THE DERIVE - NEWSLETTER #1

THE BULLETIN OF THE

DERIVE®

USER GROUP

Contents:

January 1991

reprint 2004

Dear Derive User,

Derive-News-Letter #1 has finally arrived. The 1st issue of the Bulletin of the Derive User Group needed considerably longer than to be predicted. But I am sure that the next numbers will be published in time.

The D-N-L is intended to appeal to the Derive Users all over in Europe and incite them to work with Derive and explore its capabilities. Later on we are going to contact US User Groups themselves. That's why we use and will be using English as the standard language in the D-N-L. In the 1st issue we have included original contributions sent by German Derive Users.

The following issues will be published in DIN-A4 form in a harder cover. You will find clues and notes concerning your future contributions in the Editorial. We specially ask non-German Users to send articles, inquiries, critical comments or any hints to make the D-N-L an international paper. Every contribution will be appreciated. Let us know your wishes for special topics. Please inform us about your experiencies of mutual influences of Derive and other software products. We are interested in the application of Derive on Mathematics teaching methods. Some Derive Users may have worked out an inspiring teaching sequence. We would be proud to give a little impulse for a Europe wide discussion on the application of symbolic computation in school.

At last I have to thank Dr B. Kutzler from Soft Warehouse Europe for his support with this first issue.

Yours faithfully,

Lieber Derive Anwender!

Der erste Derive-News-Letter ist nun endlich fertig. Die erste Ausgabe des Bulletins der Derive User Group hat länger Zeit gebraucht wie vorhergesehen. Die nächsten Nummern werden sicher zeitgerecht erscheinen.

Der D-N-L soll die Derive User in ganz Europa ansprechen, und sie anregen, mit Derive zu arbeiten und seine Möglichkeiten auszuloten. Später werden wir Kontakte zu US User Groups knüpfen. Deshalb verwenden wir Englisch als Standardsprache im D-N-L. In der 1. Ausgabe finden sich Originalbeiträge von deutschen Derive Usern.

Die folgenden Ausgaben werden im DINA4-Format mit einem festeren Einband erscheinen. Sie finden Hinweise, die Ihre allfälligen Beiträge betreffen im Editorial.

Wir bitten besonders die nicht deutschsprachigen User, uns Artikel, Anfrage, kritische Bemerkungen oder irgendwelche Tips zu schicken, um den D-N-L zu einer internationalen Zeitschrift zu machen. Jeder Beitrag ist willkommen. Lassen Sie uns Themenwünsche wissen! Senden Sie uns bitte Ihre Erfahrungen über den Umgang mit Derive im Zusammenwirken mit anderen Softwareprodukten. Wir sind besonders an der Anwendung von Derive in den Methoden des Mathematikunterrichts interessiert. Vielleicht hat ein Derive User eine bestechende Unterrichtssequenz ausgearbeitet. Wir wären stolz, könnten wir einen kleinen Anstoß zu einer europäischen Diskussion über den Einsatz von Symbolic Computation in der Schule geben.

Schließlich bleibt mir noch, Hrn. Dr. B. Kutzler von Soft Warehouse Europe für seine Unterstützung für das Zustandekommen der Nummer 1 zu danken.

Ihr

The *Derive-News-Letter* is the Bulletin of the *Derive-User-Group*. It is published at least three times a year with a content of 30 pages minimum. The goals of the *D-N-L* is to enable the exchange of experiencies made with *Derive* as well as to create a group to discuss the possibilities of new methodic an didactic manners in teaching Mathematics.
Subscription of the *D-N-L* is restricted to Members of the *Derive-User-Group*. Membership-form is enclosed with the first issue you get.

Editor:
Mag. Josef Böhm
A-3042 Würmla
D'Lust 1
Austria

Contributions:

Please send all contributions to the above adress. Non-English speakers are encouraged to write their contributions in English to confirm the international touch of the *D-N-L*. At the other hand non-English articles will be warmly welcomed, too. Your contributions will be edited but not refereed. By submitting articles the author gives his consent for reprinting in the *D-N-L*. The more contributions you will send to the Editor the more livelier and richer in content the *Derive-News-Letter* will be.

Preview (Contributions for the next issues):

Finanzmathematik – Tilgungspläne (Teil 2)
Financial Maths – Mortgage Tables (Part 2)

Wertetafel mit Cornu-Spirale *Value table with Cornu-spiral*

Solving ODE´s using DERIVE

Wordprocessing and DERIVE

Next issue is planned for May 1991

Impressum:
Medieninhaber: DERIVE User Group, A-3042 Würmla, D´Lust 1, AUSTRIA
Richtung: Fachzeitschrift
Herausgeber: Mag.Josef Böhm
Herstellung: Selbstverlag

Soft Warehouse Europe GmbH
SCHLOSS HAGENBERG
A-4232 HAGENBERG, AUSTRIA
phone (0)7236/32 97-81, fax (0)7236/32 97-30

Message to Members of the DERIVE User Group

Dear DERIVE-TM Users,

We are delighted to see the formation of a DERIVE User Group and warmly welcome its members.

The DERIVE User Group can be a forum for the exchange of ideas within the steadily growing community of DERIVE users - about 20,000 worldwide now. The new technology behind DERIVE, so called "computer algebra", certainly means a strong challenge to many fields. For scientists and engineers it is a tool to automate many parts of their daily work. DERIVE frees them from tedious hand calculations, giving them more time to follow new insights and try new approaches and developments. The impact on education cannot be predicted. How will math teaching have to be changed to follow the requirements implied by the availability of systems like DERIVE? We have no answer yet. Experiments have to be made, results have to be discussed, new experiments have to be planned and prepared. We are convinced that the DERIVE User Group will play a central role in answering this crucial question.

On the other hand, the DERIVE User Group can be a means to influence the further development of DERIVE. We are steadily working on the product to improve its power and facilitate its usage. We will be delighted to receive your reactions and we will listen very carefully to your suggestions.

Our special thank goes to the group's president Josef B”hm. The foundation is completely due to his personal initiative. Although originally planned to be an association of German speaking users only, Josef Böhm has expressed his readiness to develop the association further to become a Pan-European forum.

We are looking forward to an active interchange of ideas between users and developers.

Yours sincerely

Berhard A. Kutzler (President, Soft Warehouse GmbH Europe, Austria)
Albert L. Rich (President, Soft Warehouse, Inc., Hawaii)
David R. Stoutemyer (Chairman, Soft Warehouse, Inc., Hawaii).

Dr. G.Bragard, Aachen

1) Hinweis: Von Graphik-Bildschirmen, die mit Derive erstellt wurden, lassen sich bei beliebigen Graphikkarten im Rechner brauchbare Hardcopies auf Nadeldruckern erstellen, wenn man das in der Zeitschrift "DOS-International" (Ausgabe 10/89 und 3/90) veröffentlichte Hintergrundprogramm "SGRAPHIC" verwendet.

2) Anfrage: Beim Arbeiten mit Graphik verwende ich eine Herkules-Karte. Leider läßt sich diese Konfiguration offenbar in der Konfigurationsdatei von Derive nicht ohne weiteres abspeichern, so daß man bei jedem Neustart wieder "HGC" anwählen muß. Wie kann man diesen lästigen Schritt umgehen?

