lassen.

Ist die Verbindung hergestellt, beginnt wieder *vasculäres* Wachstum.

Zwei Aufgaben für die Schule

Aufgabe 1

Gegeben ist eine Medikamentendosis $D = 10$ mg und eine Halbwertszeit $T = 12$ Stunden.

Wie verläuft die Medikamentenkonzentration M über mehrere Tage, wenn vorausgesetzt wird, dass bei der Einnahme zum Zeitpunkt $t = 0$ das Medikament seinen Wirkstoff sofort in voller Höhe abgibt.

- Erstellen Sie eine Tabelle unter der Maßgabe, dass alle 24 Std. eine Tablette eingenommen wird (Maximal- und Minimalwert) und stellen Sie die Wirkstoffkonzentration über einen Zeitraum von 10 Tagen grafisch dar!
- Führen Sie für die Maximalwerte eine geeignete Regression durch und geben sie eine Funktionsgleichung an.

Lösung mit CAS

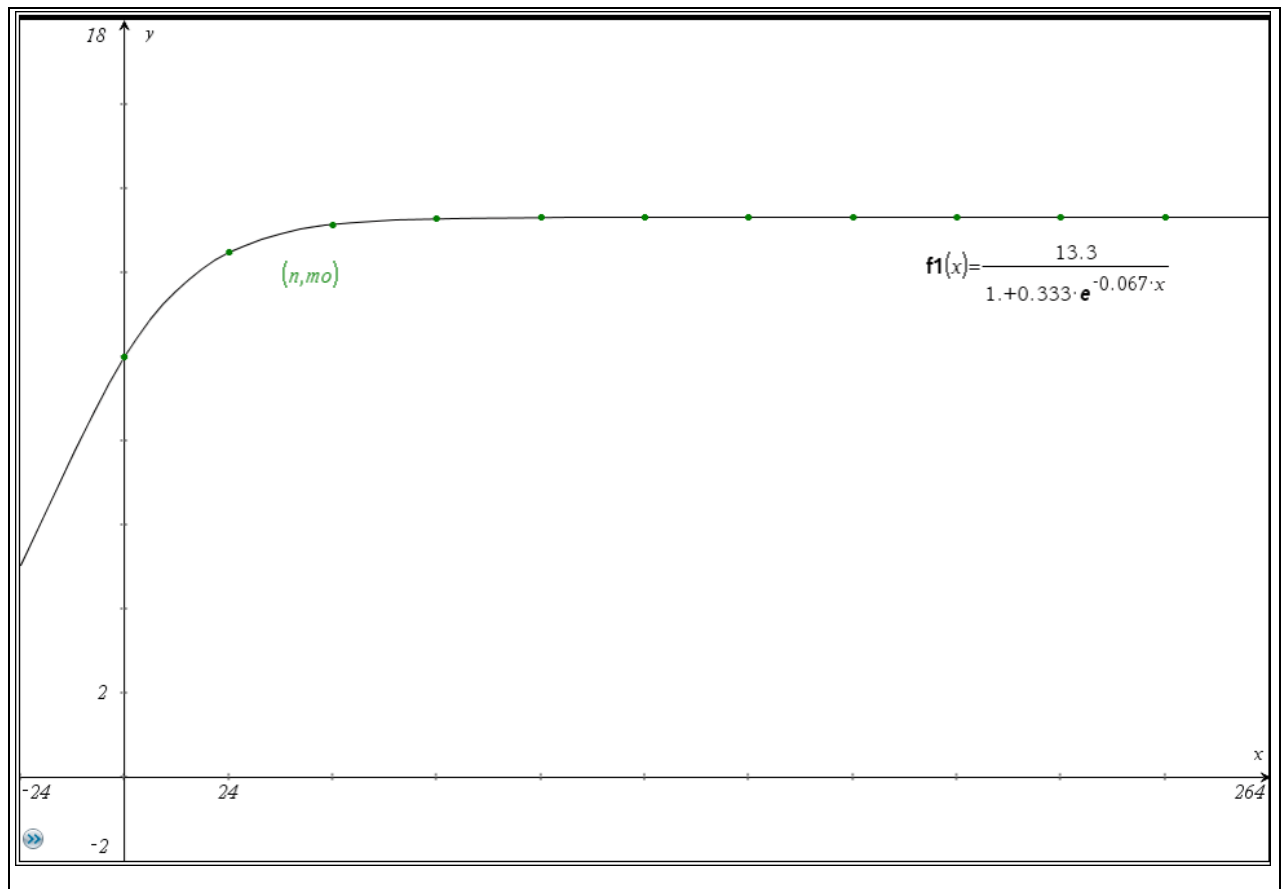
n	B _{mo}	C _{mu}	D	E	F	G	H	I
◆:seq(24*k,k,0,10)					=Logistic(n,mo,1): CopyVar S			
1	0	10.	0	Titel	Logistische Regression (d=0...			
2	24	12.5	2.5	RegEqn...	$c/(1+a \cdot e^{(-b \cdot x)})$			
3	48	13.125	3.125	a	0.332596379558			
4	72	13.28125	3.28125	b	0.066540419744			
5	96	13.3203125	3.3203125	c	13.3286768931			
6	120	13.330078125	3.330078125	Resid	{-0.00203594842526,0.0124...			
7	144	13.3325195313	3.33251953125					
8	168	13.3331298828	3.33312988281					
9	192	13.3332824707	3.3332824707					
10	216	13.3333206177	3.33332061768					
11	240	13.3333301544	3.33333015442					
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								

Benutzte, nicht sichtbare Formeln:

In Zelle B2: $=B1/4+10$ Dann wird wie bei Excel die Zelle „angefasst“ und nach unten gezogen.

In Zelle C2: $=B1/4$ Dann wird wie bei Excel die Zelle „angefasst“ und nach unten gezogen.

Die aus der Regression ermittelte Funktion und das Streudiagramm aus n und mo ist hier dargestellt.



Ohne Regression mit $f(x) = \frac{B \cdot N_0}{N_0 + (B - N_0) \cdot e^{-k \cdot B \cdot x}}$

ergibt sich für $B = 13.333$, $N_0 = 10$ und $f(24) = 12.5$ die Gleichung

$$12.5 = \frac{13.333 \cdot 10}{10 + 3.333 \cdot e^{-133.33 \cdot k}} \Rightarrow k \approx 0.067$$

Aufgabe 2

Ein Körper mit der Temperatur $T = 100\text{ °C}$ hat nach 20 min eine Temperatur von 60 °C . Die Umgebungstemperatur t_u beträgt 20 °C .

Wann hat der Körper eine Temperatur von 30 °C ?

Lösung

Prinzipieller Verlauf der Kurve

Ansatz:

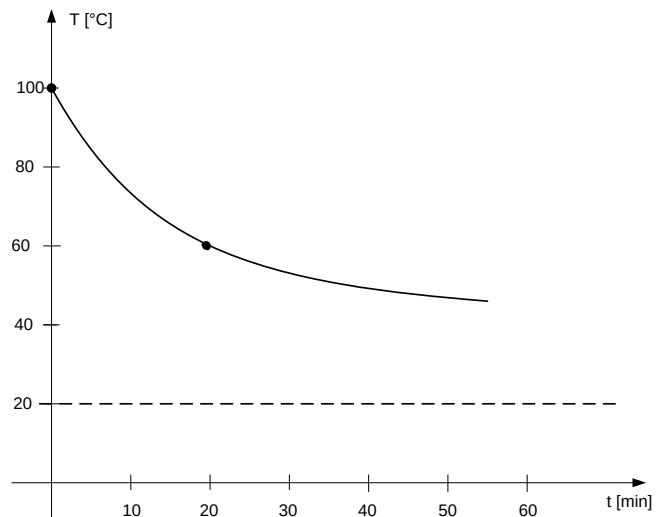
$$\frac{dT(t)}{dt} = -k \cdot (T - t_c) \quad k > 0$$

$$\frac{dT(t)}{T - 20} = -k dt$$

$$\ln(T - 20) = -k \cdot t + c$$

$$T - 20 = e^{-k \cdot t + c} = e^{-k \cdot t} \cdot e^c = C$$

$$T(t) = C \cdot e^{-k \cdot t} + 20$$



Bestimmung von C und k

$$T(0) = 100 \Rightarrow 100 = C \cdot e^0 + 20$$

$$80 = C$$

$$T(20) = 60 \Rightarrow 60 = 80 \cdot e^{-20k} + 20$$

$$\frac{1}{2} = e^{-20k}$$

$$k = \frac{\ln(2)}{20} \approx 0.03466$$

also

$$T(t) = 80 \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{20} \cdot t} + 20$$

Bestimmung von t für $T = 30\text{ °C}$

$$\left. \begin{array}{l} 0 = 80 \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{20} \cdot t} + 20 \\ 3\frac{1}{8} = e^{-\frac{\ln(2)}{20} \cdot t} \\ -\ln(8) = -\frac{\ln(2)}{20} \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow t = 60$$

II. Eine Abituraufgabe

Newton'sches Abkühlungsgesetz → Regression / DGL

Bei der Herstellung von Werkstücken in der Metallbearbeitung finden Stähle Verwendung, die über bestimmte Werkstoffeigenschaften verfügen müssen. Diese Eigenschaften können unter anderem durch Wärmebehandlung gezielt beeinflusst werden. Folgende Wärmebehandlungen sollen zum Einsatz kommen:

1. Erwärmung auf eine bestimmte Anfangstemperatur.
2. Abschreckung (schnelle Abkühlung in einem Ölbad zur Steigerung der Härte).

