THE DERIVE - NEWSLETTER #2

THE BULLETIN OF THE DERIVE USER GROUP

C o n t e n t s:

April 1991

reprint 2004

001/91 Linz, A
002/91 Plettenberg, D
003/91 Graz, A
004/91 Wels, A
005/91 Zams, A
006/91 Wien, A
007/91 Linz, A
008/91 Ettlingen, D
009/91 Wien, A
010/91 Graz, A
011/91 Wien, A
012/91 St. Florian, A
013/91 Wien, A
014/91 München, D
015/91 Braunschweig, D
016/91 Stegen, D
017/91 Müllheim, D
018/91 Rehlingen, D
019/91 Weinstadt, D
020/91 Wassenberg, D
021/91 Wuppertal, D
022/91 Köln, D
023/91 Osnabrück, D
024/91 Wil, CH
025/91 Innsbruck, A
026/91 Admont, A
027/91 Fürstenfeld, A
028/91 Hannover, D
029/91 Düsseldorf, D
030/91 Kaufbeuren, D
031/91 München, D
032/91 Wien, A
033/91 Darmstadt, D
034/91 Strasbourg, F
035/91 Koblenz, D
036/91 Bielefeld, D
037/91 Ljungby, S
038/91 Vechta, D
039/91 Stuttgart, D
040/91 Germersheim, D
041/91 Schwäbisch Hall, D
042/91 Öhningen, D
043/91 Stockholm, S
044/91 Brugge, B
045/91 Altena, D
046/91 Linz, A
047/91 Bern, CH
048/91 Kaiserslautern, D
049/91 Berlin, D
050/91 Wien, A
051/91 Amsterdam, NL
052/91 Berlin, D
053/91 Stoke Poges, GBR
054/91 Zeist, NL
055/91 Trondheim, N
056/91 Kirkel-Neuh„usel, D
057/91 Coutances, F
058/91 Ekenäs, SF
059/91 Hamburg, D
060/91 Hollabrunn, A
061/91 Passau, D
062/91 Dundee, GBR
063/91 Innsbruck, A
064/91 Aschen, D
065/91 Siegen, D
066/91 Düsseldorf, D
067/91 Köln, D
068/91 Düsseldorf, D
069/91 Zuoz, CH
070/91 Kristianstad, S
071/91 Novara, I
072/91 Onsala, S
073/91 Ijsselstein, NL
074/91 Ludwigsburg, D
075/91 Cork, IRL
076/91 Dierdorf, D
077/91 Schwäbisch Hall, D
078/91 Kiel, D
079/91 Hamburg, D
080/91 Castrop-Rauxel, D
081/91 Tromsoe, N
082/91 Tampere, SF
083/91 Pioltello, I
084/91 Reinbek, D
085/91 St. Pölten, A
086/91 Alfter, D
087/91 Wolfach, D
088/91 Dietlikon, CH
089/91 Berlin, D
090/91 Plymouth, GBR
091/91 Karlsruhe, D
092/91 Müllheim, D
093/91 Novi Sad, YU
094/91 Stockholm, S
095/91 Freiburg, D
096/91 Leicester, GBR
097/91 Patrica, I
098/91 Perugia, I
099/91 Wieslach, D
100/91 London, GBR

(see more last page)

Lieber Derive Anwender!

Das Echo auf D-N-L#1 war gewichtig, nicht so sehr in quantitativer als vielmehr in qualitativer Hinsicht. Bis jetzt (7.April) hat die DUG 128 Mitglieder, darunter viele Hochschulprofessoren, Hochschulinstitute und Anwender aus Industrie und Forschung. Ich ersuche alle Derive User - besonders jene aus Lehre, Forschung und/oder Industrie mit uns über ihre speziellen Derive-Anwendungen in Kontakt zu treten. So können wir die Bandbreite der Möglichkeiten und Grenzen von Derive für alle allmählich erweitern.

In dieser Ausgabe werden zwei Beiträge beendet, ein neuer - über DGL begonnen. Im weiteren sollen in loser Folge die Utility-Files besprochen werden. Vielleicht könnten Mitglieder der User Group spezielle Files besprechen, bzw. verbessern oder ergänzen?

Einen Schwerpunkt will ich noch besonders betonen: Mathematik ist schön, das wissen die Mathematiker nicht erst seit dem Blick in die faszinierende Welt der Fraktale und des Chaos. Auch die Schönheit eines Beweises, einer Formulierung, eines Algorithmus kann begeistern. Derive läßt dank seiner kombinierten rechnerisch-graphischen Fähigkeiten die Schönheit der Mathematik erkennen. So sind in diese Ausgabe Graphiken eingestreut, die leicht mit dem `VECTOR`-Befehl als Kurvenscharen erzeugt werden können. Ich möchte Sie auffordern, selbst in dieser Richtung zu experimentieren. Lassen Sie sich überraschen und schicken Sie mir bitte Ihre "schönsten" Bilder - was immer das heißen mag. Ich glaube, daß auch Schüler und Studenten (und Lehrer!) an diesem Experimentieren mit Winkel-, Exponential- und anderen Funktionen, mit und ohne Parameterdarstellung großen Nutzen ziehen können. Spielerisch lassen sich Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten dieser Funktionen erkennen und später nutzen.

Nun noch eine Entschuldigung: aus einem technischen Versehen wurde bei D-N-L#1 das Erscheinungs-datum mit Jänner 1990 angegeben; natürlich war der Jänner 1991 gemeint. Dies ist nun die echte Nummer 2 aus April 1991.

Von einigen wenigen Mitgliedern ist bis jetzt nur die Anmeldung eingelangt, die wir mit Freude registriert haben. Leider wurde noch nicht der Mitgliedsbeitrag beglichen. Wir bitten Sie, den Mitgliedsbeitrag (öS 300.- für Österreich, bzw. DM 45.- als Scheck vom Ausland - sonst sind die Bankspesen zu hoch) zu entrichten. Der Mitgliedsbeitrag dient zur Gänze der Begleichung der Gestehungskosten des D-N-L.

Mit den besten Grüßen

Dear Derive User!

D-N-L #1 has met with a fairly lively response, not so much in quantitative than rather in qualitative respect. Up to now (7 April) 128 members have joined the DUG. Among them there are a lot of university professors and university institutes, teachers as well as users coming from research and industry. I would like to ask all Derive Users, especially those coming from teaching, re-search and/or industry, to contact us with regard to their experiences made with their special applications of Derive. In this way we will be able to expand the range of Derive's possibilities and limits by and by.

In this issue two contributions are finished and a new one - concerning ODEs - is started. In the following issues other utility files will be reviewed. I wonder if some members of the DUG might discuss, complete or improve a special file?

Let me now put special emphasis on the underlying theme to one of the central topics of this issue: Mathematics is beautiful. As a matter of fact, mathematicians have come to recognize this not only since they started throwing glances at the fascinating world of fractals and chaos. There is indeed, believe it or not, a beauty to be found in a proof, a particular formulation or an algorithm which one may well get enthusiastic about. Due to Derive it is easy to perceive this beauty of maths thanks to its combined calculating-graphic capabilities. This is to be illustrated by means of plots, which are included in this as well as in later issues and can easily be generated as families of curves by applying the VECTOR-command. I want to invite you to experiment yourself in this direction and just to be surprised by the results. I would be glad to receive your "most beautiful" pictures, whatever this may mean. As far as I am concerned, I would feel that pupils, students (and maybe their teachers) may derive great profit from this working with trigonometric, exponential and other functions using or not the parametric form. The properties and regularities of these functions may be recognized in a playful manner and exploited for later use.

Last but not least an apology: because of a technical mistake the publishing date of D-N-L #1 was indicated as January 1990. What was meant, of course, was January 1991. This, however, is the true number 2 of April 1991.

At last a reminder: a few members have sent their applications, which have been accepted with pleasure, without however settling the membership dues of GM 45.- (or AS 300.- in Austria). Please be so kind to pay your dues (send a cheque for GM 45.- from outside Austria because of the considerable banking charges) needed to cover solely D-N-L-production and distribution costs. Let me thank you in advance for remitting promptly.

With best regards

The *Derive-News-Letter* is the Bulletin of the *Derive-User-Group*. It is published at least three times a year with a content of 30 pages minimum. The goals of the *D-N-L* is to enable the exchange of experiencies made with *Derive* as well as to create a group to discuss the possibilities of new methodic an didactic manners in teaching Mathematics.
Subscription of the *D-N-L* is restricted to Members of the *Derive-User-Group*. Membership-form is enclosed with the first issue you get.

Editor:
Mag. Josef Böhm
A-3042 Würmla
D'Lust 1
Austria

Contributions:

Please send all contributions to the above adress. Non-English speakers are encouraged to write their contributions in English to confirm the international touch of the *D-N-L*. At the other hand non-English articles will be warmly welcomed, too. Your contributions will be edited but not refereed. By submitting articles the author gives his consent for reprinting in the *D-N-L*. The more contributions you will send to the Editor the more livelier and richer in content the *Derive-News-Letter* will be.

Preview (Contributions for the next issues):

With ITERATES to Chaos
How to write one´s own DEMO-file
Solving ODE´s using DERIVE (Part 2)
More graphics

(will be published September 1991)

Impressum:
Medieninhaber: DERIVE User Group, A-3042 Würmla, D´Lust 1, AUSTRIA;
Richtung: Fachzeitschrift;
Herausgeber: Mag.Josef Böhm, Adresse wie oben;
Herstellung: eigene Vervielfältigung

DERIVE – User – Forum

E.-M. Baumgardt, Reinbek

...Ich habe Nachhilfeunterricht in allen mathematisch - naturwissenschaftlichen Fächern erteilt, solange ich aus familiären Gründen nicht außer Haus arbeiten konnte. DERIVE war mir und meinen SchülerInnen dabei sehr nützlich. Mit diesem Programm ließ sich auch völlig verunsicherten Jugendlichen zeigen, daß

1: der Mathematik mit gesundem Menschenverstand und mittelmäßigem Arbeitsaufwand beizukommen ist
2: auch die ekelhaftesten Mathe/Physiklehrer sehr zahm werden, sobald man sie fachlich an ihre Grenzen drängt
3: ein Computer zwar ein nützliches Hilfsmittel ist, einem aber kein Stück Denkarbeit abnimmt (siehe Nullstellen der Polynome vom Grad 4 und höher).

Im Übrigen hat der liebe Gott die Mathematik erfunden, um die Menschheit zu ergötzen und nicht, um arme Schüler zu ärgern.

Mein dringlichster Wunsch an DERIVE: eine Möglichkeit, Grafiken in einem gängigen Format abzuspeichern (PCX, TIFF, ...).

Für Herrn K. Schmidt einen besseren Wirkungsgrad!

D-N-L: You will find some hints for storing DERIVE-Graphics in this issue.

StD. R. Schorn, Kaufbeuren

Nachmittags gelesen und erschrocken, weil die Seitenzählung chaotisch ist (ein Wunder der Firma X... und deren Gebrauchsanweisung) und milde empört über den Brief des Herrn Dipl.-Ing. .Schmidt aus Köln.

Die Äußerungen des Herrn Schmidt entbehren weitgehend der Sachkenntnis. Die Verwendung von Taschenrechnern und Computern dient überwiegend nicht dem Mathematikunterricht, sondern wird bei der Berechnung von Näherungswerten gebraucht. Ohne Verwendung von Taschenrechnern dürfte die Beschäftigung mit Trigonometrie unmöglich sein. Oder sollen wir wieder mit Logarithmentafeln (habe ich vor über 40 Jahren machen müssen und die Freude an der Mathematik trotzdem nicht verloren) oder Rechenschiebern arbeiten? Die von Herrn Schmidt so genannten Dummen (angeblich n-2 Schüler einer Klasse) werden also schlagartig nach dem Abitur gescheit. O heilige Einfalt! Da könnte man noch einen ganzen Roman anhängen.

Ein Beispiel: Bei dem bekannten Beweis nach Euklid, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, braucht man das Produkt der ersten n Primzahlen und addiert 1.