D-N-L: Vielleicht sollten Sie HERCULES.COM in eine geeignete Batchdatei vor dem Aufruf von Derive und vor Initialisierung eines residenten Snapshotprogramms einbinden. Ich selbst arbeite mit keiner HERCULES-Karte, kann daher Ihre Frage nur an unseren Leserkreis weitergeben.

Dr. Bragard has problems working with a Hercules-Graphic-Adapter and claims to be forced to set the respective option in DERIVE at each restart. I recommend to include HERCULES.COM into a Batch-file initializing a snapshot program.

Dr. F.Schumm, Stuttgart

Hr. Dr.Schumm sandte einige Beiträge an uns, wofür wir recht herzlich danken. Neben den, in dieser Ausgabe wiedergegebenen Artikeln über die Anwendung des VECTOR-Befehls zur Erzeugung von Wertetafeln samt einer Anwendung im Zusammenhang mit der Cornu'schen Spirale schrieb uns Hr. Dr. Schumm einen Artikel über das Lösen von Differentialgleichungen (logistische DGL) mit Derive und zwar "zu Fuß" und unter Verwendung der ODE1.MTH Datei, sowie weitere Kurzbeiträge über Evoluten von Kegelschnitten, eine Anwendung aus der Elektrotechnik, sowie über die Möglichkeit, Derive-Ergebnisse in Text und Grafik in Word-Texte einzubinden. Alle diese Themen können in der nächsten Ausgabe des *Derive-News-Letter* behandelt werden.

Dr. G.Schuhmann, Kitzingen

Als Anwender des Programms Derive stehe ich als Lehrer häufig vor dem Problem, neben einer Grafik auch den Ausdruck einer Wertetabelle zu benötigen. Hierzu muß ich immer aus Derive heraus und in einer anderen Programmiersprache weiterarbeiten, was ich als sehr störend empfinde. Wäre es nicht möglich, Derive hier etwas zu erweitern?

D-N-L: Diese Anfrage wird in einem Beitrag ausführlich behandelt.

Dr. Schuhmann asks how to create a valuetable with DERIVE. He has to change from DERIVE to another program until now. In this issue you can find a contribution delivered by Felix Schumm reating this problem. Mr. Schumm sent some articles containing solving differential equations (logistic DE) by using the ODE1.MTH-utility file, evolutes of conics, application from electro-engineering and how to include DERIVE-results (expressions and graphics as well) into WORD-documents.

Dipl.-Ing. K.Schmidt, Köln

Hr. Dipl.-Ing. Schmidt hat uns zwei sehr ausführliche Briefe geschrieben, die zu einem Teil Derive-Themen behandelten, zum anderen aber ins Grundsätzliche gingen. Die Beantwortung der Fachfrage über die Lösung einer speziellen Gleichung erfolgt in einem Kurzbeitrag. Das andere Anliegen des Schreibers will ich gerne auszugsweise zitieren und unsere geschätzten Leser bitten, eventuell dazu Stellung zu nehmen:

Mr Schmidt wrote two very extended letters, which dealt with general problems and with DERIVE specific questions. The response on the question concerning the order six equation is given below.

....Mathematik ist eine Sache der Veranlagung, die leider nur sehr wenige Menschen besitzen. Deshalb kann man sie auch nicht mit Computern erzwingen. Ein guter Mathematik-Unterricht schafft das zwar auch nicht, kann aber einige Kenntnisse vermitteln. Ist der Unterricht schlecht, versagt auch der Computer. Ich will damit sagen, daß der Computer einschließlich Taschenrechner bis zum Abitur nichts auf der Schule zu suchen hat. Das, worauf es beim Computer ankommt, hat überhaupt nichts mit dem Computer zu tun. In jeder Klasse können höchstens zwei oder drei etwas Vernünftiges damit anfangen. Derentwegen braucht man keine anzuschaffen. Man stopft die Schulen voll Computer und hofft, den Dummen das Denken damit beizubringen. Aber gerade die brauchen den menschlichen Kontakt zum Lehrer und ihre Beschäftigung mit dem Rechner gehört zum Thema "Beschäftigungstheorie", jedoch nicht zum Rechnen oder Lernen. "Spielend lernen" gilt bei ihnen nicht. Die Mathematiklehrer brauchen also nicht umzudenken.

....Und was sollen die Schulen mit einem solchen Programm anfangen? Nun ja, Sie wollen Geld verdienen und peilen die Schulen an, weil in den zuständigen Ministerien und Aufsichtsbehörden kaum einer etwas von Mathematik versteht. Außerdem hat die kommunistische Unterwanderung der Schulbücher bewiesen, daß diese Unkenntnis nicht auf die Mathematik beschränkt ist. Viel Glück!

....Mein Vetrauen zu Derive hat gelitten, seit ich die folgende Gleichung nicht damit lösen konnte:

```
x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0
```

Nach ca. 500 Sekunden brach ich die Rechnung ab. (Ende der Zitate)

Mr Schmidt wanted to solve the equation given above and was very disappointed that DERIVE refused to solve it. He interrupted the calculation after 500 seconds. I´ll demonstrate how one can "convince" DERIVE to solve this special equation using a wellknown technique from calculation – by – hands – times.

D-N-L: Zu lösen ist die Gleichung 6.Grades

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

Eine allgem. Gleichung 6.Grades läßt sich exakt nicht mehr lösen, es sei denn, wir können sie auf eine Gleichung niedrigeren Grades zurückführen. Bei dieser symmetrischen Gleichung läßt sich das auf folgende Weise bewerkstelligen:

Die Gleichung wird durch x^3 dividiert und umgeordnet. Dann ergibt sich:

$$x^3+\frac{1}{x^3}+x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=0.$$

Nun führen wir die Substitution $x+\frac{1}{x}=u$ und erhalten weiters:

für $x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2$ und $x^3+\frac{1}{x^3}=u^3-3u$.

Diese Substitution konnte ich leider nicht DERIVE durchführen lassen. Dann ergibt sich daraus die Gleichung 1:

1: $$u^3+u^2-2u-1=0$$

Sie läßt sich exakt lösen:

This no longer a problem with later releases.

(equation_degree6.dfw)

2: $$u=\frac{2\sqrt{7}\,\mathrm{COS}\left[\frac{\mathrm{ATAN}\left[\frac{\sqrt{3}}{9}\right]}{3}-\frac{5\pi}{6}\right]}{3}-\frac{1}{3}$$

3: $$u=\frac{2\sqrt{7}\,\mathrm{COS}\left[\frac{\mathrm{ATAN}\left[\frac{\sqrt{3}}{9}\right]}{3}-\frac{\pi}{6}\right]}{3}-\frac{1}{3}$$

4: $$u=\frac{2\sqrt{7}\,\mathrm{COS}\left[\frac{\mathrm{ATAN}\left[\frac{\sqrt{3}}{9}\right]}{3}+\frac{\pi}{2}\right]}{3}-\frac{1}{3}$$

Das sind die drei Löungen für u. Nun führen wir für die erste Lösung u_1 die Rücksubstitution durch und lösen die entsprechende quadratische Gleichung:

5: $$x+\frac{1}{x}=\frac{2\sqrt{7}\,\mathrm{COS}\left[\frac{\mathrm{ATAN}\left[\frac{\sqrt{3}}{9}\right]}{3}-\frac{5\pi}{6}\right]}{3}-\frac{1}{3}$$