Untersucht werden soll die Wärmebehandlung einer Hülse, die vor Beginn der Wärmebehandlung Umgebungstemperatur aufweist.



- a) Während der Erwärmung der Hülse in einem Ofen, der eine Temperatur von $\vartheta = 1000$ Grad Celsius ($^{\circ}\text{C}$) aufweist, werden zu bestimmten Zeiten die folgenden Stahltemperaturen gemessen:

t in Sekunden [s]	100	200	400	800	1000	1500
δ in $^{\circ}\text{C}$	237	406	640	867	920	977

Zur Veranschaulichung soll der Erwärmungsprozess visualisiert werden.

Skizzieren Sie den Temperaturverlauf mithilfe der Messwerte in ein geeignetes Koordinatensystem.

Beschreiben Sie die Art des Temperaturanstiegs.

Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung mittels geeigneter exponentieller Regression, mit der sich der Temperaturanstieg beschreiben lässt, und dokumentieren Sie dabei die Lösungsschritte.

- b) Für die Beschreibung der Erwärmung gilt nun folgender funktionaler Zusammenhang

$$\delta(t) = 1000 - 980 \cdot e^{-0.0025t}$$

Berechnen Sie die Umgebungstemperatur, ab der der Erwärmungsprozess beginnt.

Für den anschließenden Abschreckvorgang der Hülse ist eine Anfangstemperatur von $\delta_A = 800^{\circ}\text{C}$ erforderlich.

Untersuchen Sie, wie viele Hülsen im Ofen pro Stunde erwärmt werden können.

Für die vollständige Durchwärmung der Hülse darf die Temperaturänderung am Ende des Erwärmungsprozesses nicht mehr als $v_{\delta} = 0.6 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{s}}$ betragen.

Prüfen Sie, ob diese Vorgabe bei $\delta_A = 800^{\circ}\text{C}$ eingehalten wird.

In den folgenden Aufgabenteilen wird von einer Anfangstemperatur von $\delta_A = 800^\circ\text{C}$ und einer Ölbadtemperatur von $\delta_U = 20^\circ\text{C}$ ausgegangen.

- c) Die Hülse wird nach der Erwärmung in einem Ölbad von ϑ_A auf ϑ_U abgeschreckt. Der Abkühlungsprozess kann beschrieben werden mithilfe einer Funktionsschar ϑ_k mit $\delta_k(t) = \delta_U + (\delta_A - \delta_U) \cdot e^{-k \cdot t}$ (Newtonsches Abkühlungsgesetz), wobei der Parameter k vom verwendeten Öl abhängt.

Es gilt: t : Zeit in s
 $\delta(t)$: Temperatur in $^\circ\text{C}$ zum Zeitpunkt t
 k : Abkühlungskoeffizient in $\frac{1}{s}$

Beschreiben Sie den Einfluss der Parameter ϑ_U , ϑ_A und k auf den Verlauf des Graphen von ϑ_k .

Ermitteln Sie die Gleichung der Funktionsschar, die den Abschreckvorgang beschreibt. Der Abschreckvorgang bis zu einer Temperatur von 50°C soll genau 80s dauern. Berechnen Sie zur Auswahl eines geeigneten Öls den Abkühlungskoeffizienten k .

- d) Das Newtonsche Abkühlungsgesetz ist die Lösungsfunktion der Differenzialgleichung (DGL) $\delta'(t) = -k \cdot (\delta(t) - \delta_U)$.

Weisen Sie nach, dass die Funktionenschar $\delta_k(t) = \delta_U + (\delta_A - \delta_U) \cdot e^{-k \cdot t}$ eine Lösung der DGL ist.

Die in der Hülse während der Erwärmung gespeicherte Wärmeenergie berechnet sich mit der Gleichung $Q = m \cdot C \cdot \Delta\delta$

Es gilt: Q : Wärmemenge in KJ (kJ)
 m : Masse des Werkzeugs in Kilogramm (kg) $m_{St} = 0.5 \text{ kg}$
 $\Delta\delta$: Temperaturänderung in Kelvin (K)
 C : Spezifische Wärmekapazität in $\left(\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}\right)$ $C_{St} = 0.47 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

Während der Abschreckung auf Umgebungstemperatur wird die durch die Erwärmung in der Hülse gespeicherte Wärmeenergie Q auf das Ölbad übertragen. Das Öl muss gekühlt werden, wenn die abgegebene Wärmeenergie pro Hülse mehr als 200 kJ beträgt. Entscheiden Sie, ob das Öl gekühlt werden muss.

Die Wärmeenergie lässt sich andererseits auch als Fläche unter der Abkühlungskurve interpretieren.

Dann gilt: $Q(t) = A \cdot \int_0^{t_{ab}} (\delta_k(t) - \delta_U(t)) dt$, mit $\delta_{0,0407}(t) = 20 + 780 \cdot e^{-0,0407 \cdot t}$

Weisen Sie nach, dass für die Hülse der Koeffizient $A = 0,00956 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ gilt und

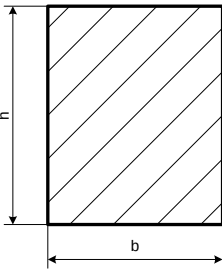
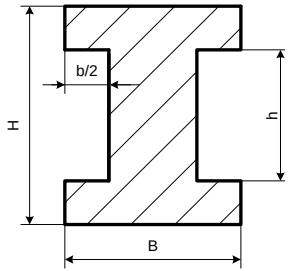
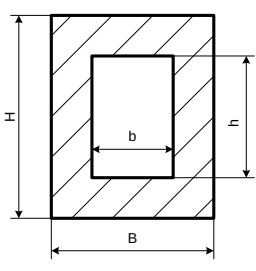
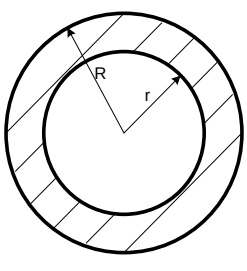
dokumentieren Sie einen Rechenweg, der auch ohne den Einsatz eines CAS nachvollziehbar ist. Berechnen Sie die Wärmeenergie, die in den ersten 50 s übertragen wird.

Biegelinien

Eine – unvollständige – Übersicht

Durchbiegung von Trägern unter senkrechter Belastung $E_{\text{stahl}} = 210 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ $E_{\text{holz}} = 9 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Durchbiegung (Biegelinie)	$w(x) = \int w'(x) dx$	w in [m]
	Steigung	$w'(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int M(x) dx$	w'(x) ohne Einheit
	Moment	$w''(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (-M(x))$	M in [Nm]
	Querkraft	$w'''(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (-Q(x))$	Q in [N]
	Streckenlast	$w''''(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot q(x)$	q in $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$
	Flächenträgheitsmoment		I in [m ⁴]
	Elastizitätsmodul		E in $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$
Lagerungsbedingungen	Festeinspannung	$w(x_{\text{fest}}) = 0$ $w'(x_{\text{fest}}) = 0$	
	Auflager	$w(x_{\text{Lager}}) = 0$ $w''(x_{\text{Lager}}) = 0$	

Der **Elastizitätsmodul E** ist diejenige Kenngröße, welche die Biegsamkeit des Materials beinhaltet.

Rechteckträger	Doppel-T-Träger	Kastenprofil	Kreisringprofil
			
$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$	$I = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{12}$	$I = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{12}$	$I = \frac{\pi}{4} \cdot (R^4 - r^4)$

Das **Flächenträgheitsmoment I** ist die Kenngröße, die den Widerstand gegen Durchbiegung darstellt. Dieser Widerstand wird durch die Form des Trägers bestimmt.

$E \cdot I$ wird als **Biegesteifigkeit** bezeichnet.

Zwei mögliche Problemstellungen

1. Durchbiegung und System sind vorhanden

Ansatz:

$$w(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0)$$

$$w'(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (4 \cdot a_4 \cdot x^3 + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1)$$

$$w''(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (12 \cdot a_4 \cdot x^2 + 6 \cdot a_3 \cdot x + 2 \cdot a_2)$$

$$w'''(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (24 \cdot a_4 \cdot x + 6 \cdot a_3)$$

$$w^{IV}(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot 24 \cdot a_4$$

- Gegebene Eigenschaften auswerten, Gleichungssystem aufstellen und lösen
- Maximales Moment durch Ableiten ermitteln
- Spannung ausrechnen und mit der zulässigen Spannung vergleichen
- Maximale Querkraft berechnen
- Auflagerkräfte berechnen

2. Streckenlast $q(x)$ und System sind gegeben

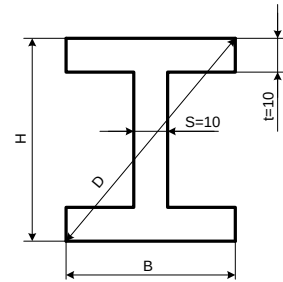
- Streckenlastfunktion 4-mal integrieren und Integrationskonstanten einfügen
- Randbedingungen für das System aufstellen
- Integrationskonstanten ermitteln und Biegelinienfunktion aufstellen
- Maximales Moment durch Ableiten ermitteln
- Spannung ausrechnen und mit der zulässigen Spannung gleichsetzen und das Flächenträgheitsmoment ausrechnen
- Aus dem Flächenträgheitsmoment auf die Maße des Trägers schließen
- Tatsächliche maximale Spannung berechnen
- Maximales Moment berechnen
- Maximale Querkraft berechnen
- Auflagerkräfte berechnen
- Grafische Darstellung

Aufgabe 1:

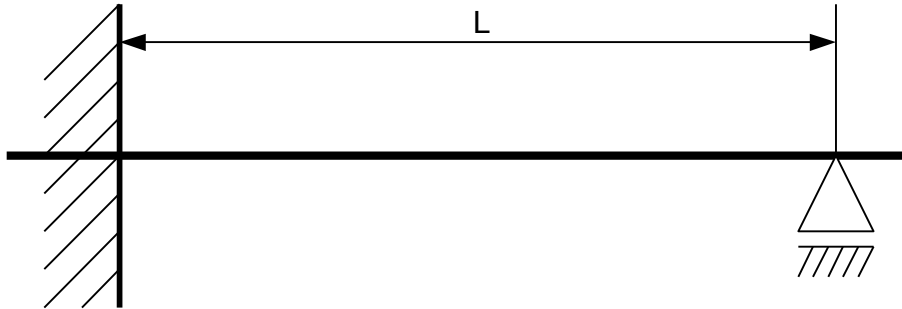
- a) Ein Doppel-T-Träger mit den angegebenen Maßen soll so ausgelegt werden, dass sich ein Träger bei Belastung möglichst wenig durchbiegt.