#1: PRIMS(n) := ITERATES(NEXT_PRIME(v), v, 1, n)

#2: PRIMS(3)

#3: [1, 2, 3, 5]

#4: $\text{EUKLID}(m) := \left(\prod_{i=1}^{m+1} \text{ELEMENT}(\text{PRIMS}(m+1), i) \right) + 1$

#5: EUKLID(2)

#6: 7

#7: EUKLID(10)

{und das ergibt nach FACTOR:}

```
#9:  331·571·34231
#10: und nach FACTOR:
#11: EUKLID(20)
#12: 557940830126698960967415391
```

Dr. H.-J. Kayser, Düsseldorf

...Zu den sicher wohlgemeinten Ausführungen des Herrn Schmidt aus Köln, die "ins Grundsätzliche gingen" möchte ich mich nur ganz kurz äußern, (sonst - so fürchte ich, wird eine unendliche Geschichte daraus):
Wir haben an unserer Schule (Gymnasium) sehr positive Erfahrungen mit DERIVE gemacht. Der Mathematik-Unterricht konnte durch den Einsatz von DERIVE (gelegentlich aber auch mit anderen Computer-Programmen) in Verbindung mit einem LCD-Display lebendiger und effektiver gestaltet werden. über solche Erfahrungen wird demnächst in einer Schrift der Landesstelle für Schule und Weiterbildung, Soest sowie in Mathematik-Zeitschriften, z.B. MBU (Mathematik Betrifft Uns, Bergmoser und Höller Verlag, 5100 Aachen), berichtet werden. Auch Lehramtsanwärter beziehen die Arbeit mit dem Computer und insbesondere mit dem Programm DERIVE in ihre schriftlichen Examensarbeiten ein.

Pam Bishop, CTI, University of Birmingham

I would be delighted to accept your invitation to become founding vice president of the Pan-European DERIVE User Group. We have already published several articles about DERIVE in our own newsletters, and have set up a working group to share experiences of using DERIVE in higher education.

(Pam Bishop is Information Officer of the CTI - Computers in Teaching Initiative, University of Birmingham and University of Glasgow)

R. Stäblein, Universität Clausthal

Das Softwareprodukt wird von uns regelmäßig zur Überprüfung unserer Berechnungen eingesetzt. Ein immer wieder auftretendes Problem stellt dabei der Speicherplatz des Programmes dar. So ist das Berechnen einer inversen Matrix (3x3 komplex), das Berechnen von Eigenwerten usw. mit dem vom Programm zur Verfügung stehenden Speicher (DOS spezifisch nur 640 kB) auch mit leistungsfähigeren Maschinen mit sehr viel mehr Arbeitsspeicher unseres Wissens nach unter DOS nicht möglich und somit das Ausweichen auf andere Programme nötig (REDUCE).

D-N-L: See the answer from Soft Warehouse, Hawai

The extra 286 address space and expanded memory are not very suitable for list oriented programs such as computer algebra - the registers are still 16 bits and list structure requires arbitrarily tangled pointers throughout the entire total memory address space. Also, it is important to realize that going to 32-bit pointers will approximately double the memory to store a given expression and the size of DERIVE.EXE, making a 1.280 mb 32-bit system equivalent to a faster 640 kb 16Äbit system. Also computer-algebra data space requirements often grow exponentially with problem size so that even a ten-fold increase of memory yields only a meagre increase in the size of solvable problems.
Derive will not go to virtual memory because it would then become so large that it would require everyone to have a 286 or better and a hard disk. However, you can always explicitly temporarily save expressions to files then remove them from the algebra window to temporarily free up space.

M. Lauer, Pirmasens

Herr Lauer hat mehrere Probleme mit Derive 2.0:

1. Was bewirkt bei ITERATE der 4. Parameter n = -1?? (Vgl. INVERSE in MISC.MTH)
2. Die Programmierung von MOD in MISC.MTH sieht ja merkwürdig aus und liefert auch fehlerhafte Resultate:

   MOD(1234560,9876) = 61.7272 ! (richtig: 60 !)
3. Die rekursive Version von GCD (deutsches Handbuch S.225, engl. Manual p 214) ist nicht sehr brauchbar.
4. Ich vermisse eine Iteration mit offenem Ende (Abbruchbedingung):

   ITERATE(u, x, x0, b), wobei b eine Relation ist.

   Dies läßt sich zwar mit ITERATE (IF (NOT b, u, x), x, x0) simulieren, ist aber unschön.

5. Warum stellt DERIVE nicht alle Funktionen zur Verfügung, die es selbst benützt? Beispielsweise die des größten gemeinsamen Teilers GCD, die es beim Kürzen von Brüchen ja braucht?
6. Ich versuche, mit DERIVE einfache diophantische Gleichungen zu lösen:

   $a\,x + b\,y = c \qquad (a,b,c,x,y \in \mathbb{Z})$

D-N-L: Viele Fragen, daher mehrere Antworten. Hr. Lauer hat noch einige Bemerkungen, die nach Rückfrage in einer der nächsten Ausgaben behandelt werden können. Nun der Reihe nach:

1. Zum Parameter n = -1 in der Funktion INVERSE aus MISC.MTH:

   1: $\text{INVERSE}(u, x) := \text{ITERATE}(u, x, x, -1)$

   2: $\text{INVERSE}(x^3 + 1, x)$

   3: $(x - 1)^{1/3}$

   4: $\text{ITERATE}(x^3 + 1, x, (x - 1)^{1/3}, 1)$

   5: x

Ich suche die Umkehrfunktion zu $y = x^3 + 1$. Das ist aber jene Funktion g(x), die nach Anwendung der vorliegenden Iterationsvorschrift u ebenso den Term x erzeugt, wie aus x der Term f(x) erzeugt wird. Das ist also gleichsam der vorletzte Schritt, oder auch der -1. Schritt.

2. Die Funktion MOD funktioniert, wenn Sie im Exact Mode arbeiten.

   15: MOD (1234560, 9876)

   16: 60

3. GCD(123456,9876) funktioniert bei mir auch nicht. Interessanterweise geht aber GCD(1234560,9876) schon (= 12). Ich werde dieses Phänomen an Soft Warehouse weitergeben (gemeinsam mit Frage 5).

   Wenn Sie im Exact Mode arbeiten, sieht Ihr IQR(a,b) etwas bequemer aus (siehe Ausdruck). Hr. Lauer benötigt IQR(a,b) als Integer Quotient and Remainder der Division a/b.

17: GCD (m, n) := IF (n = 0, |m|, GCD (n, |m ∞ n|))

18: GCD (1234560, 9876)

19: 12

20: GCD (123456, 9876)

21: ”memory full!”

22: $\mathrm{IQR}(a,\ b) := \left[\mathrm{FLOOR}\left(\dfrac{a}{b},\ 1\right),\ \mathrm{MOD}(a,\ b)\right]$

23: IQR (123456, 9876)

24: [12, 4944]

25: IQR (1234560, 9876)

26: [125, 60]

4. Ich habe Herrn Lauer gebeten, Anwendungsmöglichkeiten dieser Iteration beizustellen:

   Hier verdopple ich den Anfangswert 3 solange bis 100 (bzw. 1000) überschritten werden k”nnte:

27: IT_UNTIL (u, x, x0, b) := ITERATE (IF (NOT b, u, x), x, x0)

28: IT_UNTIL (2 x, x, 3, 2 x > 100)

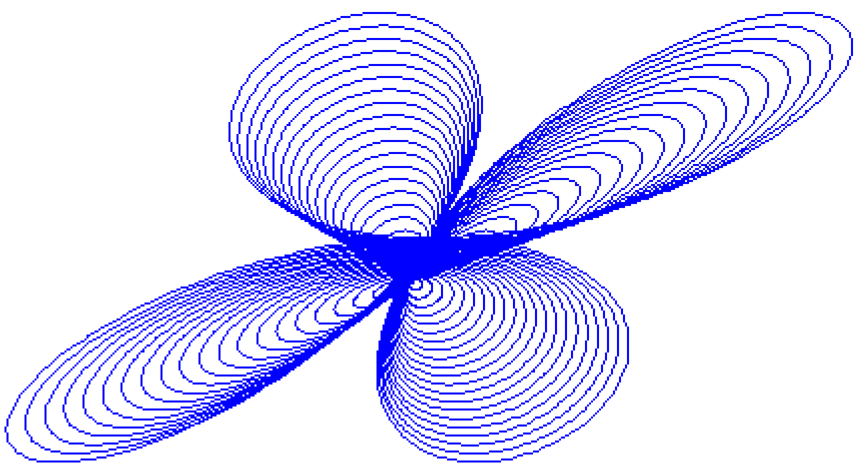
29: 96

30: ITS_UNTIL (u, x, x0, b) := ITERATES (IF (NOT b, u, x), x, x0)

31: ITS_UNTIL (2 x, x, 3, 2 x > 1000)

32: [3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 768]

6. Vielleicht haben sich andere DERIVE-User bereits mit diophantischen Gleichungen beschäftigt und können Herrn Lauer ihre Erfahrungen mitteilen?



$$\mathrm{VECTOR}\left(\left[0.002\cdot c - \frac{c}{20}\cdot \mathrm{COS}(t + 0.5)\cdot \mathrm{SIN}(2\cdot t),\ 0.005\cdot c + \frac{c}{30}\cdot \mathrm{SIN}(t)\cdot \mathrm{SIN}(2\cdot t)\right],\ c,\ 0,\ 84,\ 4\right)$$

Berechnung und graphische Darstellung der Cornu-Spirale mir DERIVE

Dr. F. Schumm, Stuttgart

Bemerkung: Über den Zusammenhang der Cornu'schen Spirale mit den Fresnelschen Beugungserscheinungen, siehe Joos: *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Seite 365 (1959). (Diese Kurve führt auch den Namen Klothoide. Sie ist eine transzendente ebene Kurve, deren Krümmung proportional zur Bogenlänge zunimmt und wird im Straßenbau verwendet da sie eine stetige Krümmungsänderung ermöglicht; siehe Wunderlich: *Darstellende Geometrie 2*, (1967))

Die Cornu'sche Spirale hat die folgende Parameterdarstellung mit dem Parameter a:

$$1:\quad X(a) := \int_0^a \mathrm{COS}\left(\frac{s^2\cdot\pi}{2}\right) ds \qquad 2:\quad Y(a) := -\int_0^a \mathrm{SIN}\left(\frac{s^2\cdot\pi}{2}\right) ds$$

Mit dem VECTOR-Kommando läßt sich rasch eine Wertetafel ermitteln. Um einen schnellen Überblick zu erhalten wählen wir die Grenzen 0 und 1 für den Parameter a mit einer Schrittweite 0.2:

```
3:   VECTOR ([a, X (a), Y (a)], a, 0, 1, 0.2)
```

nach Simplify und geeigneter Einstellung von Precision (Approximate) und Notation (Decimal) erhält man die folgende Tabelle:

$$4:\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.199 & -0.00418 \\ 0.4 & 0.397 & -0.0333 \\ 0.6 & 0.581 & -0.11 \\ 0.8 & 0.722 & -0.249 \\ 1 & 0.779 & -0.438 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{TABLE}([X(a),\ Y(a)],\ a,\ 0,\ 1,\ 0.2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.199 & -0.00418 \\ 0.4 & 0.397 & -0.0333 \\ 0.6 & 0.581 & -0.110 \\ 0.8 & 0.722 & -0.249 \\ 1 & 0.779 & -0.438 \end{bmatrix}$$

Use the TABLE-function in DERIVE 5

Um die Punkte mit Plot direkt zeichnen zu lassen, darf die Tabelle nur die Werte von x und y, und nicht zusätzlich die Parameterwerte von a enthalten, sonst erhält man die Fehlermeldung: "zuviele Variable". Daher löschen wir den Buchstaben a im Zeilenvektor [3:].

```
5:   VECTOR ([X (a), Y (a)], a, 0, 1, 0.2)
```

und erhalten nach neuerlichem Simplify:

$$6:\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.199 & -0.00418 \\ 0.397 & -0.0333 \\ 0.581 & -0.11 \\ 0.722 & -0.249 \\ 0.779 & -0.438 \end{bmatrix}$$

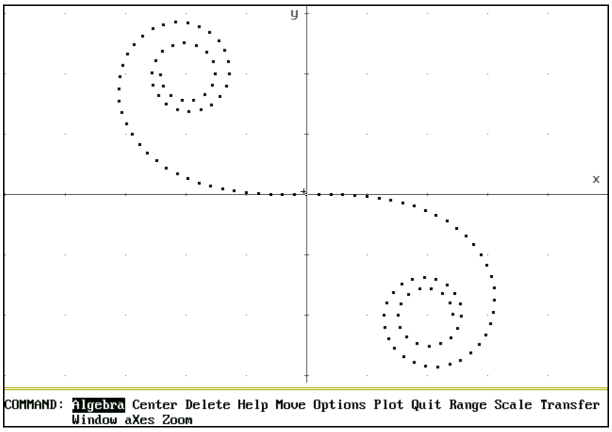
$$(\mathrm{TABLE}([X(a),\ Y(a)],\ a,\ 0,\ 1,\ 0.2))\ \mathrm{COL}\ [2,\ 3]$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.199 & -0.00418 \\ 0.397 & -0.0333 \end{bmatrix}$$