6: $$x=-\frac{7^{1/4}\sqrt{\left[2\sqrt{7}\,\mathrm{COS}\left[\frac{2\,\mathrm{ATAN}\left[\frac{\sqrt{3}}{9}\right]}{3}-\frac{5\pi}{3}\right]-4\,\mathrm{COS}\left[\frac{\mathrm{ATAN}\left[\frac{\sqrt{3}}{9}\right]}{3}-\frac{5\pi}{6}\right]-3\sqrt{7}\right]}}{6}+\frac{\sqrt{7}\,\mathrm{COS}\left[\frac{\mathrm{ATAN}\left[\frac{\sqrt{3}}{9}\right]}{3}-\frac{5\pi}{6}\right]}{3}-\frac{1}{6}$$

7: $$x=\frac{7^{1/4}\sqrt{\left[2\sqrt{7}\,\mathrm{COS}\left[\frac{2\,\mathrm{ATAN}\left[\frac{\sqrt{3}}{9}\right]}{3}-\frac{5\pi}{3}\right]-4\,\mathrm{COS}\left[\frac{\mathrm{ATAN}\left[\ldots\right.}{3}\ldots\right.\right.}}{6}$$

$$\ldots\frac{\sqrt{3}}{9}\Big] - \frac{5\,\pi}{6}\Big] - 3\,\sqrt{7}\Big] \;+\; \frac{\sqrt{7}\,\mathrm{COS}\left[\frac{\mathrm{ATAN}\left[\frac{\sqrt{3}}{9}\right]}{3} - \frac{5\,\pi}{6}\right]}{3} - - \ldots$$

$$\ldots\frac{1}{6}$$

nach **Approximate** ergeben sich die ersten beiden Lösungen:

8: x = -0.900968 - 0.433883 î

9: x = -0.900968 + 0.433883 î

Nun wird für u_2 und dann für u_3 rücksubstituiert:

Damit ergeben sich die weiteren vier Lösungen für diese symmetrische Gleichung 6.Grades:

16: x = 0.623489 - 0.781826 î

17: x = 0.623489 + 0.781826 î

21: x = -0.222520 - 0.974927 î

22: x = -0.222520 + 0.974927 î

Als Bemerkung sei noch angebracht, daß die neue Version von Derive zusätzliche Möglichkeiten zur Lösung von Gleichungen auch mit komplexen Lösungen bietet. Später darüber mehr.

Prof. J.Winkelbauer, Graz

.... möchte ich Sie auf ein Problem im Zusammenhang mit der Berechnung des Kreisintegrals hinweisen.

Ein Ausdruck liegt bei: Ersetzt man im letzten Term sign(0) durch Null, erhält man ein falsches Ergebnis.

D-N-L: In den neueren Versionen ergibt sich der Term sign(0) nicht mehr:

#1: $\sqrt{(r^2 - x^2)}$

#2: $\int_0^r \sqrt{(r^2 - x^2)}\, dx$

#3: $\dfrac{\sqrt{r}\,\pi\,|r|^{3/2}}{4}$

Wenn man jetzt die Variable r als **Nonnegative** deklariert erhält man das richtige Ergebnis. Das funktioniert auch in früheren Versionen.

#4: $\dfrac{\pi\, r^2}{4}$

E. Hartmann, Zuoz

Mathematische Coprozessoren dürften doch zumindest im numerischen Bereich eine Beschleunigung bringen und sollten daher ansprechbar sein, resp. automatisch erkannt werden.

..., wieso z.B. die Gleichung 4. Ordnung $x^4 - 2x^3 - 6x2 - 1 = 0$ nach l„ngerer Rechenzeit kommentarlos zurückgewiesen wird, obwohl doch andere Gleichungen dieser Art in Radikalen gelöst werden?

Die ausgezeichneten Fähigkeiten könnten durch die Möglichkeit der Darstellung von Raumkurven und Flächen in Parameterdarstellung bereichtert werden.

Eine gewisse Beweglichkeit bei der Umformung trigonometrischer Ausdrücke wäre angebracht; bei muMATH konnte man die gewünschte Umformungsrichtung steuern - vielleicht haben wir das bei Derive noch nicht richtig erkannt?

Schließlich wäre noch eine Erleichterung bei der wiederholten Durchführung gleicher Vorgänge wünschenswert, also eine Art Programmierbarkeit.

D-N-L: Auf 5 Fragen unsere Antworten:

Nach Auskunft unterstützen Coprozessoren nur Gleitkommaarithmetik. Da Derive aber in Langzahlarithmetik arbeitet, was viele seiner Vorzüge erst ermöglicht, können Coprozessoren keine Hilfe bringen.
Die Gleichung werden wir an die Derive-Entwickler weitergeben und um entsprechende Auskünfte bitten. Derive 2.0 kann auch Raumkurven darstellen.

Kurz vor Redaktionsschluß erreichte mich noch eine Nachricht direkt von Soft Warehouse bezüglich Ihrer Anfrage. Ich zitiere wörtlich:

Exact raDical or Complex factoring of general quartics usually exhausts memory - particularly if any coefficients are nonnumeric. This means, that you would quickly reject the answer as unpalatable even if you could see it.
However, if there is a 3rd-degree term in a quartic, the first step in factoring the quartic formula is to transform it to a related quartic missing that term. Unfortunately, this normalization usually complicates the other coefficients. Thus, Derive is more likely to succeed at factoring quartics that start out missing the 3rd-degree term (or by reciprocal symmetry, quartics missing the 1stÄdegree term). For example, x^4+x^2+x+1 and x^4+x^3+x^2+1, are both exactly factorable over the complex domain, even though they are irreducible over the rational numbers.

Die Umformungsrichtung läßt sich steuern:

Manage Trigonometry:
Collect - Expand - Auto.

Zur Programmierbarkeit: vielleicht ist der VECTOR-Befehl eine kleine Hilfe in dieser Richtung. Im übrigen lassen Sie sich bitte von der nächsten Derive-Version überraschen.

Dr.Ing. R.Hönl, Berlin

D-N-L: Verwenden Sie bitte das Programm Pizz-Azz zum Abspeichern von Bildschirminhalten. Auch Capture im Zusammenhang mit Word5 ist ausgezeichnet geeignet.

Hr.Dr. Hönl gibt allen Derive-Usern, die Grafiken in PAGEMAKER einbinden wollen den Hinweis in OPION COLOR für den Vordergrund die Farbe 0 und für den Hintergrund die Farbe 15 zu wählen, da das TIF-Format keine Farbinformation zuläßt.

O R I G I N A L C O N T R I B U T I O N S

Über die Verwendung von Derive zur Erzeugung von Wertetafeln mit Hilfe der VECTOR-Anweisung

On the Use of DERIVE to create value tables using the VECTOR-command

Dr. F. Schumm, Stuttgart

Alle folgenden Überlegungen beziehen sich auf den ab Version 1.xx verfügbaren VECTOR-Befehl. Mit **VECTOR(u,k,m,n,s)** läßt sich bekanntlich ein Vektor (eine Liste) erzeugen, dessen Komponenten aus den Werten für u entstehen, die sich bei Belegung der Variablen k mit Werten von m bis n bei einer Schrittweite s ergeben. Wird keine Schritt-weite angegeben, nimmt Derive s = 1 an.