Für D gilt: $D = 100 \cdot \sqrt{5}$

Maße in [mm]



- b) Im Bild ist dargestellt ein Stab (Balken, Welle) der Länge L_1 , der linksseitig fest eingespannt ist und rechtsseitig lose aufliegt [Lagerabstand $L < L_1$].



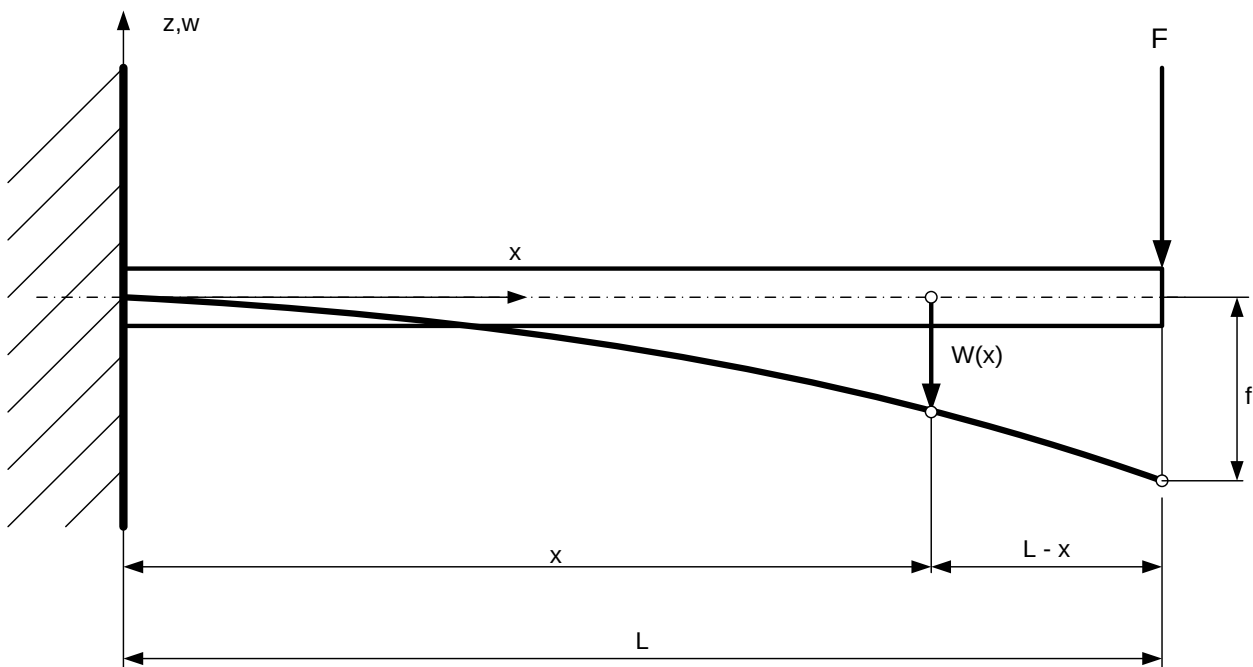
Dieser Stab wird mit einem freibeweglichen Gewicht belastet. Seine maximale Durchbiegung betrage $b = \frac{1}{4} \cdot L$

- Skizzieren Sie in der vorgegebenen Zeichnung den ungefähren Verlauf der Biegelinie!
- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Biegelinie! Gehen Sie in diesem Fall von einer Funktion 3. Grades aus und vernachlässigen Sie die zweite Bedingung für Auflager.
- Ermitteln Sie die Koordinate x_2 , an der die maximale Durchbiegung auftritt!
- Stellen Sie die Gleichung der Tangente im Loslager auf!
- An welcher Stelle des Intervalls $]0;L[$ befindet sich der Wendepunkt der Biegelinie?

Aufgabe 2:

Teil A

Eine Ampelanlage wird an einem Träger befestigt. Die Ampel hat eine Masse von 25 kg. Der Träger besteht aus Stahl [$E = 210 \text{ kN/mm}^2$], hat ein rundes Hohlprofil mit $D = 10 \text{ cm}$ und $d = 9 \text{ cm}$. $\left[I = \frac{\pi}{4} \cdot (D^4 - d^4) \right]$ bei einer Länge von $L = 3 \text{ m}$. Das Eigengewicht des Trägers wird nicht berücksichtigt.



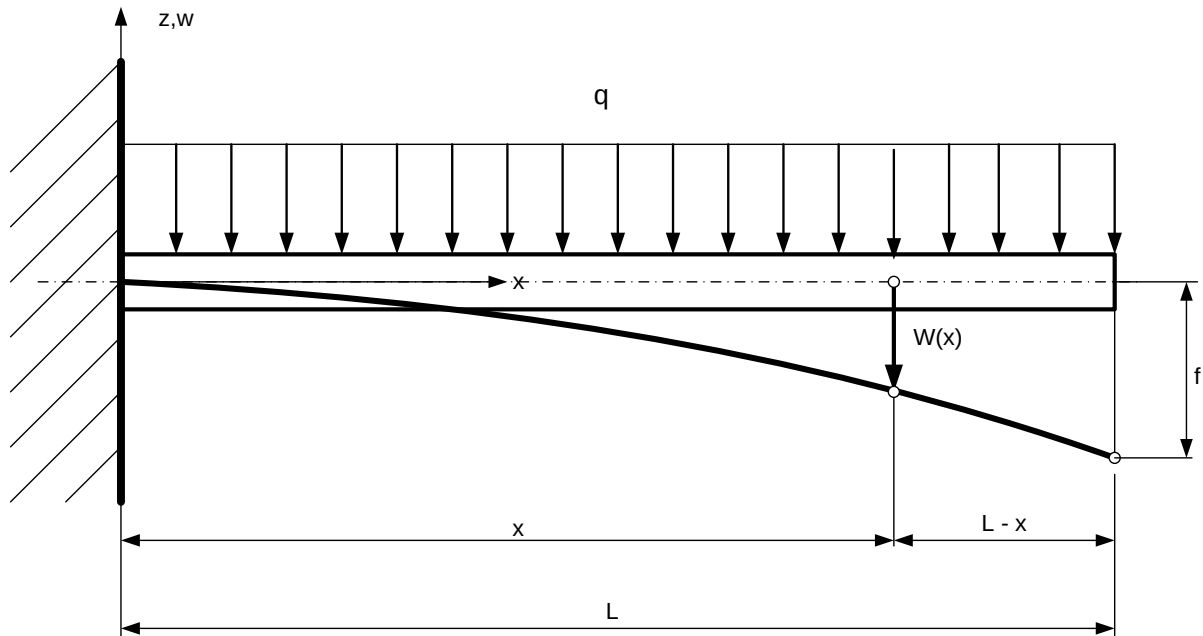
- a) Für die an beliebiger Stelle x eingezeichnete Durchbiegung $w(x)$ gilt das Moment $M(x) = F \cdot (L - x)$. Zeigen Sie durch zweimalige Integration und unter Berücksichtigung der Randbedingungen, dass sich die Biegelinie $w(x)$ in allgemeiner Form darstellen lässt durch

$$w(x) = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3 \right) = -\frac{F \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]$$

- b) Berechnen Sie für die angegebenen Zahlen die maximale Durchbiegung f in [mm]! Achtung: Einheiten beachten

Teil B

Nun soll eine Markise neu entwickelt werden. Dazu wird das Eigengewicht des Trägers als entscheidende Größe angenommen. Da Markisen bei schönem Wetter verwendet werden, geht man davon aus, dass keine weiteren Belastungen in vertikaler Richtung auftreten. Die Rechteckträger der Markise werden in der Wand fest verschraubt – Zeichnung siehe unten.