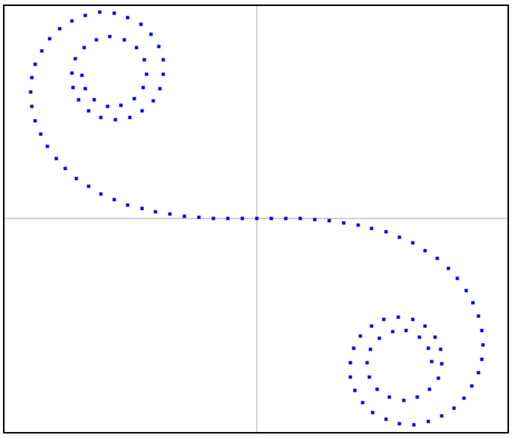
Again in Derive 5

Diese Punkte können unmittelbar mit Plot ausgedruckt werden. Da dies noch zuwenige Punkte sind, muß man Schrittweite und Grenzen entsprechend anpassen. Bei der folgenden Kombination dauert die Berechnung allerdings auf einem NEAT-AT einige Minuten:

```
7:    VECTOR ([X (a), Y (a)], a, -3, 3, 0.05)

8:    [[-0.605, 0.496], [-0.594, 0.448], [-0.562, 0.410], [-0.517, 0.390
      ], [-0.467, 0.391], [-0.423, 0.413], [-0.392, 0.452], [-0.38~
      ~0, 0.501], [-0.388, 0.549],.......

                               ....... [0.388, -0.549], [0.380, -0.501],
      [0.392, -0.452], [0.423, -0.413], [0.467, -0.391], [0.517, -0.390]
      , [0.562, -0.410], [0.594, -0.448], [0.605, -0.496]]
```

Das zugehörige Plot-Diagramm:

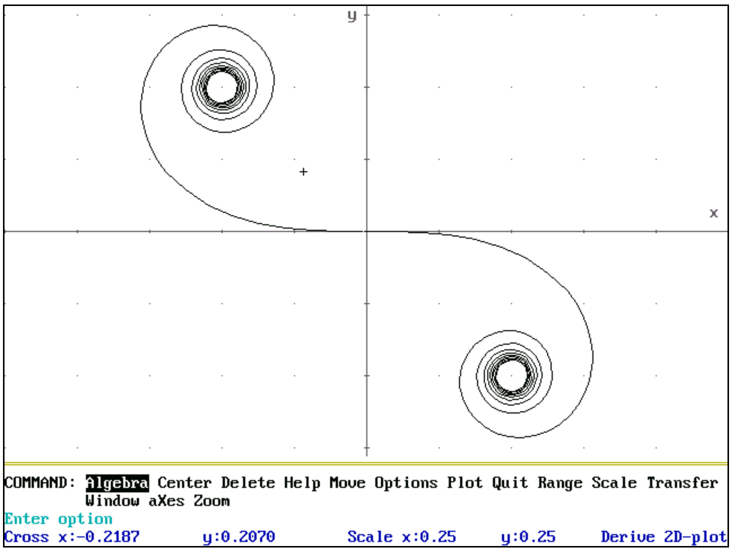


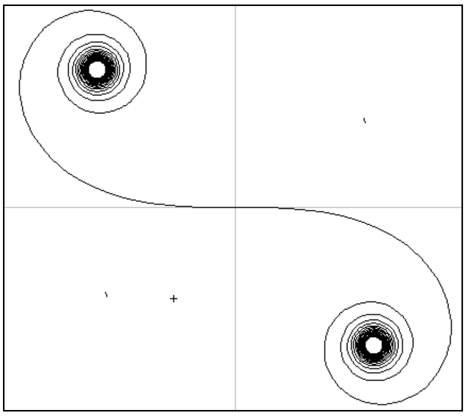


Plot in Derive 5

Man kann natürlich auch direkt die Parameterdarstellung in folgender Weise eingeben und die Kurve dann mit Plot ausdrucken. Der Zeitbedarf ist allerdings recht groß, bis die Graphik entstanden ist:

```
9: [X (a), Y (a)]
```





In späteren Derive – Versionen muss man die Datenpunkte nicht erst ausrechnen sondern wechselt gleich ins 2D-Plot-Fenster. Außerdem konnten früher die Punktgrößen nicht verändert werden.

Finanzmathematik mit Derive, Part 2

Josef Böhm, Würmla

3. Schuldtilgung (Tilgungspläne = Mortgage Tables)

Wenn längerfristige Kredite aufgenommen werden, ist es üblich, sogenannte "Tilgungspläne" zu erstellen, aus denen der Stand der Schuldrückzahlung ersichtlich ist. Für das Ende jeder Rückzahlungsperiode (i.a. Jahre) werden ausgewiesen:

- die aushaftende Restschuld (nach Zahlung der Annuität), [*remaining debt*]
- der Zinsenanteil, [*payment of interest*]
- der effektive Schuldendienst, - die Tilgungsquote, [*redemption rate*]
- und die Annuität. [*annuity*]

Nach dem Modus der Rückzahlung unterscheidet man nun die Arten der Tilgungspläne. Hier sollen einige vorgestellt und mit DERIVE berechnet werden.

3.1 Der unregelmäßige Tilgungsplan

15. Eine Schuld von 150000.- wird aufgenommen. Als Rückzahlungen werden für die ersten beiden Jahre 20000.- und 40000.- und für das 4. Jahr 65000.- vereinbart. Mit dem 6. Jahr soll die Rückzahlung abgeschlossen sein.
    Wie lautet der Tilgungsplan bei 10% Zinsen?

    A debt for 150000.- is borrowed. As repayments have been arranged 20000.- and 40000.- for the first two years and 65000.- for the 4th year. The paying back is to be settled within six years. What's the redemption table at an interest rate of 10%?

Wie bei der Investitionsrechnung definieren wir einen Vektor, in dem der Reihe nach zuerst das Zahlungsjahr und dann die Annuitäten angegeben werden. (*payments and when they are due are given in a vector*)

1: paym :=

2: $n := \dfrac{\text{DIM(paym)}}{2} + 1$

3: r(i) := 1 + i%

4: ann(j) := ELEMENT(paym, 2·j)

5: time(j) := ELEMENT(paym, 2·j − 1)

Ab DERIVE 2.xx werden konstante Größen mit Kleinbuchstaben bezeichne.

Mit einfachen Formeln der Finanzmathematik wird nun die Schlußannuität, das ist der Zahlungsrest am Ende der Laufzeit berechnet:

6: $\text{last\_ann}(k, i) := k\cdot r(i)^{n} - \sum_{j=1}^{n-1} \text{ann}(j)\cdot r(i)^{n - \text{time}(j)}$

REM_DEBT(k,i,h) ist die Restschuld nach Bezahlung der Annuität im h-ten Jahr der Rückzahlung: (*last annuity and remaining debts*)

7: $\text{rem\_debt}(k, i, h) := k\cdot r(i)^{h} - \sum_{j=1}^{h} \text{ann}(j)\cdot r(i)^{h - j}$

8: ints(k, i, h) := rem_debt(k, i, h − 1)·i%

In einer Zeile des Tilgungsplanes werden der Reihe nach ausgewiesen:

Jahr,	Restschuld,	Zinsendienst,	Schuldendienst,	Annuität
Year,	*Balance,*	*Interests,*	*Principal ,*	*Annuity*
(h)	Rh)	(Zh)	(th)	(Ah)

Anschließend wird wieder der so universell zu verwendende VECTOR-Befehl eingesetzt, um den Tilgungsplan - aber nur bis zur vorletzten Zeile - zusammenzusetzen.

```
9:   row_(k,i,h):=[h,rem_debt(k,i,h),ints(k,i,h),ann(h)−ints(k,i,h),ann(h)]
10:  titel := [["h","Rh","Zh","th","Ah"]]
11:  red_tab(k, i, m) := APPEND(titel, VECTOR(row_(k, i, h), h, m))
```

(*In Derive 2.xx hieß es noch ROW, aber in Version 5 ist ROW eine Funktion, APPEND musste damals als APPEND_VECTORS aus einer Utility-Datei geladen werden.*)

Die Terme 1: bis 11: könnten in einer Datei RED_TAB.MTH oder TPL.MTH abgelegt werden.

Nun zu **Beispiel 15:**

```
12:   paym := [1, 20000, 2, 40000, 3, 0, 4, 65000, 5, 0]
13:   last_ann(150000, 10)
14:   96309.95
```

Wir erweitern die Liste paym umd das Jahr 6 und die Schlußannuität und können mit red_tab(Kapital,Zinsfuß,Laufzeit) den kompletten Tilgungsplan abrufen.

```
15:   paym := [1, 20000, 2, 40000, 3, 0, 4, 65000, 5, 0, 6, 96309.95]
16:   red_tab(150000, 10, 6)
```

h	Rh	Zh	th	Ah
1	145000	15000	5000	20000
2	119500	14500	25500	40000
3	131450	11950	-11950	0
4	79595	13145	51855	65000
5	87554.5	7959.5	-7959.5	0
6	0	8755.45	87554.5	96309.95

Diese Behandlung hat noch zwei Schönheitsfehler:

die besondere Berechnung der Schlußannuität und ihre nachträgliche Einbindung in den Zahlungsvektor sowie die Nichtbeachtung einer allfälligen Rundung.

Die neue Version von *DERIVE* macht nun beides möglich:

Die Rundung wird im letzten Beispiel dieses Beitrags demonstriert. Der Rundungsalgorithmus auf n Nachkommastellen funktioniert folgendermaßen:

$$rd(x) = \frac{\mathrm{INT}(x \cdot 10^n + 0{,}5)}{10^n}$$

Dabei bedeutet INT(*a*) die größte ganze Zahl ≤ *a*. Diese Funktion wird von *DERIVE* in der Datei MISC.MTH unter dem Namen **FLOOR(x,1)** gemeinsam mit **MOD(x,1)** bereit gestellt. (*Jetzt sind FLOOR und MOD bereits implementiert.*)

In der Utility-Datei VECTOR.MTH findet man nun auch die Funktion **APPEND_VECTORS(u,v)**, mit der man Matrizen und Vektoren zusammenhängen kann. (*Das ist historisch, jetzt wird mit APPEND und ohne Nachladen gearbeitet.*)

Wir laden diesen Befehl aus VECTOR.MTH mit Merge zu den Ausdrücken von vorhin. Außerdem habe ich die möglicherweise nützliche Funktion:

PART_RT(Kapital,Zinsfuß,Anfangszeile,Endzeile)

definiert, mit der man den Tilgungsplanauch teilweise ausgeben kann.

18: part_rt(k, i, u, v) := VECTOR(row_(k, i, h), h, u, v)

19: red_tab(k, i) := APPEND(titel, part_rt(k, i, 1, n − 1), [[n, 0, rem_debt(k, i, n − 1), rem_debt(k, i, n − 1)·i%, rem_debt(k, i, n − 1)·r(i)]])

20: paym := [1, 20000, 2, 40000, 3, 0, 4, 65000, 5, 0]

Die Parameter k und i lassen sich auch als Konstante definieren.