Diese Anweisung entspricht etwa einer FOR-NEXT-Schleife in BASIC oder auch in anderen höheren Programmiersprachen:

```
FOR K = M TO N STEP S
      PRINT U
NEXT K
```

wobei i.a. U von k abhängig ist.

Es seien die folgenden Buchstaben F und G als Funktionen von x definiert:

```
#1:  F := x x

#2:  G := SIN(x)
```

Nach Ausführen von **Simplify** werden F und G in späteren Termen automatisch durch die Ausdrücke x^2, bzw. sin(x) ersetzt.

1. Beispiel:

#3: VECTOR(8, x, 1, 5)   liefert nach **Simplify**:

#4: [8, 8, 8, 8, 8]

Erklärung: Es wird ein Vektor mit den Komponenten 8 durch die Laufvariable x, die von 1 bis 5 läuft, erzeugt.

2. Beispiel:

#5: VECTOR(F, x, 1, 5)   liefert nach **Simplify**:

#6: [1, 4, 9, 16, 25]

Erklärung: Es wird ein Vektor durch die Laufvariable von x = 1 bis x = 5 erzeugt. Da F die Laufvariable (F = x^2) enthält, ergeben sich die ersten fünf Quadratzahlen als Komponenten.

3. Beispiel:

#7: VECTOR(a F, x, 1, 5) liefert nach **Simplify**:

#8: [a, 4 a, 9 a, 16 a, 25 a]

Erklärung: Hier wird ein Vektor mit den Komponenten $a*x^2$ für x = 1 bis x = 5 generiert.

3. Beispiel:

#9: VECTOR(x, F, x, 1, 5) liefert nach **Simplify**:

```
                 2
#10:  VECTOR(x, x , x, 1, 5)
```

Erklärung: Simplify ersetzt F richtig durch x^2, sonst kann der Befehl nichts bewirken, da die Syntax nicht sinnvoll ist. Der Ausdruck heißt x und die Laufvariable x^2.

5. Beispiel: Erzeugung von Matrizen

Definiert man den Ausdruck u selbst als einen Vektor, dann erzeugt das VECTOR-Kommando einen "Vektor von Vektoren", d.i. eine Matrix. So z.B.:

#11: $\text{VECTOR}([x, x^2], x, 1, 5)$ liefert nach **Simplify**:

$$\#12: \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 16 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}$$

6. Beispiel: Erzeugung von Wertetafeln

#13: VECTOR([x, F, G], x, 1, 5)

liefert nach **Simplify** eine Tabelle für:

x	x^2	sin x

$$\#14: \begin{bmatrix} 1 & 1 & \text{SIN}(1) \\ 2 & 4 & \text{SIN}(2) \\ 3 & 9 & \text{SIN}(3) \\ 4 & 16 & \text{SIN}(4) \\ 5 & 25 & \text{SIN}(5) \end{bmatrix}$$

und wenn man **Notation** und **Precision** entsprechend ändert:

$$\#15: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.841470 \\ 2 & 4 & 0.909297 \\ 3 & 9 & 0.141120 \\ 4 & 16 & -0.756802 \\ 5 & 25 & -0.958924 \end{bmatrix}$$

Wie bei der schon erwähnten FOR-NEXT-Schleife wird jetzt das Inkrement des Arguments x auf 0,5 eingestellt. Damit ergeben sich die folgenden Tabellen im **Exact-**, bzw. **Approximate**-Modus:

#16: VECTOR([x, F, G], x, 1, 5, 0.5)

$$\#17: \begin{bmatrix} 1 & 1 & \text{SIN}(1) \\ \frac{3}{2} & \frac{9}{4} & \text{SIN}\left(\frac{3}{2}\right) \\ 2 & 4 & \text{SIN}(2) \\ \frac{5}{2} & \frac{25}{4} & \text{SIN}\left(\frac{5}{2}\right) \\ 3 & 9 & \text{SIN}(3) \\ \frac{7}{2} & \frac{49}{4} & \text{SIN}\left(\frac{7}{2}\right) \\ 4 & 16 & \text{SIN}(4) \\ \frac{9}{2} & \frac{81}{4} & \text{SIN}\left(\frac{9}{2}\right) \\ 5 & 25 & \text{SIN}(5) \end{bmatrix}$$

#18:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.841470 \\ 1.5 & 2.25 & 0.997494 \\ 2 & 4 & 0.909297 \\ 2.5 & 6.25 & 0.598472 \\ 3 & 9 & 0.141120 \\ 3.5 & 12.25 & -0.350783 \\ 4 & 16 & -0.756802 \\ 4.5 & 20.25 & -0.977530 \\ 5 & 25 & -0.958924 \end{bmatrix}$$

7. Beispiel:

Es soll eine allgemeine Funktion mit dem Namen WERTETAF defininiert werden. Dazu erzeugt man zuerst die willkürliche Funktion Y:

#19: Y :=

#20: WERTETAF(xu, xo, h) := VECTOR([x, Y], x, xu, xo, h)

Erklärung: xu und xo sind die Unter-, bzw. Obergrenzen des Arguments x, h ist das Inkrement. Wenn Term #19: vorher nicht geschaffen wird, dann gilt y als Variable und nicht, wie hier vorgesehen als Funktion.

Nun wird die gewüschte Funktion mit dem Namen Y editiert:

#21: $Y := (1 + x^2)\,ê^{1 - x^2/2}$

und dann ruft man die gewünschte Tabelle auf mit:

#22: WERTETAF(0, 1, 0.1)

#23:
$$\begin{bmatrix} 0 & 2.71828 \\ 0.1 & 2.73177 \\ 0.2 & 2.77103 \\ 0.3 & 2.83255 \\ 0.4 & 2.91077 \\ 0.5 & 2.99859 \\ 0.6 & 3.08787 \\ 0.7 & 3.17014 \\ 0.8 & 3.23715 \\ 0.9 & 3.28158 \\ 1 & 3.29744 \end{bmatrix}$$

To be continued

In Part 2 of this contribution you will find in the next issue an application of this technique in computing and plotting the Cornu-spiral.
More applications of the VECTOR-Command are used in the article concernig problems of Financial Mathematics
.

Finanzmathematik mit DERIVE

Financial Mathematics with DERIVE

Josef Böhm, Würmla

1. Zinseszins- und Rentenrechnung

Unter einer Rente verstehen wir periodische Zahlungen in gleicher Höhe über einen gewissen Zeitraum. Diese Zahlungen werden für jede Periode verzinst. Wenn diese Zahlungen jeweils am Ende der Periode erfolgen, dann heißt die Rente "*nachschüssig*", sonst heißt sie "*vorschüssig*". Man unterscheidet außerdem die Verzinsungsart nach "*dekursiv*" und "*antizipativ*". Bei der dekursiven Verzinsung wird der Zins (= i) jeweils am Ende der Zinsperiode dem Kapital zugeschlagen, während bei der antizipativen Verzinsung jeweils am Beginn der Periode vom Kapital der Diskont (= d) abgezogen wird. Der Gegenwert aller Rentenzahlungen zum Beginn der ersten Rentenperiode unter Berücksichtigung der Verzinsung heißt *Barwert der Rente* (*Present Value*), das Äquivalent zu allen Zahlungen am Ende der letzten Rentenperiode dagegen heißt der *Endwert der Rente* (*Future Value*).