Werte: $L = 3\text{ m}$; $b = 3\text{ cm}$; $h = 8\text{ cm}$; $q = 0.1\text{ kN/m}$

- c) Begründen Sie, warum in diesem Fall das Moment $M(x)$ dargestellt werden kann durch

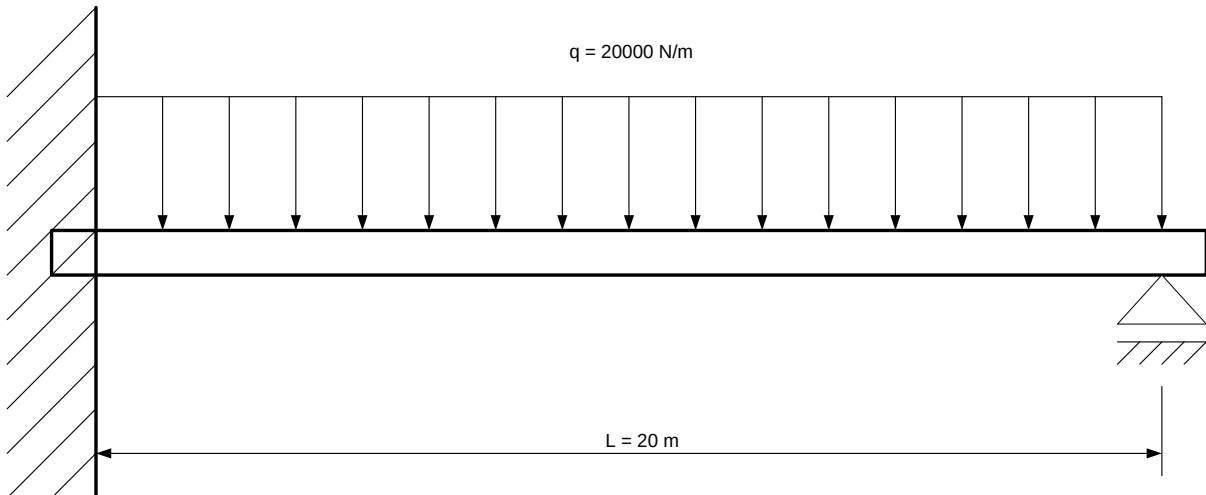
$$M(x) = \frac{q}{2} \cdot (L - x)^2 !$$

- d) Zeigen Sie wiederum durch zweimalige Integration und unter Berücksichtigung der Randbedingungen, dass sich die Biegelinie $w(x)$ darstellen lässt durch

$$w(x) = -\frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I} \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right)$$

- e) Berechnen Sie die maximale Durchbiegung für die angegebenen Werte und stellen Sie beide Biegelinien grafisch dar!

Aufgabe 3 - Eine mögliche Abituraufgabe:



Ein linksseitig fest eingespannter, rechts aufliegender 20 m langer Rechteckträger wird mit einer konstant angenommenen Streckenlast von 20 kN/m belastet.

Die Form der Durchbiegung ist bei gegebener Streckenlast eine Funktion 4. Grades der

Form $w(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0)$

Die maximal zulässige Biegespannung beträgt

$$\sigma_{zul} = 1.4 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Die tatsächliche Spannung ist abhängig vom maximalen Moment $M_{\max}$, der Höhe h des Balkens und des Flächenträgheitsmoments zu

$$\sigma = \frac{M_{\max} \cdot h}{2 \cdot I}$$

a) Zeigen Sie, dass für einen Rechteckträger das Verhältnis $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{3}}{1}$ sein muss, damit das Flächenträgheitsmoment maximal ist. Zeichnen Sie dazu in einen Kreis mit Radius r ein Rechteck mit den Maßen b und h ein!

b) Stellen Sie die Bedingungen zusammen, die die Biegelinie $w(x)$ erfüllen muss, um die oben angegebene Streckenlast auszuhalten. Lösen Sie das entstehende Gleichungssystem und verwenden Sie E und I zunächst als Parameter.

Zwischenergebnis: $w(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{2500}{3} (x^4 - 50 \cdot x^3 + 600 \cdot x^2)$

c) Berechnen Sie aus $w'''(x)$ (siehe Tabelle; warum w''' ?) das maximale Moment $M_{\max}$. Überprüfen Sie das Maximum!

d) Nutzen Sie nun die drei markierten Gleichungen, um den Balken zu dimensionieren!

Lösungen

Aufgabe 1a)

Es gilt für $w(x)$:

$w(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0)$. Die Durchbiegung ist also am geringsten, wenn das Flächenträgheitsmoment möglichst groß ist. Es genügt also, $I(B, H)$ zu maximieren.

$$I(B, H) = \frac{1}{12} \cdot (B \cdot H^3 - b \cdot h^3)$$

$$I(B, H) = \frac{1}{12} \cdot (B \cdot H^3 - (B - 10) \cdot (H - 20)^3)$$

Mit der Nebenbedingung $D^2 = B^2 + H^2$ ergibt sich für B : $B = \sqrt{50000 - H^2}$

Das zu maximierende Flächenträgheitsmoment ergibt sich also aus der Funktion

$$I(H) = \frac{1}{12} \cdot \left(\sqrt{5000 - H^2} \cdot H^3 - (\sqrt{5000 - H^2} - 1) \cdot (H - 2)^3 \right) \text{ mit } 0 < H < 10 \cdot \sqrt{5}$$

Beachte → das Flächenträgheitsmoment hat die Einheit $[\text{cm}^4]$!

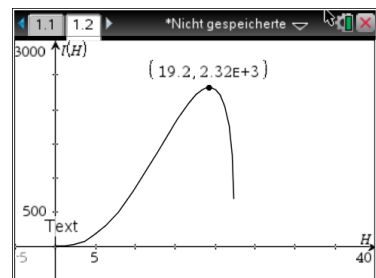
$$I'(H) = \frac{3 \cdot (H - 2)^2 \cdot \sqrt{5000 - H^2} - 2 \cdot (9 \cdot H^3 - 12 \cdot H^2 - 2996 \cdot H - 3000)}{12 \cdot \sqrt{5000 - H^2}}$$

Lösung der Ableitung mittels CAS oder aus der Grafik; ergibt sich:

$$H = 19.25 \text{ cm}$$

$$B = 11.38 \text{ cm}$$

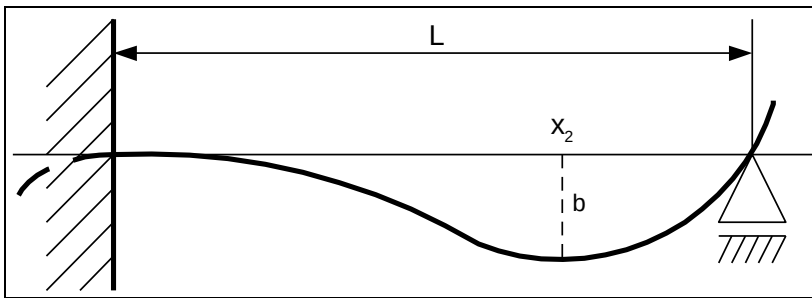
$$I = 2324 \text{ cm}^4$$



es

Ein genormter Doppel-T-Träger IPE200 nach DIN1025-5 hat die Maße $H = 200$ $B = 100$ $s = 5.6$ $t = 8.5$ und $r = 12$ (Maße in mm), wobei r der Rundungsradius zwischen Steg und Flansch ist.

Aufgabe 1b)



Wie aus der Darstellung zu ersehen ist, handelt es sich hierbei wohl um eine ganzrationale Funktion 3. Grades der Form

$$f : y = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$\text{mit } x \in [0; L_1]$$

$$\text{und } f(0) = 0 \text{ und } f'(0) = 0$$

Es genügt also, folgende Funktion $f(x)$ und ihre Ableitung zu betrachten:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 \\ f'(x) &= 3a_3 \cdot x^2 + 2a_2 \cdot x \end{aligned}$$

Weitere Eigenschaften sind:

$$\left. \begin{aligned} f(x_2) &= -b \Rightarrow -b = a_3 \cdot x_2^3 + a_2 \cdot x_2^2 \\ f'(x_2) &= 0 \Rightarrow 0 = 3a_3 \cdot x_2^2 + 2a_2 \cdot x_2 \\ f(L) &= 0 \Rightarrow 0 = a_3 \cdot L^3 + a_2 \cdot L^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_2 &= -\frac{2a_2}{3a_3} \\ a_2 &= -a_3 \cdot L \end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{2}{3} \cdot L$$

Setzt man in

$a_3 \cdot x_2^3 + a_2 \cdot x_2^2 = -b$ für $a_2 = -a_3 \cdot L$ und für $x_2 = \frac{2}{3} \cdot L$ ein, erhält man eine Bestimmungsgleichung für a_3 .

$$\left. \begin{aligned} a_3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot L\right)^3 + (-a_3 \cdot L) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot L\right)^2 &= -b \\ \frac{8}{27} \cdot L^3 \cdot a_3 - \frac{4}{9} \cdot L^3 \cdot a_3 &= -b \\ -\frac{4}{27} \cdot L^3 \cdot a_3 &= -b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_3 &= \frac{27 \cdot b}{4 \cdot L^3} \\ a_2 &= -\frac{27 \cdot b}{4 \cdot L^2} \end{aligned}$$

Mit $b = \frac{1}{4} \cdot L$ ergibt sich daraus die

Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{27 \cdot L}{16} \cdot \left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right]$$

$$f'(x) = \frac{27 \cdot L}{16} \cdot \left[\frac{3 \cdot x^2}{L^3} - \frac{2 \cdot x}{L^2} \right] \Rightarrow f'(L) = \frac{27 \cdot L}{16} \cdot \left[\frac{3 \cdot L^2}{L^3} - \frac{2 \cdot L}{L^2} \right]$$

Unabhängig von L ergibt sich im Loslager die Steigung

$$f'(L) = \frac{27}{16}$$

$$f''(x) = \frac{27 \cdot L}{16} \cdot \left[\frac{6 \cdot x}{L^3} - \frac{2}{L^2} \right] \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6 \cdot x}{L^3} - \frac{2}{L^2} = 0$$

$$x_w = \frac{1}{3} \cdot L \quad y_w = -\frac{1}{8} \cdot L$$

Lösungen zu Aufgabe 2 Teil A

Moment: $M(x) = F \cdot (L - x) \quad w''(x) = -\frac{F \cdot (L - x)}{E \cdot I}$