21: [k := 150000, i := 10]

22: row_(k, i, 3)

23: [3, 131450, 11950, −11950, 0]

24: part_rt(k, i, 2, 5)

25: $\begin{bmatrix} 2 & 119500 & 14500 & 25500 & 40000 \\ 3 & 131450 & 11950 & -11950 & 0 \\ 4 & 79595 & 13145 & 51855 & 65000 \\ 5 & 87554.5 & 7959.5 & -7959.5 & 0 \end{bmatrix}$

Nun sofort und ohne weiteren Zwischenschritt zum kompletten Tilgungsplan:

26: red_tab(k, i)

h	Rh	Zh	th	Ah
1	145000	15000	5000	20000
2	119500	14500	25500	40000
3	131450	11950	-11950	0
4	79595	13145	51855	65000
5	87554.5	7959.5	-7959.5	0
6	0	87554.5	8755.45	96309.95

Und so ändert sich der Tilgungsplan, wenn der Zinsfuß um zwei Prozent steigt, oder um ein Prozent fällt:

27: red_tab(k, 12)

28: red_tab(k,9)

h	Rh	Zh	th	Ah
1	148000	18000	2000	20000
2	125760	17760	22240	40000
3	140851.2	15091.2	-15091.2	0
4	92753.34	16902.14	48097.85	65000
5	103883.7	11130.40	-11130.40	0
6	0	103883.7	12466.04	116349.7

h	Rh	Zh	th	Ah
1	143500	13500	6500	20000
2	116415	12915	27085	40000
3	126892.3	10477.35	-10477.35	0
4	73312.66	11420.31	53579.68	65000
5	79910.80	6598.139	-6598.139	0
6	0	79910.80	7191.972	87102.77

3.2 Die Annuitätenschuld

16. 85000.- sind bei 8,75% Zinsen innerhalb von 10 Jahren durch gleiche Raten zurückzuzahlen.

a) Wie lautet die 7. Zeile des Tilgungsplans?
b) Erstelle die 3. – 7. Zeile des Tilgungsplans.
c) Wie lautet der komplette Plan?
d) Wie ändert sich die 7. Zeile, wenn der Zinsfuß um 1% erhöht wird?

85000.- are to be paid back within 10 years at 8.75% interest by equal annuities.

a) What is the 7th row of the redemption table?
b) Give the rows 3 to 7 of the redemption table!
c) Give the complete table!
d) How does row 7 change, if interest is increased by 1%?

Die Terme bis 7: könnten (ohne Kommentarzeilen) in der Hilfsdatei ANN.MTH zusammengefasst werden. Aufgabe 16 wird mit dieser ANN.MTH-Datei gelöst:

Annuitätenschuld: Kapital (Amount) K, Zinsfuß (Interests) i and Zeit (Years) n.

#1: r(i) := 1 + i%

Berechung der Annuität (Annuity)

#2: $a(k, i, n) := \dfrac{k \cdot i\%}{1 - r(i)^{-n}}$

oder -pmt(i%,n,k)

Berechnung der Tilgungsquoten für das Jahr h (Principals for year h)

#3: $r\_r(k, i, n, h) := (a(k, i, n) - k \cdot i\%) \cdot r(i)^{h-1}$

Restschuld zu Beginn des h-ten Jahres
Balance at begin of year h

#4: $rem\_debt(k, i, n, h) := k - \dfrac{r\_r(k, i, n, 1) \cdot (r(i)^{h} - 1)}{i\%}$

oder k + FVAL(i%,h,r_r(k,i,n,1))
Ausgabe der h-ten Zeile des Tilgungsplans

#5: row_(k, i, n, h) := [h, rem_debt(k, i, n, h), a(k, i, n) − r_r(k, i, n, h), r_r(k, i, n, h), a(k, i, n)]

#6: titel := [[h, Rh, Zh, th, Ah]]

Ausgabe des Plans von Zeile u bis Zeile v
Output of the plan from row #u through row#v

#7: part_rt(k, i, n, u, v) := APPEND(titel, VECTOR(row_(k, i, n, h), h, u, v))

#8: Notation := Decimal

#9: NotationDigits := 7

Kompletter Plan

#10: red_tab(k, i, n) := part_rt(k, i, n, 1, n)

#11: [i := 8.75, k := 85000, n := 10]

#12: row_(k, i, n, 7)

#13: [7, 33306.53, 3733.804, 9365.516, 13099.32]

#14: part_rt(k, i, n, 3, 7)

#15:

h	Rh	Zh	th	Ah
3	66484.96	6403.333	6695.987	13099.32
4	59203.07	5817.434	7281.886	13099.32
5	51284.02	5180.269	7919.051	13099.32
6	42672.05	4487.351	8611.968	13099.32
7	33306.53	3733.804	9365.516	13099.32

#16: red_tab(k, i, n)

#17:

h	Rh	Zh	th	Ah
1	79338.17	7437.5	5661.820	13099.32
2	73180.94	6942.090	6157.230	13099.32
3	66484.96	6403.333	6695.987	13099.32
4	59203.07	5817.434	7281.886	13099.32
5	51284.02	5180.269	7919.051	13099.32
6	42672.05	4487.351	8611.968	13099.32
7	33306.53	3733.804	9365.516	13099.32
8	23121.53	2914.322	10184.99	13099.32
9	12045.35	2023.134	11076.18	13099.32
10	0	1053.968	12045.35	13099.32

#18: row_(k, 0.75, n, 7) = [7, 26170.13, 260.7296, 8593.824, 8854.554]

Die Funktion PART_RT(k,i,n,u,v) ist dann praktisch, wenn der Tp. seines Umfangs wegen am Bildschirm und damit auch bei der Druckausgabe nicht in dieser Matrixform ausgegeben wird. Mit PART_RT kann man ihn teilweise ermitteln und stückeln.

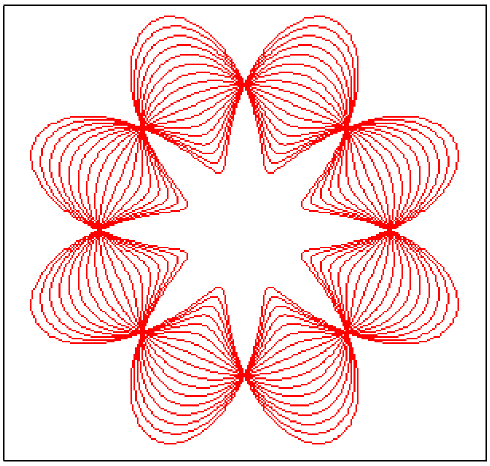
3.3 Die Prozentschuld

Hier ist neben dem Kapital K und der Verzinsung i die Höhe der jährlichen konstanten Rückzahlungen, - der Annuitäten - , gegeben. Vorrangig ist die Laufzeit zu ermitteln.

Der Name „Prozentschuld" rührt daher, dass die Höhe der Annuität oft als Prozentanteil der Gesamtschuld definiert wird.

Ich habe diesen Tilgungsplan auf drei Arten erstellt:

Zuerst für DERIVE-User, die - noch - nicht im Besitz der neuesten Version sind. Hier muss man ähnlich wie beim allgemeinen Tilgungsplan in 3.1 nach Berechnung der Laufzeit die letzte Zeile separat ermitteln.



VECTOR([(3.5+c·SIN(4·t))COS(t), (3.5+c·SIN(4t))SIN(t)],c, -2,2,0.25)

Dann zeige ich mit Verwendung der INTEGER-Funktion und APPEND_VECTORS eine wesentlich komfortablere Lösung und schließlich will ich auch einen kleinen Vorgeschmack auf die Programmierbarkeit von Derive 2.xx geben. Ja, Sie haben richtig gelesen: Derive 2.xx ist programmierbar! Außerdem werde ich in der letzten Variante den schon besprochenen Rundungsalgorithmus einbauen:

17. Die Schuld von 120000.- ist bei i=10% durch Annuitäten von 15600.- zu tilgen.

    a) Wie lautet die 10. Zeile des Tilgungsplans?
    b) Bestimme die Gesamtlaufzeit.
    c) Wie heißt die letzte Zeile?
    d) Erstelle den Tilgungsplan von der 8. bis zur 13. Zeile.

    A debt of 120000.- at 10.5% interest is to be paid back by annuities of 15600.-.

    a) What is the 10th row of the redemption table?
    b) Calculate the running time of the pay-off.
    c) Give the last row.
    d) Give the schedule of rows 8 through 13.?

Hier ist die Datei PROZSCH.MTH dokumentiert. Der Formelbereich geht bis zum Ausdruck #..:

Prozentschuld: Kapital k, Annuität a, Zinsfuß i (in %)

#1: $r(i) := 1 + i\%$

#2: $$n(k, a, i) := 1 + \frac{LN\left(1 - \dfrac{k \cdot i\%}{a}\right)}{LN(r(i)^{-1})}$$

Berechnung der Tilungsquoten und Reschschulden
Calculation of principals and the balances

#3: $r\_r(k, a, i, h) := (a - k \cdot i\%) \cdot r(i)^{h - 1}$

#4: $$rem\_debt(k, a, i, h) := k - \frac{r\_r(k, a, i, 1) \cdot (r(i)^{h} - 1)}{i\%}$$

Ausgabe der Zeile h (nicht der letzten)
Output of row #h (not the last one)

#5: row_(k,a,i,h) := [h,rem_debt(k,a,i,h),rem_debt(k,a,i,h − 1)·i%,
r_r(k,a,i,h), a]

Ausgabe letzten Zeile (m = INT(n)!)
Output of last row (m = INT(n)!)

#6: lrow(k,a,i) := [m,0,rem_debt(k,a,i,m − 1)·i%,
rem_debt(k,a,i,m − 1),rem_debt(k,a,i,m − 1)·r(i)]

Ausgabe der Zeile h (nicht der letzten)
Output of row #h (not the last one)

#7: titel := [["h","Rh","Zh","th","Ah"]]

#8: part_rt(k,a,i,u,v) := APPEND(titel, VECTOR(row_(k,a,i,h),h,u,v))

Kompletter Plan ohne letzte Zeile / complete table without last row

#9: red_tab(k,a,i) := APPEND(titel,part_rt(k,a,i,1,m−1))

#10: [k := 120000, i := 10.5, a := 15600]

#11: row_(k, a, i, 10)

#12: [10, 71026.26, 8231.454, 7368.545, 15600]

#13: m = n(k, a, i)

#14: m = 17.51212

#15: lrow(k, a, i, 17)

#16: [17, 0, 777.6281, 7405.982, 8183.610]

#17: part_rt(k, a, i, 8, 13)

#18:

h	Rh	Zh	th	Ah
8	85063.17	9565.278	6034.721	15600
9	78394.80	8931.633	6668.366	15600
10	71026.26	8231.454	7368.545	15600
11	62884.01	7457.757	8142.242	15600
12	53886.84	6602.821	8997.178	15600
13	43944.95	5658.118	9941.881	15600

Nun die aktuellere Variante:

Die Zeilen 1: bis 4: sind voranzustellen; damit ändern sich auch die Ermittlung von Laufzeit und letzter Zeile. Eine "Nullzeile" wird eingeführt, um Tilgungspläne über ihre tatsächliche Laufzeit ausgeben zu können, ohne vorher die Laufzeit berechnen zu müssen.

18. 50000 sind durch Annuitäten von je 15000 bei 9% Zinsen zu tilgen. Wie lauten die Zeilen 23 bis 30 des Tilgungsplans? Wie lange dauert die Rückzahlung?

150000.- must be paid back by annuities of 15000.- at 9 percent interests.
What are the rows 23 to 30 of the payback table?
What is the running time of the pay-off?

1: $\text{MOD}(a, b) := \frac{b}{2} - \frac{b\ \text{ATAN}\left[\text{COT}\left[\frac{\pi a}{b}\right]\right]}{\pi}$

2: $\text{FLOOR}(a, b) := \frac{a - \text{MOD}(a, b)}{b}$

3: INTG (x) := FLOOR (x, 1)

4: APPEND_VECTORS (u, v) := VECTOR (IF (m_ ≤ DIMENSION (u), ELEMEN~ ~T (u, m_), ELEMENT (v, m_ - DIMENSION (u))), m_, DIMENSION (u) ~ ~+ DIMENSION (v))

5: R (i) := 1 + i%

This is history, all functions are full implemented now. It is not necessary to preload them from any utility files.

APPEND_VECTORS became APPEND.