Alle finanzmathematischen Funktionen, die DERIVE bereitstellt, beruhen auf der Gleichung:

$$v(1+i)^n + p(1+it)\frac{(1+i)^n-1}{i} + f = 0$$

Diese Gleichung bildet in früheren Versionen von Derive die Datei ANNUITY.MTH und kann bei Bedarf mit **Transfer Merge** aufgerufen, bzw. nachgeladen werden. **(This not necessary now, all following functions are built-in.)**

Die Variablen dieser Gleichung haben nun die folgenden Bedeutungen:

p	Rentenbetrag	
n	Anzahl der Zahlungen	
i	Zinsfuß für eine Rentenperiode (in %)	
v	Barwert aller Zahlungen	
f	Endwert aller Zahlungen	
t	Schlüssel für die Zahlungsart:	
	$t = 0$	nachschüssig
	$t = 1$	vorschüssig
	$0 < t < 1$ ...	Zahlungen innerhalb der Perioden; voreingestellt ist t=0.

Positive Werte für *p*, *v* und *f* bedeuten Einnahmen, Erträge u.s.w., negative Werte hingegen sind Zahlungsausgänge, Kosten etc.

Als Funktionen stehen nun zur Verfügung:
(Dabei wird die vorhin angegebene Grundgleichung nach einem der Parameter wie Endwert, Barwert, Zahlung, Laufzeit und neuerdings auch Verzinsung aufgelöst).

- **PVAL(i,n,p,f,t)** berechnet den Barwert aller Zahlungen. Der Endwert *f* ist voreingestellt mit *f* = 0. Er wird dann mit einem konkreten Wert zu belegen sein, wenn am Ende der Laufzeit eine Extrazahlung zu berücksichtigen ist.

- **FVAL(i,n,p,v,t)** berechnet den Endwert der Rente. Der Barwert *v* ist voreingestellt mit *v* = 0. Er kann aber ebenfalls einen Wert annehmen.

- **PMT(i,n,v,f,t)** ergibt den Rentenbetrag *p*. Dabei werden *f* und *v* standardmäßig mit *f* = *v* = 0 belegt. (PMT = payment)

- **NPER(i,p,v,f,t)** bestimmt die Anzahl der Zahlungen aus einem gegebenen Bar- oder Endwert. Auch hier sind *f* = *v* = 0 voreingestellt. Natürlich muß hier ebenfalls zumindest einer dieser beiden Parameter einen Wert erhalten.

Für die Suche nach der Verzinsung muß in früheren Versionen die Datei ANNUITY.MTH nachgeladen werden. Mit **Manage Substitute** werden alle Variablen außer *i* mit den gegebenen Werten belegt. **soLve** bringt dann die gesuchte Lösung.
In der neuesten Version gibt es auch für die Verzinsung eine Funktion:

- **RATE(n,p,v,f,t)** liefert den Zinsfuß für die Rentenperiode. (Das ist aber oft noch nicht der gesuchte Zinsfuß).

Wenn man viel mit finanzmathematischen Problemen zu tun hat, dann haben diese Formeln noch einige Lücken, die sich aber leicht schließen lassen. Hier sollen im folgenden die bestehenden Funktionen dazu verwendet werden, um sowohl dekursive als auch antizipative Verzinsungen zu berücksichtigen. Außerdem werden jene Fälle erleichtert, in denen die Zinsperioden nicht mit den Rentenperioden übereinstimmen.

Sind *m* und und *r* die Anzahl der Zins-, bzw. Rentenperioden pro Jahr, dann ergibt sich der für *i* einzusetzende Zinsfuß als:

$i = (1 + i_m)^{m/p} - 1$ ($= (1 - d_m)^{-m/p} - 1$ bei antizipativer Verzinsung)

Dabei ist i_m der für die jeweilige Zinsperiode gültige Zinsfuß. Dieser darf nicht mit dem nominellen Jahreszinsfuß oder Nennzinsfuß verwechselt werden.

Zur Verdeutlichung dieses Formelmechanismus werden im folgenden einige Aufgaben exemplarisch gelöst:

1) Ein Kredit über $15000 soll innerhalb von 4 Jahren durch gleiche Monatsraten bei einer nominellen Jahresverzinsung von 9% und monatlicher Kapitalisierung zurückgezahlt werden. Wie groß sind die Raten, wenn sie nachschüssig sein sollen?
A debt about $15000 must be paid off within 4 years by monthly payments. Yearly interest rate is 9%, monthly compounding periods. Find the payments being due at the end of each period.
Antwort/Answer: $373.20

#1: $\mathrm{PMT}\left(\frac{9\%}{12}, 48, 15000\right)$

#2: -373.28

2) Gleiche Angabe wie bei 1), aber vorschüssige Zahlungen und jährliche Kapitalisierung bei *d* = 9% (antizipativ!)
Same problem as 1), but payments are due at the begin, yearly compounding periods with a discout d = 9%.
Antwort/*Answer:* $373,67

#3: $\mathrm{PMT}((1 - 9\%)^{-1/12} - 1, 48, 15000, 0, 1)$

#4: -373.6711516

3) Jemand legt DM 1000 auf ein Konto und erhöht den Betrag ab sofort durch Zahlungen von je DM 100 zu Beginn eines jeden Vierteljahres. Welcher Betrag steht nach 5 Jahren zur Verfügung, wenn die Bank
a) halbjährlich mit 2,75% verzinst?
b) vierteljährlich mit 1,5% verzinst?
A person puts DM 1000 on an account and increases this amount by quarterly payments of DM 100, beginning immediately. What is the balance after five years, if the bank gives interests of
a) 2.75% per semester
b) 1.5% quarterly
Antwort/*Answer:* a) DM 3624,85; b) DM 3693,91

#5: $\mathrm{FVAL}((1 + 2.75\%)^{2/4} - 1, 20, -100, -1000, 1)$

#6: 3624.845969

#7: FVAL(1.5%, 20, -100, -1000, 1)

#8: 3693.907217

4) Ein Kapital von \$100000 soll durch nachschüssige Semesterraten von \$1500 angesammelt werden. Wieviele volle Zahlungen sind bei 3% nomineller Jahresverzinsung notwendig?
An amount of \$100000 shall be accumulated by payments due at the and of half-year´s periods. How many full payments are necessary gaining 3% interests per year periods?
Antwort/*Answer:* 46

#9: $\text{NPER}\left((1 + 3\%)^{1/2} - 1, -1500, 0, 100000\right)$

#10: 46.64

5) Auf welchen Betrag wachsen ATS 3000 nach 7 Jahren und 5 Monaten an, wenn sie mit 8,5% Jahresverzinsung (theoretisch) angelegt werden können?
What is the future value of ATS 3000 after 7 years and 5 months at an APR of 8.5%?
Antwort/*Answer:* ATS 5494,04