Steigung $w'(x) = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot \int (L - x) dx \Rightarrow w'(x) = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot \left(L \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 \right) + C_1$
 $w'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

Also: $\boxed{w'(x) = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot \left(L \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 \right)}$

Durchbiegung $w(x) = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot \int \left(L \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 \right) dx = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3 \right) + C_2$
 $w(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

Also $\boxed{w(x) = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3 \right) = -\frac{F \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]}$

$$f = w(L) = -\frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} = -\frac{0.250 [\text{kN}] \cdot 27000000000 [\text{mm}^3]}{3 \cdot 210 [\text{kN/mm}^2] \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (50^4 [\text{mm}^4] - 45^4 [\text{mm}^4])} \approx -6.35 \text{ mm}$$

Lösungen zu Aufgabe 2 Teil B

Lösung: Im Abschnitt L-x errechnet sich die gesamte Belastung zu $F = q \cdot (L - x)$.
 Diese wird als Einzelkraft angesetzt in der Mitte dieses Abschnitts, so dass sich für das Moment folgender Ansatz ergibt:

Moment: $M(x) = \frac{q}{2} \cdot (L - x)^2 \quad w''(x) = -\frac{q \cdot (L - x)^2}{2 \cdot E \cdot I}$

$w'(x) = -\frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(L^2 \cdot x - L \cdot x^2 + \frac{x^3}{3} \right)$ Steigung:

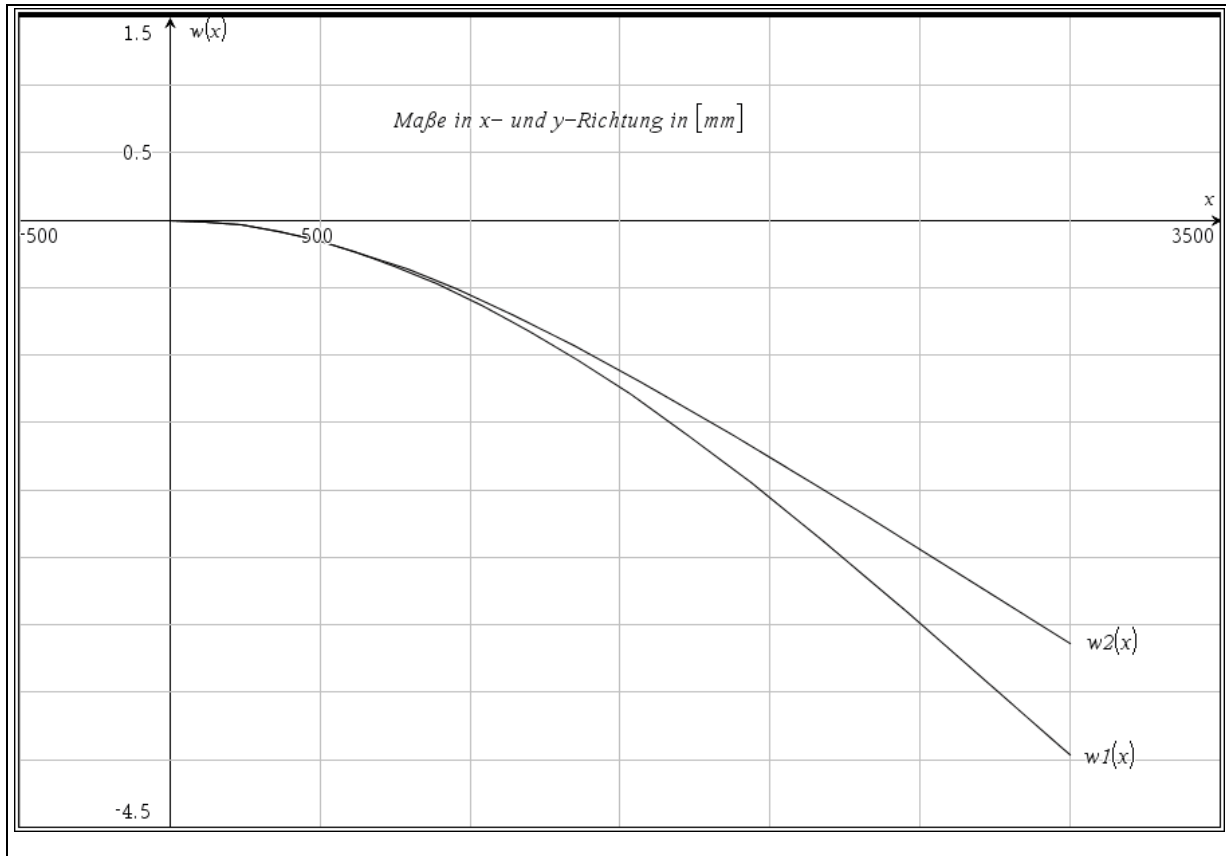
Durchbiegung: $w(x) = -\frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(L^2 \cdot \frac{x^2}{2} - L \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right)$

Also $\boxed{w(x) = -\frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I} \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right)}$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 entfallen wieder wegen $w'(0) = w(0) = 0$.

$$f = w(L) = -\frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I} = -\frac{0.0001 [\text{kN/mm}] \cdot 8100000000000 [\text{mm}^4]}{8 \cdot 210 [\text{kN/mm}^2] \cdot \frac{1}{12} \cdot (30 [\text{mm}] \cdot 512000 [\text{mm}^3])} \approx -3.77 \text{ mm}$$

Grafische Darstellung der Biegelinien



Lösungen zur Abituraufgabe

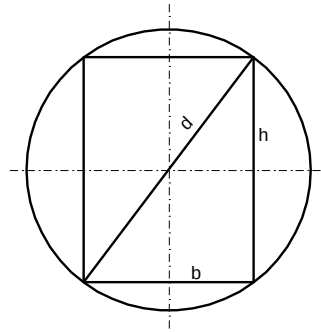
Teilaufgabe a)

$$I(b,h) = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$d^2 = b^2 + h^2 \Rightarrow b = \sqrt{d^2 - h^2}$$

$$I(h) = \frac{\sqrt{d^2 - h^2} \cdot h^3}{12}$$

$$I'(h) = \frac{h^2 \cdot \sqrt{d^2 - h^2}}{4} - \frac{h^4}{12 \cdot \sqrt{d^2 - h^2}}$$



Zu lösen ist die Gleichung $I'(h)=0$; dies ergibt:

$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{d}{2} \cdot \sqrt{3} \\ b = \frac{d}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{h}{b} = \sqrt{3} \text{ Dies war zu zeigen!}$$

Teilaufgabe b)

Bedingungen für die Biegelinie / Gleichungssystem

$$w(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0)$$

$$w'(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (4 \cdot a_4 \cdot x^3 + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1)$$

$$w''(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (12 \cdot a_4 \cdot x^2 + 6 \cdot a_3 \cdot x + 2 \cdot a_2)$$

$$w'''(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (24 \cdot a_4 \cdot x + 6 \cdot a_3)$$

$$w^{IV}(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \underbrace{24 \cdot a_4}_{=q(x)}$$

Gegeben

$$w(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{E \cdot I} \cdot a_0$$

$$w(20) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (160000 \cdot a_4 + 8000 \cdot a_3 + 400 \cdot a_2 + 20 \cdot a_1 + a_0)$$

$$w'(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{E \cdot I} \cdot a_1$$

$$w''(20) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (4800 \cdot a_4 + 120 \cdot a_3 + 2 \cdot a_2)$$

$$24 \cdot a_4 = 20000 \Rightarrow \frac{2500}{3} = a_4$$

Lösung des LGS

$$a_4 = \frac{2500}{3} \quad a_3 = -\frac{125000}{3} \quad a_2 = 500000$$

$$w(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{2500}{3} \cdot (x^4 - 50 \cdot x^3 + 600 \cdot x)$$

Teilaufgabe c)

Bestimmung von $M_{\max}$

Um $M_{\max}$ zu bestimmen, muss $w'''(x)$ Null werden. Auf eine Überprüfung mit der 4. Ableitung wird hier verzichtet.

$$\left. \begin{aligned} w'(x) &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{2500}{3} \cdot (4 \cdot x^3 - 150 \cdot x^2 + 1200 \cdot x) \\ w''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{2500}{3} \cdot (12 \cdot x^2 - 300 \cdot x + 1200) \\ w'''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{2500}{3} \cdot (24 \cdot x - 300) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 12.5$$

$$\left. \begin{aligned} w''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot (-M(x)) \\ w''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{2500}{3} \cdot \underbrace{(12 \cdot x^2 - 300 \cdot x + 1200)}_{-M(x)} \\ -M(12.5) &= \frac{2500}{3} \cdot (12 \cdot 12.5^2 - 300 \cdot 12.5 + 1200) \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_{\max} = M(12.5) = 562500$$

Teilaufgabe d)

Berechnung der Balkenabmessungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zul} > \sigma &= \frac{M_{\max} \cdot h}{2 \cdot I} \\ \sigma_{zul} > \sigma &= \frac{562500 \cdot h}{2 \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} \\ \sigma_{zul} > \sigma &= \frac{3375000}{b \cdot h^2} \\ \sigma_{zul} > \sigma &= \frac{3375000}{3b^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow b^3 > \frac{1125000}{\sigma_{zul}}$$