#1: r(i) := 1 + i%

#2: $r\_r(k, a, i, h) := (a - k\cdot i\%)\cdot r(i)^{h - 1}$

#3: rem_debt(k, a, i, h) := k − FVAL(i%, h, − r_r(k, a, i, 1))

#4: row_(k, a, i, h) := [h, rem_debt(k, a, i, h), a − r_r(k, a, i, h), r_r(k, a, i, h), a]

#5: Berechnung der Laufzeit:

#6: n(k, a, i) := FLOOR(NPER(i%, −a, k)) + 1

#7: Ausgabe der letzten Zeile / last row

#8: lrow(k, a, i) := [n(k, a, i), 0, rem_debt(k, a, i, n(k, a, i) − 1)·i%, rem_debt(k, a, i, n(k, a, i) − 1), rem_debt(k, a, i, n(k, a, i) − 1)·r(i)]

#9: Nullzeile / Zero line

#10: z(h) := [h, 0, 0, 0, 0]

```
#12:  kompletter Plan / full table

#13:  red_tab(k, a, i) := APPEND(titel, VECTOR(row_(k, a, i, h), h, 1, n(k, a, i) - 1),
        [lrow(k, a, i)])

#14:  erweiterter Plan bis zur Zeile v > n / extended table up to row #v > n

#15:  rtx(k, a, i, v) := APPEND(red_tab(k, a, i), VECTOR(z(h), h, n(k, a, i) + 1, v))

#16:  Teiltilgungsplan Zeile #u bis #v / Partial table row #u to #v

#17:  part_rt(k, a, i, u, v) := APPEND(titel, VECTOR(VECTOR(ELEMENT(rtx(k, a, i, v), j,
        h), h, 1, 5), j, u + 1, v + 1))

#18:  part_rt(150000, 15000, 9, 23, 30)
```

#19:

h	Rh	Zh	th	Ah
23	45702.09	5012.099	9987.900	15000
24	34815.28	4113.188	10886.81	15000
25	22948.65	3133.375	11866.62	15000
26	10014.03	2065.379	12934.62	15000
27	0	901.2631	10014.03	10915.29
28	0	0	0	0
29	0	0	0	0
30	0	0	0	0

Die Rückzahlung dauert offensichtlich 27 Jahre.
It needs 27 years to pay back.

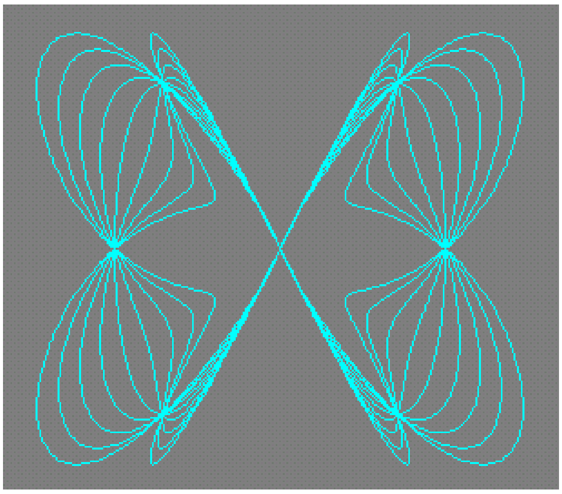
Below is part_rt *in the modern version.*

#20: $\text{part\_rt}(k, a, i, u, v) := \text{APPEND}(\text{titel}, \text{VECTOR}((\text{rtx}(k, a, i, v))_j, j, u + 1, v + 1))$

Wenn wir auf 2 Dez.stellen runden wollen, ergänzen wir den Funktionsvorrat mit der Funktion RD(x). ROW_(k,a,i,h) und LROW(k,a,i) werden entsprechend adaptiert. APPEND_VECTORS kann nun weggelassen werden. An seiner Stelle wird ja "programmiert".

#21: $\text{rd}(x) := \dfrac{\text{FLOOR}(100\cdot x + 0.5)}{100}$

```
#22:  row_(k, a, i, h) := [h, rd(rem_debt(k, a, i, h)), rd(a - r_r(k, a, i, h)),
        rd(r_r(k, a, i, h)), rd(a)]

#23:  lrow(k, a, i) := [n(k, a, i), 0, rd(rem_debt(k, a, i, n(k, a, i) - 1)·i%),
        rd(rem_debt(k, a, i, n(k, a, i) - 1)), rd(rem_debt(k, a, i, n(k, a, i) - 1)·r(i))]
```



VECTOR([(3.5+cSIN(4t))COS(-t),(3.5+cSIN(4t))SIN(2t)], c,-2,2,0.5)

Compare with graph on page 13!

Hier wird mit der in vielen höheren Programmiersprachen üblichen IF-Abfrage entschieden, ob noch eine Normalzeile ROW_, die letzte Zeile LROW oder eine überflüssige Nullzeile Z auszugeben ist.

Like in many programming languages we use an IF-construct to decide whether a standard ROW_, the last row LROW or a zero row Z must be produced.

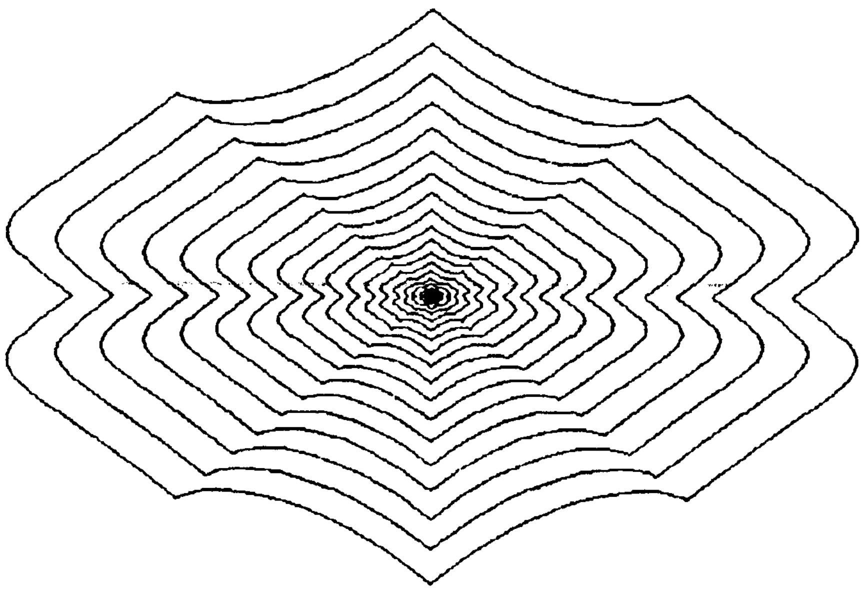
Lassen Sie diese Konstruktion auf Sie einwirken. Wir werden sicher in den nächsten Ausgaben des D-N-L eingehend auf die neuen Möglichkeiten von *Derive 2.xx* eingehen.

```
#24:  part_rt(k, a, i, u, v) := APPEND(titel, VECTOR(IF(h < n(k, a, i), row_(k, a, i, h),
        IF(h = n(k, a, i), lrow(k, a, i), z(h))), h, u, v))

#25:  red_tab(k, a, i) := part_rt(k, a, i, 1, n(k, a, i))

#26:  part_rt(150000, 15000, 9, 20, 27)
```

#27:

h	Rh	Zh	th	Ah
20	73259.82	7287.51	7712.49	15000
21	64853.2	6593.38	8406.62	15000
22	55689.99	5836.79	9163.21	15000
23	45702.09	5012.1	9987.9	15000
24	34815.28	4113.19	10886.81	15000
25	22948.66	3133.38	11866.62	15000
26	10014.03	2065.38	12934.62	15000
27	0	901.26	10014.03	10915.3

Abschließend sei noch gesagt, daß dies natürlich nur Vorschläge für den Einsatz von DERIVE sein können. Da gibt es sicher elegantere Möglichkeiten und Ergänzungen. Ich wollte mit meinem Beitrag nur zeigen, daß auch finanzmathematische Anwendungen mit DERIVE rasch und erfolgreich behandelt, und daß auch sehr mathematischen Bezüge - hier zu Vektor- und Matrizenrechnung - hergestellt werden können. Ich freue mich auf Ihre diesbezüglichen Erfahrungsberichte oder zusätzlichen Beiträge.



Übernahme von Texten und Graphiken aus DERIVE in Word5 mit Hilfe von CAPTURE.COM

Dr. Felix Schumm, Stuttgart

1. Vorschlag zur Installation von DERIVE und starten über eine BATCH-Datei.

Im Heft Nr.1 der D-N-L fragt Herr Dr. G. Bragard, Aachen an, wie man DERIVE mit einer Herculeskarte so installieren kann, daß man nicht bei jedem Neustart HGC an-wählen muß. Hier ein Lösungsvorschlag. Die anschließenden Hinweise zur Übernahme von Texten und Graphiken in WORD5 beziehen sich auf diese Installation. (Sie kann leicht auf spezielle Bedürfnisse angepaßt werden. Anmerkung von D-N-L)

Ich ordne auf der Festplatte C: Verzeichnisse und Dateien in folgender Weise an:

```
Stammverz.          Unterverz.        Dateien
root                subdirectories    files

√c:\
config.sys
autoexec.bat
 |
 |-------- \BATCH\ -------+-------- DERIVE.BAT
 |                        |-------- WORD.BAT
 |                        +-------- {weitere .BAT-Dateien}
 |
 |-------- \DERIVE\ ------+-------- DERIVE.EXE
 |                        |-------- DERIVE.INI
 |                        |-------- HERCULES.COM
 |                        +-------- {weitere DERIVE-Dateien}
 |
 |-------- \WORD\ --------+-------- WORD.EXE
 |                        |-------- CAPTURE.COM
 |                        |-------- CAPTURE.INI
 |                        +-------- {weitere WORD-Dateien}
 |
 |-------- \DOKU\ --------+-------- TEXT.TXT
 |                        |-------- BILD.SCR
 |                        +-------- {weitere Texte und Bilder für WORD}
```

<u>Aufbau der Batch-Dateien:</u>

Zuerst wird der Suchpfad in der AUTOEXEC.BAT entsprechend adaptiert:

PATH C:\DOS; C:\BATCH; C:\WORD;...

```
WORD.BAT                          DERIVE.BAT

echo  off                                              echo  off
cls                                                          cls
c:                                                            c:
cd c:\doku                       capture/a=06/t=N/r=N/i=J/b=J
word/h                                                cd  derive
c:                                                      hercules
cd\                                                       derive
cls                                                           c:
                                  cd\
                                  cls
```

Wenn man keine HERCULES Karte, sondern einen CGA-, EGA- oder VGA-Schirm verwendet, fällt das /h in WORD.BAT, sowie hercules in DERIVE.BAT weg. Informieren Sie sich bitte im WORD-Handbuch über CAPTURE.COM!

Nach Eingabe von "derive" erscheint zun„chst das Menü des Programms CAPTURE. Man ändert oder bestätigt die Vorgaben, indem man die Q-Taste drückt. Danach erscheint das DERIVE-Menü. Ich arbeite grundsätzlich im Graphik-Modus. Beim ersten Start wähle man unter

Options Display die Möglichkeiten: graphics, high, hercules (oder entsprechend) und extended.

und unter Transfer Print Options die Einstellungen: all, extended und height=50.

Dann speichert man diese Einstellungen mit Transfer Save State in die Datei DERIVE.INI ab. Bei erneutem Start von DERIVE ist diese Vorwahl dann automatisch eingestellt.

(*Anmerkung von D-N-L: Es lassen sich verschiedene .INI-Dateien für unterschiedliche Einsatzmöglichkeiten speichern und mit Transfer State Load aufrufen (z.B.: MONO.INI, INVERS.INI, ...*)

2. Übernahme des Algebra-Fensters von Derive in Word5.

Dies ist unkritisch. Nach der Befehlsfolge Transfer Print File gibt man den Dateinamen, sowie den Pfad ein, in dem WORD den Text suchen soll (z.B.: C:\DOKU\NAME.TXT). Unbedingt sollte man jedoch, wie zuerst beschrieben die Einstellungen extended und height=50 eingetragen haben, um einerseits die Sonderzeichen des ASCII-Satzes, die die meisten Drucker unterstützen zu erhalten, und um andererseits groáe Integrale oder auch Doppelbrüche und Summen in Originaldarstellung aufs Papier zu bringen (und nicht als INT(....)). Beim Bearbeiten der Texte mit WORD5 sollte man mindestens bei Brüchen den Zeilenabstand auf 0,5 setzen (FORMAT-ABSATZ) und mit FORMAT-ZEICHEN eine kleinere Schriftgröße wählen.

(Es bewährt sich auch, den Bereichsrand so weit wie möglich nach außen zu setzen, und die ersten Spalten mit SHIFT F6 zu entfernen.)

3. Übernahme des PLOT-2D/3D Fensters von Derive in Word5 mit Hilfe von CAPTURE.COM

Wenn man SHIFT-DRUCK (PrtSc) drückt, erscheint links oben am Schirm die Meldung Dateiname: capt001.scr. Hier geben wir den Namen und Pfad ein, aus dem WORD die Datei wieder finden soll (z.B.: C:\DOKU\KURVE1.SCR). Nach ENTER erscheint ein Rahmen, den man mit den Pfeil- und der Tabulatortaste verschieben kann, der jenen Bereich anzeigt, derin ein für WORD lesbares Bild-format übertragen werden soll. Ist der Ausschnitt passend gewählt, bestätigt man neuerlich mit ENTER und der Vorgang ist abgeschlossen.