#11: $\text{FVAL}\left(8.5\%, 7 + \frac{5}{12}, 0, -3000\right)$

#12: 5494.039948

6) Wie hoch muß ein Fonds angelegt werden, daß daraus für alle Zeiten jährliche Stipendien in der Gesamthöhe von 25000 am Anfang jedes Jahres gewährt werden können, wenn eine nominelle Jahresverzinsung von 10% bei vierteljährlicher Kapitalisierung für die Geldanlage garantiert wird?
What is the requested amount for being able to pay annual grants of 25000 for all times in the future, if a yearly interest rate of 10% with quarterly compounding periods is guaranteed.
Antwort/*Answer:* 265817,88

#13: $\text{PVAL}\left((1 + 2.5\%)^{4} - 1, \infty, -25000, 0, 1\right)$

#14: 265817.8777

7) Ein Auto mit dem Listenpreis von 144720ATS kann bei einer Anzahlung von 30000ATS auf 24 nachchüssige Monatsraten zu je 5439ATS erstanden werden. Welcher Effektivverzinsung entspricht dies?
A person buys a car for 144720ATS. She pays a deposit of 30000ATS and the rest by monthly payments of 5439ATS each. What is the interest rate of this payment by instalments?
Antwort/*Answer:* 13,48%

Man lädt die Datei ANNUITY.MTH mit der **Merge**-Option und verfährt wie oben gesagt:

$$\#15:\ v\,(1+i)^n + p\,(1+i\,t)\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} + f = 0$$

$$\#16:\ 114720\,(1+i)^{24} + (-5439)\,(1+i\,0)\,\frac{(1+i)^{24} - 1}{i} + 0 = 0$$

#17: i = 0.0106

Die Effektivverzinsung erhält man aber erst, wenn der für die Zinsperiode - für ein Monat - geltende Zinsfuß mit der Äquivalenzgleichung in den gleichwertigen Jahreszinsfuß umgerechnet wird:

$$\#18:\ eff\_zins = 100\,((1 + 0.0106)^{12} - 1)$$

#19: eff_zins = 13.48

Damit ergibt sich eine tatsächliche Verzinsung von 13.48% jährlich.
In der neuen Version geht der erste Schritt viel einfacher:
The new DERIVE-version is much more comfortable:

#20: RATE(24, −5439, 114720)

#21: 0.01060120276

Wenn man viel mit finanzmathematischen Problemen zu tun hat. Wenn man unterjährige Verzinsungen, dekursive und antizipative Verzinsungen berücksichtigen muß, zahlt es sich aus, eine Datei mit erweiterten finanzmathematischen Funktionen, die diese Optionen bieten bereitzustellen. Bei Bedarf kann auf diese FIN2.MTH-Datei zurückgegriffen werden. Dabei führen wir einige zusätzliche Parameter ein, und ersparen uns damit lästige Umrechnungen.

For more special problems it is helpful to create your own financial mathematics utility file, like FIN2.MTH. We include additional parameters into the functions and avoid boring calculations considering payment- and compounding periods.

$$\#1:\ PVX(i, m, n, r, p, f, t, k) := PVAL\left(\left(1 + \frac{k\,i}{m}\right)^{k\,m/r} - 1, n, p, f, t\right)$$

$$\#2:\ FVX(i, m, n, r, p, v, t, k) := FVAL\left(\left(1 + \frac{k\,i}{m}\right)^{k\,m/r} - 1, n, p, v, t\right)$$

$$\#3:\ PMX(i, m, n, r, v, f, t, k) := PMT\left(\left(1 + \frac{k\,i}{m}\right)^{k\,m/r} - 1, n, v, f, t\right)$$

$$\#4:\ NPX(i, m, r, p, v, f, t, k) := NPER\left(\left(1 + \frac{k\,i}{m}\right)^{k\,m/r} - 1, p, v, f, t\right)$$

#5: $J(i\_, r, k) := (1 + k\ i\_)^{k\ r} - 1$

#6: $F(i\_, r, k) := 1 - (1 + k\ i\_)^{-k\ r}$

#7: $I\_F(i, m, n, k) := \left(1 + \frac{k\ i}{m}\right)^{k\ n\ m}$

Dabei haben die neuen Funktionen und Parameter die folgenden Bedeutungen:
PVX, FVX, PMX und NPX ersetzen PVAL, FVAL, PMT und NPER in dieser Reihenfolge

The new functions PVX, FVX, PMX and NPX shall substitute PVAL, FVAL, PMT and NPER in this order.

p,n,v,f,t	behalten ihre Bedeutung / *remain the same*
i	immer der (nom.) jahreszins oder –diskont *always the annual interest rate (or discount)*
*i_*	Zinsfuß für die Zinsperiode *interest rate for compounding period*
m	Anzahl der Zinsperioden/Jahr *number of compounding periods/year*
r	Anzahl der Rentenperioden/Jahr *number of payments/year*
k	Schlüssel für die Verzinsungsart *key for the kind of interest* *k* = 1 dekursiv (Zins/*interests i*) *k* = -1 antizipativ (Diskont/*discount d*)

- **J(i_,r,k)** ergibt den äquivalenten Jahreszins zum Zins/Diskont i_, der für die jeweilige Zinsperiode gilt.
gives the equivalent annual interest to the interest/discount given for respective comp.-period.

- **F(i_,r,k)** ergibt analog den äquivalenten Jahresdiskont.
gives the equivalent annual discount.

- **I_F(i,m,n,k)** ist der in der Finanzmathematik so wichtige Auf- (*n*>0) oder Abzinsungsfaktor (*n*<0). Dabei ist *n* die Zeit in Jahren.
is the very important factor for calculating future values (n>0) or present values (n<0) with n being time in years.

Zuerst sollen die angegebenen Musteraufgaben 1) – 7) mit diesen erweiterten Funktionen berechnet werden:

In the following examples 1) – 7) from above shall be treated by using these extended functions.

```
Beispiel 1:     #13:  PMX(9%, 12, 48, 12, 15000, 0, 0, 1)
                #14:  -373.27563

Beispiel 2:     #15:  PMX(9%, 1, 48, 12, 15000, 0, 1, -1)
                #16:  -373.671

Beispiel 3:     #17:  FVX(5.5%, 2, 20, 4, -100, -1000, 1, 1)
                #18:  3624.84
                #19:  FVX(6%, 4, 20, 4, -100, -1000, 1, 1)
                #20:  3693.9

Beispiel 4:     #21:  NPX(3%, 1, 2, -1500, 0, 100000, 0, 1)
                #22:  46.649086

Beispiel 5:     alte Funktion reicht aus

Beispiel 6:     #23:  PVX(10%, 4, –, 1, -25000, 0, 1, 1)
                #24:  265817.8777

Beispiel 7:     #25:  J(0.0106, 12, 1)
                #26:  0.1348841400

oder gleich direkt:

                #27:  J(RATE(24, -5439, 114720), 12, 1)
                #28:  0.1349003483
```

Im Anschluß möchte ich zur Verdeutlichung der Arbeit mit den finanzmathematischen Funktionen noch einige zusätzliche Aufgaben bearbeiten:

In order to demonstrate working with financial maths function I will solve some additional problems:

8) Ermittle die äquivalenten Jahreszinsfüße, bzw. Jahresdiskonte
find the equivalent yearly interest/discount rates
   a) 6,25% Semesterverzinsung *interest rate per semester*
   b) 14,4% Jahresnenndiskont bei monatlicher Kapitalisierung *discount/year by monthly compounding periods*
   c) 0,25% Diskont pro Quartal / *quarterly discount*