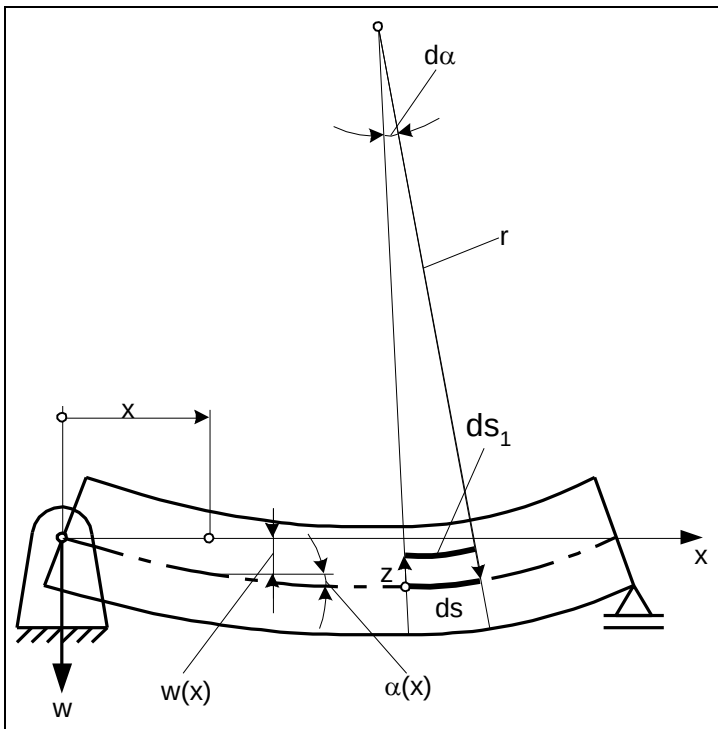
Daraus folgt: $b > 0.446 \text{ m}$

$h > 0.774 \text{ m}$

Gewählt: $b = 50 \text{ cm}$

$h = 80 \text{ cm}$

Für Interessierte – Die Herleitung der DGL der Biegelinie



Nimmt man das Ebenbleiben des Querschnittes an, dann gilt für die Dehnung ε gemäß nebenstehendem Bild:

$$(1.1) \quad \varepsilon = \frac{ds_1 - ds}{ds} = \frac{(r - z) \cdot d\alpha - r \cdot d\alpha}{r \cdot d\alpha} = -\frac{z}{r}$$

Mit dem Hook'schen Gesetz

$$(1.2) \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

sowie der Gleichung

$$(1.3) \quad \sigma = \frac{M_b}{I_y} \cdot z$$

erhält man für die Krümmung k

$$(1.4) \quad k = \frac{1}{r} = -\frac{M_b(x)}{E \cdot I_y(x)}$$

d. h. die Krümmung ist proportional

dem Biegemoment $M_b(x)$ und umgekehrt proportional zur Biegesteifigkeit $E \cdot I_y(x)$.

Mit der Krümmungsformel einer Kurve

$$(1.5) \quad k = \frac{d\alpha}{ds} = \pm \frac{w''(x)}{(1 + w'^2(x))^{\frac{3}{2}}}$$

folgt aus Gleichung 1.4 die Differentialgleichung der

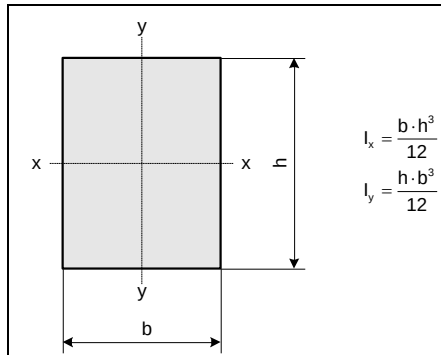
Balkenachse

$$(1.6) \quad \frac{w''(x)}{(1 + w'^2(x))^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M_b(x)}{E \cdot I_y(x)}$$

Für kleine Durchbiegungen, d. h. $w'^2(x) \ll 1$ und für ein konstantes axiales Flächenmoment 2. Grades $I_y(x) = I_0$ folgt dann die linearisierte DGL:

$$w''(x) = -\frac{M_b(x)}{E \cdot I_0}$$

Begriffserläuterungen



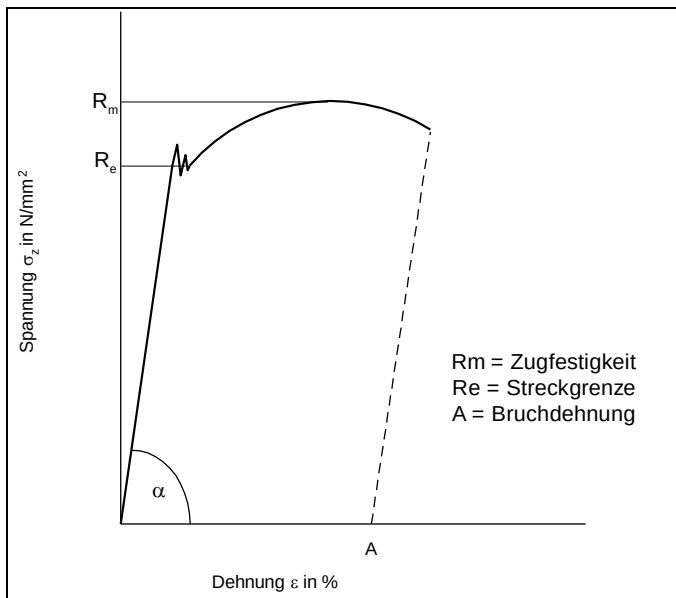
Bei der Berechnung des **Flächenmoments**

[Flächenträgheitsmoments] bezieht man sich immer auf eine Achse, die Biegeachse.

Wird jedes Flächenteilchen ΔA mit dem Quadrat seines Abstands z zur Biegeachse multipliziert, dann erhält man durch die Summe dieser Produkte das axiale Trägheitsmoment I mit der Einheit mm^4 .

Als Beispiel ist ein Rechteckträger angegeben, dessen Trägheitsmoment I_x sehr viel größer ist als I_y .

Für viele Trägerformen liest man die Trägheitsmomente aus Tabellen ab.



Der **Elastizitätsmodul E** ist eine Proportionalitätskonstante.

In dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm gibt es einen Bereich, in dem der Zusammenhang zwischen Spannung σ [hervorgerufen durch eine Kraft, die auf eine Querschnittsfläche wirkt] und Dehnung ε praktisch linear verläuft, die sogenannte *Hookesche Gerade*.

Bei Zugentlastung ist die Dehnung also umkehrbar.

In Analogie zum Federgesetz $K = c \cdot F$ gilt hier $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Für alle Stahlsorten beträgt diese Proportionalitätskonstante etwa 210

kN/mm^2 , für Aluminiumlegierungen ungefähr 70 kN/mm^2 .

Sie ist gleich dem Tangens des Neigungswinkels α des σ - ε -Diagramms im unteren Belastungsbereich.

Materialstärken herkömmlicher Verbrauchsgüter

Vorbemerkung

Toilettenpapier und „Küchenhelfer“ wie Haushaltsrollen, Frischhaltefolie und Alufolie haben eines gemeinsam: sie sind aufgewickelt auf Papprollen unterschiedlichen Durchmessers d_1 , bestehen aus Material unterschiedlicher Länge L - z. T. mit Perforation und der Angabe der Blattzahl m und der Blattlänge L_1 - und erzeugen damit angenähert eine zylindrische Form mit einem bestimmten Außendurchmesser d_2 . Aus diesen Angaben lässt sich die Wicklungszahl n und die Materialstärke t dieser verschiedenen Verbrauchsgüter durch einige Formeln bestimmen.



Aufgabe

Aus den Angaben auf den Materialien und mithilfe eines Messgerätes erhält man ungefähr die in der Tabelle angegebenen Werte:

Ein Messgerät liefert für

- Toilettenpapier eine Dicke von $t = 0,3 \text{ mm}$
- Haushaltsrolle eine Dicke von $t = 0,6 \text{ mm}$

Herstellerangaben zufolge hat

- Haushaltsfolie eine Dicke von $t = 13 \text{ }\mu\text{m}$
- Alufolie eine Dicke von $t = 13,5 \text{ }\mu\text{m}$

Die Aufgabe besteht darin, Formeln zu entwickeln, die einen Zusammenhang herstellen für die

- Wicklungszahl auf der Rolle

$$n(d_1, d_2, L),$$

- Materialstärke

$$t(d_1, d_2, L).$$

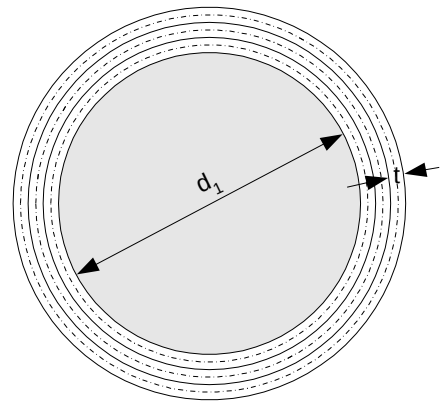
	Toiletten - papier	Haushalt s- rolle	Frischhal- te- folie	Alufolie
d_1 in [cm]	4	4.5	3.15	3.15
d_2 in [cm]	12.5	11	4.05	3.9
Blatt- zahl m	250	51	-	-
Blatt- länge L_1 in [cm]	14	24	-	-
Material- länge L in [cm]	3500	1224	4000	3000

Dabei sollen drei verschiedene Zugänge zu der Problemstellung gefunden werden. Die ermittelten Formeln werden dann an den realen Werten überprüft.