In WORD5 läßt sich nun an der Stelle, an der der Cursor gerade steht, die Graphik mit der Befehlsfolge BIBLIOTHEK-VERKNÜPFEN-GRAPHIK einbinden. Man muß nur noch den Namen der Bilddatei (z.B.: KURVE1.SCR) eingeben. Gegebenenfalls kann man die Größe der Graphik noch anpassen und diese mit FORMAT-RAHMEN (Rahmen)noch umranden.

Mit der Layoutkontrolle (Ctrl+F9) läßt sich die Plazierung noch kontrollieren.

Die Bilder zur Cornu-Spirale in dieser Ausgabe des D-N-L sind auf diese Weise nach WORD übertragen worden.

4. Additional Comments from J. Böhm

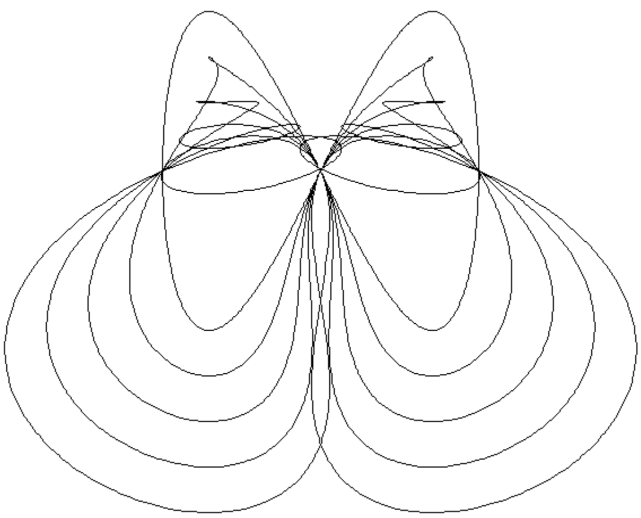
There are some other possibilities to print, to save and/or to manipulate DERIVE graphics. PIZZAZZ-PLUS is a fine program to create first class hardcopies. Many options make it easy to change, to rotate, to smooth, to shrink and to save the generated graphics.

If I want to change a DERIVE-plot - in order to add a description and/or a scale, I prefer working with FRIEZE, a PC-Paintbrush utility. Once installed FRIEZE remains memory resident until I re-boot the computer or turn off the power. FRIEZE allows to capture and save graphics images from other programs in PC-Paintbrush's PCX-format. WORD5 is able to read this format, as it does with its own .SCR-files mentioned above.

To show an example - having in mind the Letter of the Editor - I captured the following family of curves first by using CAPTURE.COM and transferred it to a WORD's .SCR-file. Then I used FRIEZE to save the same graphics for later "embellishing" with PC-Paintbrush. Please admire the result of my efforts below! Thank you so much!

All the graphics in this issue of the D-N-L were produced in one of these ways. The time of cut and paste has gone by.

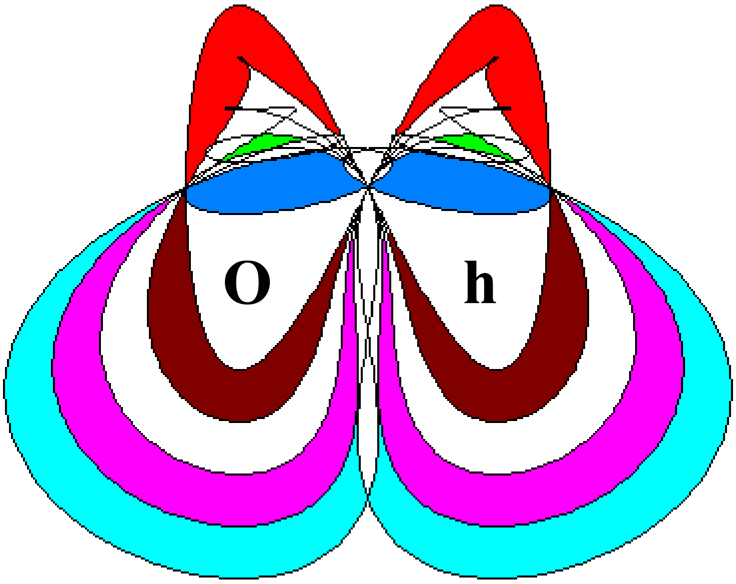
```
VECTOR([(3.5+c SIN(4t))COS(-t), (3.5+c SIN(2t)) SIN(2t)],c,-4,0)
```



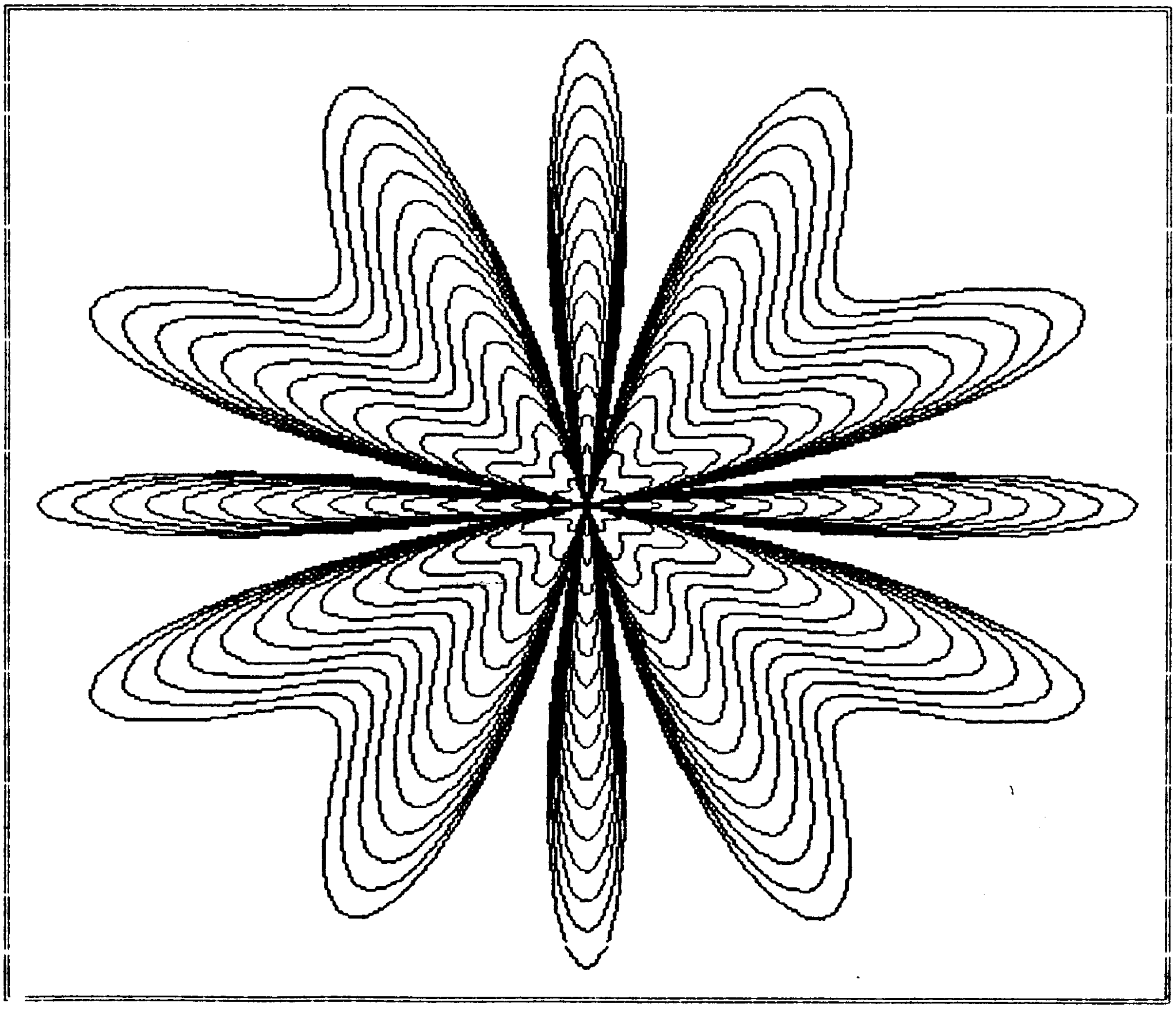
That´s the original, captured by WORD´s CAPTURE.COM.
(This is history!!)

Felix, the Cat

And this is the paining after working out the *DERIVE*-plot with PC-Painbrush.



And here is one more picture from my Mathematics Gallery:



Solving Odes Using DERIVE´s ODE1.MTH

Josef Böhm, Würmla

The file ODE1.MTH is helpful to solve first-order ordinary differential equations. I want to explain the capabilities of this file, complete it and make its use a bit easier.

The simplest Odes are those which can be solved by separating the variables. Let's look at an example:

Example 1: $(1 + y^2)dx + xy\,dy = 0$

Give the general solution and give the curve of solution containing then point P(3/2).

Sketch the direction field, given by (1), some curves of the general solution and the curve of the special solution!

It is necessary to bring the given Ode to the form: $\dfrac{dy}{dx} = p(x) \cdot q(y)$

to use the function SEPARABLE:

$$1:\quad \text{SEPARABLE}(p, q, x, y, x0, y0) := \int_{y0}^{y} \frac{1}{q}\,dy = \int_{x0}^{x} p\,dx$$

After separating the variables I get: $p = -\dfrac{1}{x}$ and $q = \dfrac{1 + y2}{y}$

and this leads to: **(in Derive 5!)**

#2: Logarithm := Expand

$$\#3:\quad \text{SEPARABLE}\left(-\frac{1}{x}, \frac{1 + y^2}{y}\right) = \left(\frac{\text{LN}(y^2 + 1)}{2} - \frac{\text{LN}(y0^2 + 1)}{2} = \text{LN}(x0) - \text{LN}(x)\right)$$

#4: [x :∈ Real (0, ∞), y :∈ Real (0, ∞)]

$$\#5:\quad \text{SOLVE}\left(\frac{\text{LN}(y^2 + 1)}{2} - \frac{\text{LN}(y0^2 + 1)}{2} = \text{LN}(x0) - \text{LN}(x), y\right)$$

$$\#6:\quad y = -\frac{\sqrt{x0^2 \cdot (y0^2 + 1) - x^2}}{x} \vee y = \frac{\sqrt{x0^2 \cdot (y0^2 + 1) - x^2}}{x}$$

$$\#7:\quad \text{SEPARABLE}\left(-\frac{1}{x}, \frac{1 + y^2}{y}, x, y, 3, 2\right) = \left(\frac{\text{LN}(y^2 + 1)}{2} - \frac{\text{LN}(5)}{2} = \text{LN}(3) - \text{LN}(x)\right)$$

$$\#8:\quad \text{SOLVE}\left(\frac{\text{LN}(y^2 + 1)}{2} - \frac{\text{LN}(5)}{2} = \text{LN}(3) - \text{LN}(x), y\right)$$

$$\#9:\quad y = -\frac{\sqrt{45 - x^2}}{x} \vee y = \frac{\sqrt{45 - x^2}}{x}$$

$$\#10:\quad y^2 = -\frac{x^2 - 45}{x^2}$$

Without the declarations in #2 and #4 one would get bulkier expressions.

I prefer the general solution containing a parameter c to get the family of curves presenting the multiplicity of all solution curves.

#11: $\text{gen\_sol\_sep}(p, q, x, y) := \int \frac{1}{q}\,dy - \int p\,dx = c$

#12: $\text{spec\_sol\_sep}(p, q, x0, y0, x, y) := \int_{y0}^{y} \frac{1}{q}\,dy = \int_{x0}^{x} p\,dx$

#13: $\text{gen\_sol\_sep}\left(-\frac{1}{x}, \frac{1 + y^2}{y}\right) = \left(\text{LN}(x) + \frac{\text{LN}(y^2 + 1)}{2} = c\right)$

#14: $\text{SOLVE}\left(\text{LN}(x) + \frac{\text{LN}(y^2 + 1)}{2} = c, y\right) = \left(y = -\frac{\sqrt{(\hat{e}^{2\cdot c} - x^2)}}{x} \vee y = \frac{\sqrt{(\hat{e}^{2\cdot c} - x^2)}}{x}\right)$

#15: $\left[y = -\frac{\sqrt{(\hat{e}^{2\cdot c} - x^2)}}{x}, y = \frac{\sqrt{(\hat{e}^{2\cdot c} - x^2)}}{x}\right]$

#16: $\text{spec\_sol\_sep}\left(-\frac{1}{x}, \frac{1 + y^2}{y}, 3, 2\right)$

after soLving for y we obtain the same results as in #9 above.