   Antwort/*Answer:* 12.89%, 15,59%, 1,01%; 11,42%, 13,49%, 1%

```
#29:  100 [J(6.25%, 2, 1), J(1.2%, 12, 1), J(0.25%, 4, –1)]
#30:  [12.8906, 15.3894, 1.00628]

#31:  100 [F(6.25%, 2, 1), F(1.2%, 12, 1), F(0.25%, 4, –1)]
#32:  [11.4186, 13.3369, 0.996256]
```

9) Wie lange dauert es bei einem Quartalsdiskont von 2% bis ein Kapital von 2000 auf 1500 gesunken ist?
How long will it last for a principal of 2000 to decrease at 1500 at a quarterly discount rate of 2%?
Antwort/*Answer:* 3,56 Jahre / *3.56 years*

#33: 1500 I_F(8%, 4, n, −1) = 2000

Natürlich wäre auch 2000 I_F(8%, -4, n, -1) = 1500 möglich. Nach **Simplify**, **soLve** und geeigneter Wahl von **Precision** und **Notation** ergibt sich

#34: n = 3.55994

10) Zu welchem antizipativen Semesterzinsfuß müssen DM 350.- angelegt werden, damit sie in 5 Jahren auf DM 439,44 anwachsen?
Which semester-discount will 350DM make to 439,44DM within 5 years?
Antwort/*Answer:* 2.25%

#35: 350 I_F(i, 2, 5, −1) = 439.44

#36: i = 0.0449996

und der Semesterdiskont ist dann die Hälfte: ~ 2,25%
Der Nachvollzug des traditionellen Weges wäre:

#37: $$\frac{350}{\left(1 - \frac{d}{100}\right)^{10}} = 439.44$$

#38: d = 2.24998

Ich schließe mit drei komplexeren Aufgabenstellungen / *I´ll close with three more complex tasks:*

11) 8000ATS sind durch 10 Jahre am Beginn des Jahres fällig; überdies sind 3000ATS durch 5 Jahre semesterweise vorschüssig zu zahlen, aber erst in 11 Jahren beginnend. Beide Schulden sind durch nachschüssige, sofort beginnende, Monatsraten in 20 Jahren abzutragen. Wie groß sind die Raten bei i = 4% und halbj. Kapitalisierung?
8000ATS must be paid through 10 years at the begin of the year, beside that 3000ATS must be paid through 5 years semi-annually at the begin of the periods. The first of these payments is due in 11 years. Repayment of both debts shall be replaced by monthly payments due at the end of each months within the next 20 years. What are these payments at i = 4% and semi-annually compounding periods?

Antwort/*Answer:* 514,54ATS

```
#39:  PMX(4%,2,240,12,PVX(4%,2,10,1,8000,0,1,1)+
                PVX(4%,2,10,2,3000,0,1,1) I_F(4%,2,-11,1),0,0,1)

#40:  514.539
```

12) Für den Kauf einer Realität wird die folgende Zahlungsmodalität festgelegt:

zuerst 6 Jahre vorschüssig S 40000.-,
dann 3 Jahre keine Zahlungen und
zuletzt 6 Jahre vorschüssig S 20000.-

Bewerte diese Forderung 1 Jahr nach der letzten Zahlung!

For buying of a property the following payments are fixed:

for the first 6 years S 40000 annually (begin of year)
then 3 years no payments and
finally again 6 years with annuities of 20000 (begin).

Evaluate the selling price one year after last payment!

Antwort/*Answer:* 826074.39

```
#41:  FVX(8%, 4, 6, 1, 40000, 0, 1, -1) I_F(8%, 4, 9, -1) +
      FVX(8%, 4, 6, 1, 20000, 0, 1, -1)

#42:  -826074.39
```

13) Ein großer Keller soll mit Kosten von 12 Millionen als Parkgarage adaptiert werden. Die halbj. nachsch. anfallenden Betriebskosten werden auf ca. 350000.- geschätzt. Nach 4 Jahren und dann alle weiteren 4 Jahre wird mit kleineren Investitionen in der Höhe von ca. 50000.- gerechnet. Wie hoch muß die, im voraus zu bezahlende Monatsmiete für die nächsten 15 Jahre bemessen werden, wenn sich die Anlage in diesem Zeitraum amortisieren soll?
Man plant Stellplätze für ca. 220PKW. Als Zinssatz werden 10% angesetzt.

A large cellar shall be adapted as a parking garage (estimated cost 12 million), semiannually operating costs are estimated as approx. 35000 (due at the end of each period). After four years and then in intervals of four years little investments (50000 each) are planned. What should be the monthly rent (due at the begin of each months) for the next 15 years if the garage should be paid off within this time? Work with an interest rate 10%.

Antwort/*Answer:* 828.65

Achten Sie bitte auf die Vorzeichen der Beträge!
Take care of the signs of the the amounts!

#43: $$\frac{\text{PMX}\left(10\%, 1, 15\ 12, 12, 12000000 + \text{PVX}(10\%, 1, 30, 2, -350000, 0, 0, 1) + \text{PVX}\left(10\%, 1, 3, \frac{1}{4}, -50000, 0, 0, 1\right), 0, 1, 1\right)}{220}$$

#44: -828.654

2. Investitionsrechnung *Cost-Benefit-Analysis*

Die Investitionsrechung stellt eine wichtige Anwendung der Finanzmathematik dar. Mit ihrer Hilfe wird sowohl die Investionswürdigkeit eines I.vorhabens beurteilt, wie auch die Entscheidung zwischen mehreren I.plänen erleichtert.

Bei den dynamischen Investitionsrechnungsmethoden unterscheidet man:

- die *Kapitalwertmethode*,
- die *Annuitätenmethode* und
- die *Methode des internen Zinsfußes*.

Bei allen Methoden werden die für die Investition getätigten Ausgaben den aus der Investition zurückfließenden Einnahmen gegenübergestellt. In einem Auszahlungsvektor A können wir die Zahlungen und ihre Fälligkeiten (Ende des jeweiligen Jahres) darstellen. Es ist nicht Zeit und Ort die Investitionsrechnung im Detail zu erklären, aber für den Mathematiker ist es verlockend mit Hilfe von Derive auch in diesem Zusammenhang mit Gewinn Elemente des Vektorkalküls einzusetzen.

When organizations evaluate the finacial feasibility of investment decisions, the time value of money is an essential consideration. There are static methods of calculation and dynamic investment calculation methods. The second ones are an important application of financial mathematics.
We have three important methods:

- *the method of Net Present Value (NPV) or Goodwill*
- *the annuity method*
- *the method of internal rate of return*

In all methods we consider the the discounted cash flows (positive for revenues and negative for expenses. I recommend to save expressions #1 to #7 in a file INVEST.MTH in order to load it if necessary.

Mit AUSZAHL wird zuerst ein freier Vektor als Konstante defininiert. In diesen Vektor sind dann der Reihe nach die Zahlungen im Jahr *j* (Kosten sind negativ) und die "Jahresnummer" *j* selbst einzusetzen. Das Beispiel wird dies erläutern.