Lösungsformeln aus Folgen und Reihen

Zur Veranschaulichung dient folgende - nicht maßstäbliche - Zeichnung, in der eine Papprolle mit Durchmesser d_1 und den ersten drei Lagen Papier / Folie mit der Stärke t dargestellt ist.

Wegen der geringen Materialstärke genügt es, die Wicklungen als eine Folge größer werdender Kreisringe zu betrachten.



Ansatz I

Hier wird jeweils der äußere Durchmesser benutzt:

Es ergibt sich also für die

1. Wicklung die Länge $U_1 = \pi \cdot (d_1 + 2 \cdot t)$

2. Wicklung die Länge $U_2 = \pi \cdot (d_1 + 4 \cdot t)$

3. Wicklung die Länge $U_3 = \pi \cdot (d_1 + 6 \cdot t)$

$\vdots$

n-te Wicklung die Länge $U_n = \pi \cdot (d_1 + 2 \cdot n \cdot t)$ Außerdem gilt für die n-te Wicklung

$$U_n = \pi \cdot d_2$$

so dass sich für t folgender Zusammenhang ergibt:

$$t = \frac{d_2 - d_1}{2 \cdot n}$$

Betrachtet man die Umfänge, so stellt man fest, dass diese die konstante Differenz

$$d = 2 \cdot \pi \cdot t$$

haben. Es handelt sich also um ein Problem der arithmetischen Folgen und Reihen, für die die bekannten Formeln

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \quad \text{bzw.} \quad s_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d] \quad \text{gelten.}$$

Überträgt man diese Beziehungen auf die Problemstellung, so erhält man für

- $s_n = L = m \cdot L_1$
- $a_1 = U_1 = \pi \cdot (d_1 + 2 \cdot t)$
- $d = 2 \cdot \pi \cdot t$

und damit den Ansatz

$$2 \cdot L = n \cdot [2 \cdot \pi \cdot (d_1 + 2 \cdot t) + (n-1) \cdot 2 \cdot \pi \cdot t] \quad \text{Mit } t = \frac{d_2 - d_1}{2 \cdot n}$$

$$L = \pi \cdot n \cdot \left[\frac{2 \cdot d_1 \cdot n + 2 \cdot d_2 - 2 \cdot d_1 + (n-1) \cdot (d_2 - d_1)}{2 \cdot n} \right] \text{ wird daraus}$$

Aufgelöst nach n und diesen Wert eingesetzt in t erhält man schließlich die ersten beiden Formeln

$$\boxed{\begin{aligned} n_1 &= \frac{2 \cdot L + \pi \cdot (d_1 - d_2)}{\pi \cdot (d_1 + d_2)} \\ t_1 &= \frac{\pi \cdot (d_2^2 - d_1^2)}{4 \cdot L + 2 \cdot \pi \cdot (d_1 - d_2)} \end{aligned}}$$

mit denen später die Herstellerangaben überprüft werden sollen.

Ansatz 2

Korrekt arbeitet man, wenn man mit dem mittleren Durchmesser jedes Kreistrings rechnet. Es ergeben sich folgende Änderungen:

$$a_1 = U_1 = \pi \cdot (d_1 + t) \quad \text{und} \quad U_n = \pi \cdot (d_2 - t)$$

Trotz zweier geänderter Bedingungen bleibt $t = \frac{d_2 - d_1}{2 \cdot n}$ unverändert, so dass man für n bzw. t nun folgendes erhält:

$$\boxed{\begin{aligned} n_2 &= \frac{2 \cdot L}{\pi \cdot (d_1 + d_2)} \\ t_2 &= \frac{\pi \cdot (d_2^2 - d_1^2)}{4 \cdot L} \end{aligned}}$$

Ansatz 3

Vergisst man bei Ansatz 2, U_n von $U_n = \pi \cdot d_2$ in $U_n = \pi \cdot (d_2 - t)$ zu ändern, ist der Ansatz fehlerbehaftet; dies fällt aber, wie später zu sehen ist, kaum ins Gewicht.

Man erhält allerdings ein leicht geändertes $t \left[t = \frac{d_2 - d_1}{2 \cdot n - 1} \right]$, so dass die Berechnungsformeln für n und t deutlich komplizierter werden. Dies wirkt sich folgendermaßen aus:

$$n_3 = \frac{\sqrt{4 \cdot L^2 - 4 \cdot \pi \cdot L \cdot d_2 + \pi^2 \cdot d_1^2} + 2 \cdot L + \pi \cdot d_1}{2 \cdot \pi \cdot (d_1 + d_2)}$$

$$t_3 = \frac{\pi \cdot (d_2^2 - d_1^2)}{\sqrt{4 \cdot L^2 - 4 \cdot \pi \cdot L \cdot d_2 + \pi^2 \cdot d_1^2} + 2 \cdot L - \pi \cdot d_2}$$

Auswertung mittels CAS

materialstärken

Ansatz 1:

$$n1(d1,d2,l) := \frac{2 \cdot l + \pi \cdot (d1 - d2)}{\pi \cdot (d1 + d2)} ; t1(d1,d2,l) := \frac{\pi \cdot (d2^2 - d1^2)}{4 \cdot l + 2 \cdot \pi \cdot (d1 - d2)}$$

Ansatz 2:

$$n2(d1,d2,l) := \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot (d1 + d2)} ; t2(d1,d2,l) := \frac{\pi \cdot (d2^2 - d1^2)}{4 \cdot l}$$

Ansatz 3:

$$n3(d1,d2,l) := \frac{\sqrt{4 \cdot l^2 - 4 \cdot \pi \cdot l \cdot d2 + \pi^2 \cdot d1^2} + 2 \cdot l + \pi \cdot d1}{2 \cdot \pi \cdot (d1 + d2)}$$

$$t3(d1,d2,l) := \frac{\pi \cdot (d2^2 - d1^2)}{\sqrt{4 \cdot l^2 - 4 \cdot \pi \cdot l \cdot d2 + \pi^2 \cdot d1^2} + 2 \cdot l - \pi \cdot d2}$$

In einem ComputerAlgebraSystem wie z. B. dem TI-NspireCAS lassen sich die gewonnenen Formeln bequem eingeben.

Um dann den Rechenaufwand zu minimieren, werden n_1 , n_2 , n_3 bzw. t_1 , t_2 , t_3 in Listen zu einer neuen Formel zusammengefasst.

Listen von n bzw. t

$$ng(d1,d2,l) := \{ n1(d1,d2,l), n2(d1,d2,l), n3(d1,d2,l) \}$$

$$tg(d1,d2,l) := \{ t1(d1,d2,l), t2(d1,d2,l), t3(d1,d2,l) \}$$

Aufrufe entsprechend der Eingangstabelle

ng(4,12.5,3500) ▶ { 134.525,135.041,134.782 } Toilettenpapier

ng(4.5,11,1224) ▶ { 49.8531,50.2724,50.0606 } Haushaltsrolle

ng(3.15,4.05,4000) ▶ { 353.553,353.678,353.615 } Folie

ng(3.15,3.9,3000) ▶ { 270.796,270.902,270.849 } Alufolie

tg(4,12.5,3500) ▶ { 0.031593,0.031472,0.03165 } Toilettenpapier

tg(4.5,11,1224) ▶ { 0.065192,0.064648,0.065576 } Haushaltsrolle

tg(3.15,4.05,4000) ▶ { 0.001273,0.001272,0.001274 } Folie

tg(3.15,3.9,3000) ▶ { 0.001385,0.001384,0.001387 } Alufolie

Der Aufruf $ng(d1,d2,l)$

bzw. $tg(d1,d2,l)$

mit den entsprechenden Werten aus der Tabelle 1 berechnet auf einfache Weise für die unterschiedlichen Formeln die Windungszahl und die Materialstärke für die angegebenen Verbrauchsgüter.

Auf diese Weise erhält man alle Ergebnisse in Form der nebenstehenden Tabelle:

Fett und kursiv dargestellt sind die Werte für den Ansatz 2; dieser liefert die korrekten Werte.

Vergleicht man die Ergebnisse mit den Herstellerangaben / Messungen, so stellt man kaum Unterschiede fest.

	Toilette n- papier	Haush alts- rolle	Haush alts- folie	Alufolie
n_1	134,5254	49,85307	353,55265	270,79564
t_1 in [cm]	0,031593	0,06519	0,0012727	0,0013848
n_2	135,0405	50,2724	353,67765	270,90203
t_2 in [cm]	0,031472	0,006465	0,0012723	0,0013842
n_3	134,7820	50,0606	353,61506	270,84874
t_3 in [cm]	0,031650	0,06557	0,0012743	0,0013871

Tabelle 2: Ergebnisse zu Tabelle 1

Vergleich der Formeln

Differenz zwischen n_2 und $n_1 \rightarrow n_2 - n_1 = \frac{d_2 - d_1}{d_2 + d_1}$

Differenz zwischen n_2 und $n_3 \rightarrow n_2 - n_1 = \frac{2 \cdot L - \sqrt{4 \cdot L^2 - 4 \cdot \pi \cdot L \cdot d_2 + \pi^2 \cdot d_1^2} - \pi \cdot d_1}{2 \cdot \pi \cdot (d_1 + d_2)}$

Für $n_2 - n_1 = \frac{d_2 - d_1}{d_2 + d_1}$ ist unmittelbar ersichtlich, dass die Zahl der Wicklungen sich um weniger als eine unterscheiden muss.