Now I want to plot not only the graph of the special solution satisfying the condition y(x = 3) = 2, but also a familiy of curves representing solutions of the given differential equation and bed them into the direction field, given by

$$y' = -\frac{1 + y^2}{x\,y}$$

DERIVE provides the function DIRECTION_FIELD (part of DERIVE 2.xx's file ODE_APPR.MTH) for our purpose.

How to use this function is described in the manual:

I've made up my own FIELD-function, because I want all the tangent segments to have the same length.

Try this and you will get fine results, if you consider the following hints.

#20: $\text{DIRECTION\_FIELD}\left(-\frac{1 + y^2}{x\cdot y}, x, -8, 8, 16, y, -6, 6, 12\right)$

```
#21:  dir(r, x, y, x0, y0) :=
        If LIM(LIM(1/r, x, x0), y, y0) = 0
           [x0, y0 + t]
           LIM(LIM([x + t/√(1 + r^2), y + r·t/√(1 + r^2)], x, x0), y, y0)
```

```
#22:  feld(r, x, y, xl, xr, xs, yd, yu, ys) := VECTOR(VECTOR(dir(r, x, y, x0, y0), x0,
        xl, xr, xs), y0, yd, yu, ys)
```

r is the slope r(x,y) = y'(x,y); xl and xr give the left and right border, xs the x-increment; y varies from yd to yo, with steps of ys.

#23: $\text{feld}\left(-\frac{1 + y^2}{x\cdot y}, x, y, -8, 8, 1, -6, 6, 1\right)$

With feld() you can vary the length of the tangent pieces by setting the values for parameter t, $-0.25 \le t \le +0.25$ is recommended. Plot the direction field in blue.

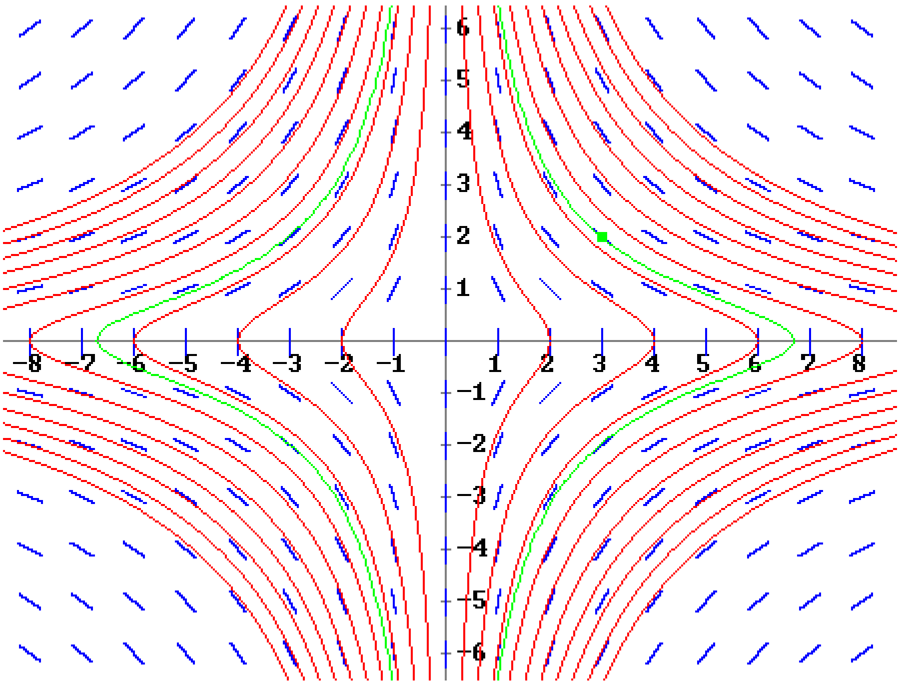
Set the appropriate scale, switch off the automatical change of colors, switch on Approximating Before Plotting and plot .... and then you will watch how the direction field will spread across the defined plane.

I've brought the function term in a more convenient form and build up two vectors of the family of curves, which represent the general solution.

$$\#24: \quad \text{VECTOR}\left(-\frac{\sqrt{(c^2 - x^2)}}{x}, c, -20, 20, 2\right)$$

$$\#25: \quad \text{VECTOR}\left(\frac{\sqrt{(c^2 - x^2)}}{x}, c, -20, 20, 2\right)$$

Plot them all in red



and finally add the special solution with the given point:

$$\#36: \quad \left[y^2 = -\frac{x^2 - 45}{x^2}, [3, 2]\right]$$

Many things have changed since 1991: You need not loading the utility files. Derive recognizes all functions which are provided in the utility files (which you can find in the MATH-folder. It was not possible to plot implicitly given functions (#36).

We can do this now, see expression #38 .

$$\#38: \quad \text{VECTOR}\left(y^2 = \frac{c^2 - x^2}{x^2}, c, -20, 20, 2\right)$$

Example 2: $(1 + e^x)\ y\ y' \ = \ ex$ spec. sol. P(1;1)

Example 3: $y'\sin x \ = \ y \ln y$ $y(\pi/2) = 1/2$

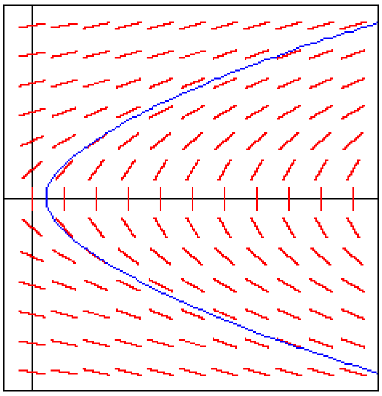
#26: $\text{spec\_sol\_sep}\left(\dfrac{ê^{x}}{1 + ê^{x}}, \dfrac{1}{y}, 1, 1\right)$

#27: $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{1}{2} = \text{LN}(ê^{x} + 1) - \text{LN}(ê + 1)$

#28: $\text{SOLVE}\left(\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{1}{2} = \text{LN}(ê^{x} + 1) - \text{LN}(ê + 1), y\right)$

#29: $y = -\sqrt{(2\cdot\text{LN}(ê^{x} + 1) - 2\cdot\text{LN}(ê + 1) + 1)} \lor y = \sqrt{(2\cdot\text{LN}(ê^{x} + 1) - 2\cdot\text{LN}(ê + 1) + 1)}$

#30: $(y = -\sqrt{(2\cdot\text{LN}(ê^{x} + 1) - 2\cdot\text{LN}(ê + 1) + 1)})^2$



#31: $\boxed{y^2 = 2\cdot\text{LN}(ê^{x} + 1) - 2\cdot\text{LN}(ê + 1) + 1}$

#32: $\text{feld}\left(\dfrac{ê^{x}}{y\cdot(ê^{x} + 1)}, x, y, 0, 5, 0.5, -3, 3, 0.5\right)$

#34: $\text{spec\_sol\_sep}\left(\dfrac{1}{\text{SIN}(x)}, y\cdot\text{LN}(y), \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

#35: $\text{LN}\left(\dfrac{\text{LN}(y)}{\text{LN}(2)}\right) - \pi\cdot î = \text{LN}\left(\text{TAN}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$

#36: $\text{SOLVE}\left(\text{LN}\left(\dfrac{\text{LN}(y)}{\text{LN}(2)}\right) - \pi\cdot î = \text{LN}\left(\text{TAN}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right), y\right)$

#37: $\text{SOLVE}\left(\text{SOLVE}\left(\text{LN}\left(\dfrac{\text{LN}(y)}{\text{LN}(2)}\right) - \pi\cdot î = \text{LN}\left(\text{TAN}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right), y\right), y\right)$

#38: x :∈ Complex

#39: y :∈ Complex

#40: $y = \text{IF}\left(-\pi < \text{IM}\left(\text{LN}\left(\text{LN}(2)\cdot\text{TAN}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) + \pi\cdot î\right) \le \pi, \text{IF}\left(-\pi < \text{IM}\left(-\text{LN}(2)\cdot\text{TAN}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) \le \pi, 2^{-\text{TAN}(x/2)}\right)\right)$

#41: $\text{gen\_sol\_sep}\left(\dfrac{1}{\text{SIN}(x)}, y\cdot\text{LN}(y)\right) = \left(\text{LN}(\text{LN}(y)) - \text{LN}\left(\text{TAN}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) = c\right)$

#42: $\text{SOLVE}\left(\text{LN}(\text{LN}(y)) - \text{LN}\left(\text{TAN}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) = c, y\right)$

#43: $y = \mathrm{IF}\left(-\pi < \mathrm{IM}\left(\mathrm{LN}\left(\mathrm{TAN}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c\right) \le \pi,\ \mathrm{IF}\left(-\pi < \mathrm{IM}\left(ê^{c}\cdot\mathrm{TAN}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \le \pi,\ ê^{ê^{c}\cdot \mathrm{TAN}(x/2)}\right)\right)$

#44: $y = ê^{ê^{c}\cdot \mathrm{TAN}(x/2)}$

#45: $\mathrm{SOLVE}\left(\frac{1}{2} = ê^{ê^{c}\cdot \mathrm{TAN}(\pi/2/2)},\ c\right)$

#46: $c = \mathrm{LN}(\mathrm{LN}(2)) + 3\cdot\pi\cdot î \vee c = \mathrm{LN}(\mathrm{LN}(2)) - \pi\cdot î \vee c = \mathrm{LN}(\mathrm{LN}(2)) + \pi\cdot î$

#47: $\mathrm{SUBST}\left(y = ê^{ê^{c}\cdot \mathrm{TAN}(x/2)},\ c,\ \mathrm{LN}(\mathrm{LN}(2)) + \pi\cdot î\right) = \left(y = 2^{-\mathrm{TAN}(x/2)}\right)$

#48: $y = 2^{-\mathrm{TAN}(x/2)}$

It´s interesting to compare Derive´s solution from 1991 with its treatment in 2004.
Domain declarations are very important.

$\mathrm{SPEC\_SOL\_SEP}\ \left[\frac{1}{\mathrm{SIN}\ (x)},\ y\ \mathrm{LN}\ (y),\ \frac{\pi}{2},\ \frac{1}{2}\right]$

$\mathrm{LN}\ \left[-\frac{\mathrm{LN}\ (y)}{\mathrm{LN}\ (2)\ (\mathrm{COS}\ (x) - 1)}\right] - \mathrm{LN}\ \left[\frac{1}{\mathrm{SIN}\ (x)}\right] - i\ \pi = 0$

$e^{\mathrm{LN}\ (-\ \mathrm{LN}\ (y)\ /\ (\mathrm{LN}\ (2)\ (\mathrm{COS}\ (x)\ -\ 1)))\ -\ \mathrm{LN}\ (1\ /\ \mathrm{SIN}\ (x))\ -\ i\ \pi} = 0$

$\frac{\mathrm{SIN}\ (x)\ \mathrm{LN}\ (y)}{\mathrm{LN}\ (2)\ (\mathrm{COS}\ (x) - 1)} = 1$

: $y = 2^{\mathrm{COT}\ (x)\ -\ 1\ /\ \mathrm{SIN}\ (x)}$

Example 4: The logistic growth curve

Logistic growth is described by a difference equation: Increase of a population y during a time interval dx is proportional to its present quantity, to the time interval and a factor (1 − y/k) with k as a value for the environment capacity.

$$dy = dx \cdot r \cdot y \cdot (1 - y/k)$$

r is a prop. factor, the growth rate.

dy/dx = r y (1 − y/k); r = 0.5; k = 3000; y(0) = 100 (Initial population)

#49: $\mathrm{spec\_sol\_sep}\left(1,\ 0.5\cdot y\cdot\left(1 - \frac{y}{3000}\right),\ 0,\ 100\right)$

#50: $\mathrm{SOLVE}\left(2\cdot\mathrm{LN}(y) - 2\cdot\mathrm{LN}\left(\frac{y - 3000}{29}\right) + 2\cdot\pi\cdot î = x,\ y\right)$

#51: $y = \dfrac{3000\cdot ê^{x/2}}{ê^{x/2} + 29}$

I let DERIVE compute the limit of this function to obtain the saturation quantity dy/dx = r y (1 - y/k); r = 0.5; k = 3000; y(0) = 100 (Initial population)

#49: $\text{spec\_sol\_sep}\left(1,\ 0.5\cdot y\cdot\left(1 - \frac{y}{3000}\right),\ 0,\ 100\right)$