#1: AUSZAHL := []

#2: $N := \dfrac{\text{DIMENSION(AUSZAHL)}}{2}$

#3: ZAHL(j) := ELEMENT(AUSZAHL, 2·j)

#4: ZEIT(j) := ELEMENT(AUSZAHL, 2·j − 1)

#5: $V(i) := \dfrac{1}{1 + i\%}$

#6: $KW(i) := \sum_{j=1}^{N} ZAHL(j)\cdot V(i)^{ZEIT(j)}$

#7: $ANN(i) := \dfrac{KW(i)\cdot i\%}{1 - V(i)^{ZEIT(n)}}$

AUSZAHL is a list containing the dates and the amounts of the cash flows. ZAHL(j) is the cash flow of year j. KW(i) is the NPV at an internal rate of return i and ANN(i) gives the annuities which are equivalent to the cash flow.

Dabei sind:

- KW(i) der Kapitalwert beim Kalkulationszinsfuß i Prozent,
- ANN(i) die Gewinnannuität (Quasirente) bei i Prozent.

In den Ausdrücken #3 und #4 werden die Zahlungen und die Fälligkeiten aus dem Auszahlungsvektor gelöst. In #4 definiere ich den Abzinsungsfaktor für den gegebenen Kalkulationszinsfuß *i* (in Prozent), der vom Investitionseigner aus verschiedenen Überlegungen heraus festgelegt wird (Alternativrenditen, erwartete Mindestrendite, Entwicklung am Geldmarkt, Berücksichtigung eines Investitionsrisikos u.a.).

Der *Kapitalwert* (*Goodwill*) ist dann die Differenz aus dem Barwert aller Erträge aus der Investition und dem Barwert aller Kosten für die Investition.

Die *Annuitätenmethode* legt den Goodwill in eine Jahresrente um und berechnet sogenannte *Quasirenten*. Damit lassen sich leichter Investitionen mit unterschiedlichen Nutzungsdauern vergleichen, wobei aber unterschiedliche Kapitaleinsätze keine Berücksichtigung finden.

Das macht erst die häufigst angewandte Methode - die *Methode des internen Zinsfußes* - , welche die tatsächliche Rendite der Investition bestimmt. Das ist nun jene Jahresverzinsung, bei der der Kapitalwert den Wert 0 annimmt.

Das soll an einem kleinen Beispiel demonstriert werden:

14) Eine Investition mit den Anschaffungskosten von $180000.- verspricht für das 2. Jahr der Inbetriebnahme den Gewinn $40000., im nächsten Jahr $50000.-, nach einem ausgeglichen Jahr dann wieder hintereinander Gewinne von $110000.- und $35000.- und nach einem weiteren ausgeglichenen Jahr schließlich nochmals $25000.-.

a) Ist die Investition bei einer erwarteten Mindestrendite von 8% zu empfehlen?
b) Wie groß ist die Gewinnannuität bei einem Kalkulationszinsfuß von 9,5%?
c) Gib' eine übersichtliche Darstellung der Kapitalwerte und der Gewinnannuitäten für i = 8% bis i = 12% bei einer Schrittweite von 0,5%.
d) Wie hoch ist die Effektivverzinsung (der interne Zinsfuß)?

An investment with initial cost of $180000 is estimated to earn $40000 for the 2nd year and $50000 for the 3rd year after start of operating. The 4th year seems to be balanced but for the following two years one can expect cash flows of $110000 and $35000. The next year will show now cash flow and the final year is expected to make $25000.

a) Would you recommend to undertake this investment expecting a minimum rate of return of 8%?
b) What are the profit-annuities applying an interest rate of 9.5%?
c) Give a neat representation of the NPVs and the respective annuities depending on the internal rates of return for i = 8% to i = 12% with an increment of 0.5%.
d) What is the effective interest rate (the actual rate of return) of this investment?

Die Datenliste AUSZAHL wird erzeugt / *Generate the data list.*

a)

```
#8:  AUSZAHL := [0,-180000,2,40000,3,50000,5,110000,6,35000,8,25000]

#9:  KW(8)

#10: 4411.975590

#11: ANN(8)

#12: 767.74887
```

Der Kapitalwert ist ca $4412, was einer Gewinnannuität $768 über die Nutzungsdauer von insgesamt 8 Jahren entspricht. Da ein positiver Kapitalwert vorliegt, ist die Investition in diesem Fall anzuraten. Es wird eine Kapitalverzinsung von über 8% erreicht – wenn die Prognosen über die zu erwartenden cash flows stimmen.

We have an NPV of $4412, which is equivalent to profit-annuities of $768 over service life. As NPV is positive we could recommend this investment and we have a return of investment above 8% - if the forecasts concerning the future cash flows will hold.

b)

#13: ANN(9.5)

#14: −1156.203037

9,5% sind da aber nicht zu verdienen! Die negativen Gewinnannuitäten sprechen eine deutliche Sprache.

We cannot expect an internalt rate of return of 9.5% - the annuities are negative.

c)
Der Einsatz des VECTOR-Befehls macht eine Übersicht leicht möglich. Wenn man die Grenzen bei gleichzeitiger Verkleinerung des Inkrements einengt, kann man sehr schön eine händische Intervallschachtelung nachvollziehen.

The VECTOR command makes it easy to produce a table, which can be used to find the actual internal rate of return by a decimal search.

#15: VECTOR([i, KW(i), ANN(i)], i, 8, 12, 0.5)

#16:

8	4411.97559	767.748876
8.5	748.4273186	132.7191053
9	-2815.16034	-508.6273429
9.5	-6282.15499	-1156.203037
10	-9655.79112	-1809.92028
10.5	-12939.17609	-2469.691177
11	-16135.29584	-3135.427699
11.5	-19247.02028	-3807.04175
12	-22277.10843	-4484.445225

#17: VECTOR([i, KW(i), ANN(i)], i, 8.5, 9, 0.1)

#18:

8.5	748.4273186	132.7191053
8.6	27.82266789	4.952356482
8.7	-688.8113790	-123.0663620
8.8	-1401.501975	-251.3363513
8.9	-2110.276057	-379.8569116
9	-2815.160340	-508.6273431

#19: VECTOR([i, KW(i), ANN(i)], i, 8.6, 8.7, 0.01)

8.6	27.82266804	4.952356508
8.61	-44.01896410	-7.838188251
8.62	-115.8209176	-20.63125202

Anstelle des VECTOR-Befehls verwenden wir heute (*DERIVE* 5) TABLE.

#20: TABLE([KW(i), ANN(i)], i, 8, 12, 0.5)

8	4411.97559	767.748876
8.5	748.4273186	132.7191053
9	-2815.16034	-508.6273431

d)

Und wenn wir diese Gleichung (beachten Sie **Precision** und **Notation**!) lösen, erhalten wir sofort ca. 8,6% als Rendite der Investition – aber nur unter der Voraussetzung, dass man alle Kapitalrückflüsse (Gewinne) unter diesem Zinsfuß wiederveranlagen kann.

The actual (effective) internal rate of return is the interest rate which gives an NPV = 0 – under the assumption that all cash flows can be again invested at this rate of interest!

#20: KW(i) = 0

#21: i = 8.603872122

wird fortgesetzt / *this article will be continued*