Ersetzt man in $n_2 - n_3$ den Durchmesser d_2 durch d_1 , ergibt sich für die Differenz

$$n_2 - n_1 = \frac{2 \cdot L - \sqrt{(2 \cdot L - \pi \cdot d_1)^2} - \pi \cdot d_1}{2 \cdot \pi \cdot (d_1 + d_2)} = 0, \text{ d. h., je geringer der Unterschied der beiden}$$

Durchmesser ist, umso weniger unterscheiden sich die Wicklungszahlen voneinander. Dies wird auch in der obigen Tabelle deutlich, die aufzeigt, dass das Verhältnis $\frac{n_2 - n_1}{n_2 - n_3} \approx 2$ beträgt.

Das bedeutet, dass der fehlerhafte Ansatz drei genauere Ergebnisse liefert als Ansatz 2. Der Grund dafür ist in der Formel $U_n = \pi \cdot (d_2 - t)$

zu suchen. Wegen seines geringen Wertes fällt t in Vergleich zu d_2 kaum ins Gewicht.

Auf eine ähnliche formelmäßige Darstellung der Differenzen der Materialstärken wird verzichtet. Generell kann man aber sagen, dass die Unterschiede umso geringer ausfallen, je

- größer die Windungszahl
- je geringer der Durchmesserunterschied ist.

Demzufolge ist die größte Differenz bei der Haushaltsrolle zu erwarten, was auch durch die Tabelle bestätigt wird. Es handelt sich aber, bezogen auf die Maßeinheit [cm] im ungünstigsten Fall um die 4. Stelle nach dem Komma, also den Mikrometerbereich.

Lösungsformeln aus einem Volumenvergleich

Das Volumen des auf einer Papprolle aufgewickelten Materials lässt sich mit der Formel für einen Hohlzylinder bestimmen.

Hier gilt:

$$V_{HZ} = \frac{\pi}{4} \cdot (d_2^2 - d_1^2) \cdot b$$

wobei b die Breite des Materials darstellt.

Wickelt man das Material ganz ab, erhält man eine lange Bahn, deren Volumen sich mit

$V = b \cdot L \cdot t$ berechnen lässt.

Diese beiden Volumina sind gleich groß, woraus folgt:

$$b \cdot L \cdot t = \frac{\pi}{4} \cdot (d_2^2 - d_1^2) \cdot b$$

$$t = \frac{\pi \cdot (d_2^2 - d_1^2)}{4 \cdot L}$$

Diese Formel ist aus Ansatz schon bekannt und wird auf diese Weise noch einmal bestätigt.

Dieser Zugang zu dem Problem ist auch in der Mittelstufe schon machbar.

Die Archimedische Spirale

Mathematisch gesehen handelt es sich bei derartigen abzuwickelnden Materialien um *archimedische Spiralen*, für die die bekannte Formel $r = a \cdot \varphi$ gilt.

Punkte $P_1, P_2 \dots$ auf demselben Strahl durch den Ursprung haben den konstanten Abstand, $2 \cdot \pi \cdot a = t$ der bei dieser Aufgabe der Materialstärke t entspricht.

Zudem beginnen diese hier betrachteten archimedischen Spiralen alle in einem Abstand a_1 vom Ursprung, so dass nun folgende mathematische Beschreibung zutrifft:

$$r(\varphi) = \frac{t}{2 \cdot \pi} \cdot \varphi + \frac{d}{2}$$

Diese archimedische Spirale hat die Form

$r(\varphi) = \frac{t}{2 \cdot \pi} \cdot \varphi + \frac{d_1}{2}$ für die innere Bahn bzw. $r(\varphi) = \frac{t}{2 \cdot \pi} \cdot \varphi + \frac{d_1}{2} + t$ für die äußere Bahn des aufgewickelten Materials.

Aus der bekannten Formel für die Bogenlänge von Kurven in Polarkoordinaten

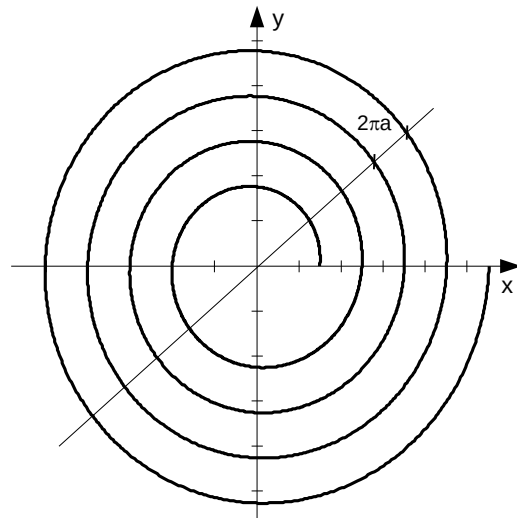
$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2} d\varphi \text{ und dem auch hier geltenden Zusammenhang zwischen } t \text{ und } n$$

mit $t = \frac{d_2 - d_1}{2 \cdot n}$ bzw. $n = \frac{d_2 - d_1}{2 \cdot t}$ erhält man mit

s	$=$	L
φ_0	$=$	0
φ_1	$=$	$2 \cdot \pi \cdot n = \frac{(d_2 - d_1) \cdot \pi}{t}$
$\frac{dr}{d\varphi}$	$=$	$\frac{t}{2 \cdot \pi}$

die Formel
$$s = \int_0^{\frac{(d_2 - d_1) \cdot \pi}{t}} \sqrt{\left[\frac{t}{2 \cdot \pi} \cdot \varphi + \left(\frac{d_1}{2} + t \right) \right]^2 + \left(\frac{t}{2 \cdot \pi} \right)^2} d\varphi$$

für die äußere Bahn.



L , d_2 und d_1 sind die gegebenen Größen, so dass diese Formel zur Bestimmung der Materialstärke geeignet ist.

Mit einem CAS ermittelt man für die Frischhaltefolie aus Tabelle 1

- $t = 0.001273245 \text{ cm}$ [äußere Bahn]
 $n = 353.427649$ Wicklungen
- $t = 0.001272345 \text{ cm}$ [innere Bahn]
 $n = 353.677649$ Wicklungen

Der Unterschied zu den Lösungen aus den Abschnitten 2.2 bzw. 3 ist vernachlässigbar.

Fundstellen und Anregungen zu **Komplexe Problemstellungen in der Mathematik**

Zeichnungen: Die Zeichnungen in diesem Buch sind sämtlich selbst erstellt.

Bilder: Nicht erwähnte Bilder sind selbst aufgenommen.

1. H. Meschkowski: Mathematik als Bildungsgrundlage, Springer Vieweg 1965
2. P. Drijvers: Klett Magazin Tangente II/2001
3. <https://de.wikipedia.org/wiki/Pentagon>
4. https://de.wikipedia.org/wiki/Pilsumer_Leuchtturm
5. Tabellenbuch Metall, 44. Auflage 2008, EUROPA Lehrmittel
6. Heinz Klaus Strick: Mathematik ist wunderwunderschön, Springer 2019
7. Von Ad Meskens - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=32351557>
8. Norbert Herrmann: Können Hunde rechnen? , Oldenbourg 2007
9. Tabellenbuch Metall, 44. Auflage 2008, EUROPA Lehrmittel
10. Georg Gläser: Der mathematische Werkzeugkasten, Spektrum Akademischer Verlag 2004
11. Georg Gläser: Der mathematische Werkzeugkasten, Spektrum Akademischer Verlag 2004
12. A. Beutelspacher: Wie man in eine Seifenblase schlüpft, C.H.Beck 2015
13. <https://www.youtube.com/watch?v=pyqCb73fyR4>
14. Standbild der Animation aus 13.
15. Grafik aus Duden-Paetec: Physik Gesamtband Sek.I, 2005
16. Fundstellen der Bilder:
https://www.tripadvisor.de/Attraction_Review-g186338-d3356697-Reviews-Rolling_Bridge-London_England.html#photos;aggregationId=101&albumId=101&filter=7
17. *Literatur zur allgemeinen Kegelschnittgleichung*
Algebra und Geometrie für Ingenieure
Verlag Harry Deutsch, Frankfurt/M. u. Zürich
7. Auflage 1972

18. Meyers Kleine Enzyklopädie Mathematik: 14. Auflage 1995; Meyers Lexikonverlag

19. Bildnachweis zu *Analytische Darstellung ebener Kurven*

Bild 1: www.math-grain.de/download/m3/int-mv/flaeche/flaeche-pol-3.pdf

Bild 2: <http://www.ludwigmeister.de/user/eesy.de/ludwigmeister.com/img/zahnrad20.jpg>

Bild 3: <https://www.uhrinstinkt.de/magazin/wp-content/uploads/2016/05/Mechanische-Uhren-660x330.jpg>

Bild 4: <https://www.youtube.com/watch?v=JBB1sC7LCuQ>

Bild 5: Herkunft kann nicht mehr nachvollzogen werden

20. Georg Glaser: Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik, Spektrum Akademischer Verlag 2005

21. Bilder und Animationen dazu:

Animation des RD im Quadrat

https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichdick#/media/File:Reuleaux_triangle_Animation.gif

Hinweis zum CD-Wechsler

http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/reuleuaux_kostrzewski_belegarbeit.pdf

Hinweis zur Schwerpunktsbahn für $a = 2$

<http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html>

Animation des Wankel-Motors

<https://www.bing.com/videos/search?q=wankelmotor+funktionsweise&&view=detail&mid=8F49D5F9BB21A2FEEF338F49D5F9BB21A2FEEF33&&FORM=VDRVRV>