#50: $\text{SOLVE}\left(2\cdot \text{LN}(y) - 2\cdot\text{LN}\left(\frac{y - 3000}{29}\right) + 2\cdot\pi\cdot\hat{\imath} = x,\ y\right)$

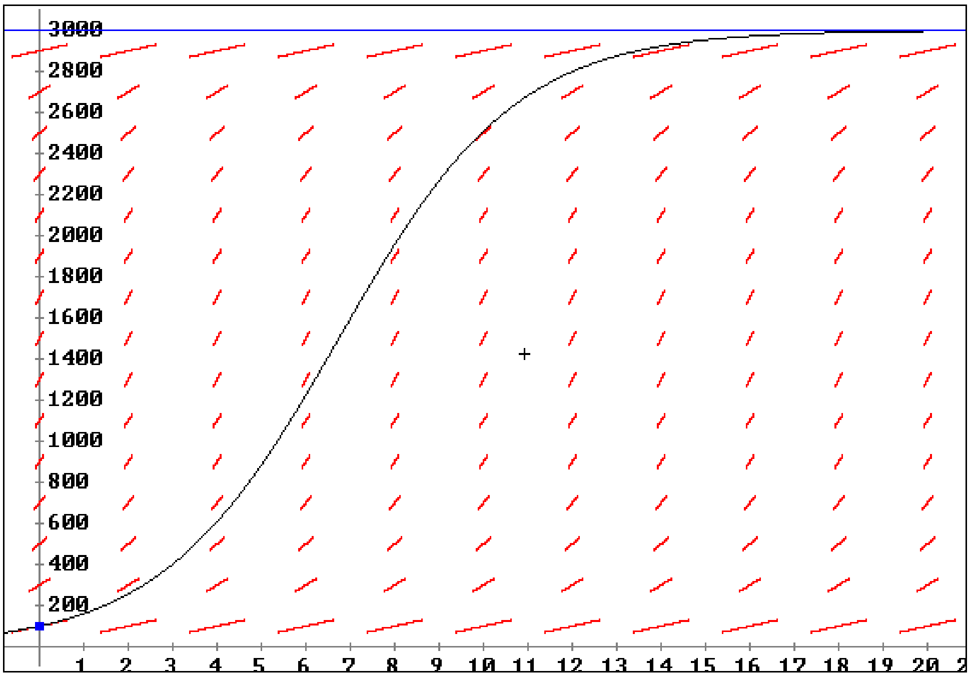
#51: $y = \dfrac{3000\cdot \hat{e}^{x/2}}{\hat{e}^{x/2} + 29}$

#52: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3000\cdot \hat{e}^{x/2}}{\hat{e}^{x/2} + 29} = 3000$

#53: $\text{feld}\left(0.5\cdot y\cdot\left(1 - \frac{y}{3000}\right),\ x,\ y,\ 0,\ 20,\ 2,\ 100,\ 2900,\ 200\right)$

-30 <= t <= 30

#54: [[0, 100], 3000]



Example 5: The general equation expressing the relation between electromotive force U and current I in an circuit containing the resistance R and the inductance L is:

$$U = L \cdot I' + R \cdot I$$

Solve this equation first for a constant U = U0.
I(t = 0) = 0
Then for U_0 = 20V, R = 5 Ohm, L = 0.1 Henry!
Solve the equation for U = U_0 sin(w t)! (w = 40)

#55: u0 :=

#56: $\text{gen\_sol\_sep}\left(1, \frac{u0 - r\cdot i}{l}, t, i\right)$

#57: $-\frac{l\cdot LN(i\cdot r - u0)}{r} - t = c$

#58: $SOLVE\left(-\frac{l\cdot LN(i\cdot r - u0)}{r} - t = c, i, Real\right)$

#59: $i = IF\left(-\pi < IM\left(-\frac{r\cdot(c + t)}{l}\right) \le \pi, \frac{ê^{- c\cdot r/l - r\cdot t/l}}{r} + \frac{u0}{r}\right)$

$$\boxed{\#60: \quad i = \frac{ê^{- c\cdot r/l - r\cdot t/l}}{r} + \frac{u0}{r}}$$

#61: $\text{spec\_sol\_sep}\left(1, \frac{u0 - r\cdot i}{l}, 0, 0, t, i\right)$

#62: $\frac{l\cdot LN(-u0)}{r} - \frac{l\cdot LN(i\cdot r - u0)}{r} = t$

#63: $SOLVE\left(\frac{l\cdot LN(-u0)}{r} - \frac{l\cdot LN(i\cdot r - u0)}{r} = t, i\right)$

#64: $i = \frac{u0}{r} - \frac{u0\cdot ê^{- r\cdot t/l}}{r}$

#65: $i = \frac{20}{5} - \frac{20\cdot ê^{- 5\cdot t/0.1}}{5}$

$$\boxed{\#66: \quad i = 4 - 4\cdot ê^{- 50\cdot t}}$$

The next question in this example leads to a linear monic differential equation of the form y' + p(x) · y = q(x). The function LINEAR1(p,q,x,y,x0,y0) helps us to find the solution. My special form LIN1(p,q,x,y) gives the solution containing the parameter c.

#67: $LINEAR1(p, q, x, y, x0, y0) := y = \frac{y0 + \int_{x0}^{x} q\cdot ê^{INT(p, x, x0, x)}\, dx}{ê^{INT(p, x, x0, x)}}$

#68: $LINEAR1\left(\frac{r}{l}, \frac{u0}{l}\cdot SIN(w\cdot t), t, i, 0, 0\right)$

#69: $i = \frac{u0\cdot ê^{- r\cdot t/l}\cdot(l\cdot w - ê^{r\cdot t/l}\cdot(l\cdot w\cdot COS(t\cdot w) - r\cdot SIN(t\cdot w)))}{l^2\cdot w^2 + r^2}$

$$\boxed{\#72: \quad i = 1.95\cdot ê^{- 50\cdot t} - 1.95\cdot COS(40\cdot t) + 2.43\cdot SIN(40\cdot t)}$$

$$\#73:\quad \text{lin1}(p, q, x, y) := y = \frac{\int q\cdot \hat{e}^{\int p\, dx}\, dx + c}{\hat{e}^{\int p\, dx}}$$

$$\#74:\quad \text{lin1}\left(\frac{r}{l}, \frac{u0\cdot \text{SIN}(w\cdot t)}{l}, t, i\right)$$

$$\#75:\quad i = c\cdot \hat{e}^{-r\cdot t/l} - \frac{u0\cdot(l\cdot w\cdot \text{COS}(t\cdot w) - r\cdot \text{SIN}(t\cdot w))}{l^2\cdot w^2 + r^2}$$

$$\#76:\quad 0 = c\cdot \hat{e}^{-5\cdot 0/0.1} - \frac{20\cdot(0.1\cdot 40\cdot \text{COS}(0\cdot 40) - 5\cdot \text{SIN}(0\cdot 40))}{0.1^2\cdot 40^2 + 5^2}$$

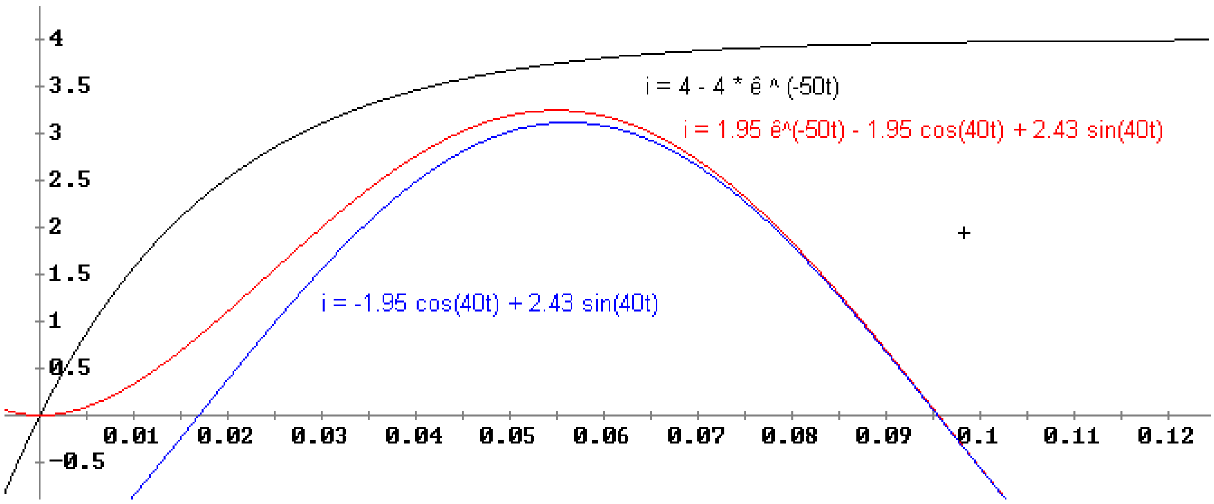
$$\#77:\quad \text{NSOLVE}\left(0 = c\cdot \hat{e}^{-5\cdot 0/0.1} - \frac{20\cdot(0.1\cdot 40\cdot \text{COS}(0\cdot 40) - 5\cdot \text{SIN}(0\cdot 40))}{0.1^2\cdot 40^2 + 5^2}, c, \text{Real}\right)$$

$$\#78:\quad c = 1.95$$

$$\#79:\quad i = 1.95\cdot \hat{e}^{-50\cdot t} - 1.95\cdot \text{COS}(40\cdot t) + 2.43\cdot \text{SIN}(40\cdot t)$$

$$\boxed{\#80:\quad i = -1.95\cdot \text{COS}(40\cdot t) + 2.43\cdot \text{SIN}(40\cdot t)}$$

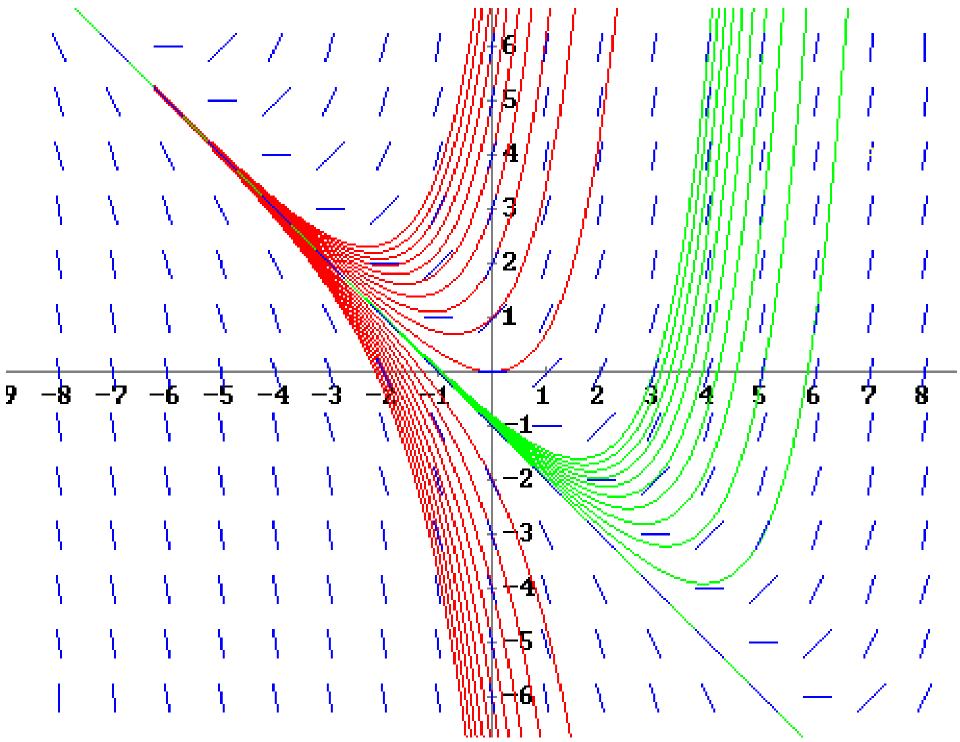
This is the plot with both solutions #66(black) and #72 = #79(red). The exponential term in #79 is called transient, because it usually becomes negligibly small after a short lapse of time. Graph of #80 (blue) shows the remaining steady-state term.



(Annotating plots is also a benefit of later Derive releases together with direct simplification using the = sign at the end of an expression.)

Example 6: The ODE $y' = x + y$ defines a nice direction field. Let DERIVE plot this field including a family of curves fitting into it.

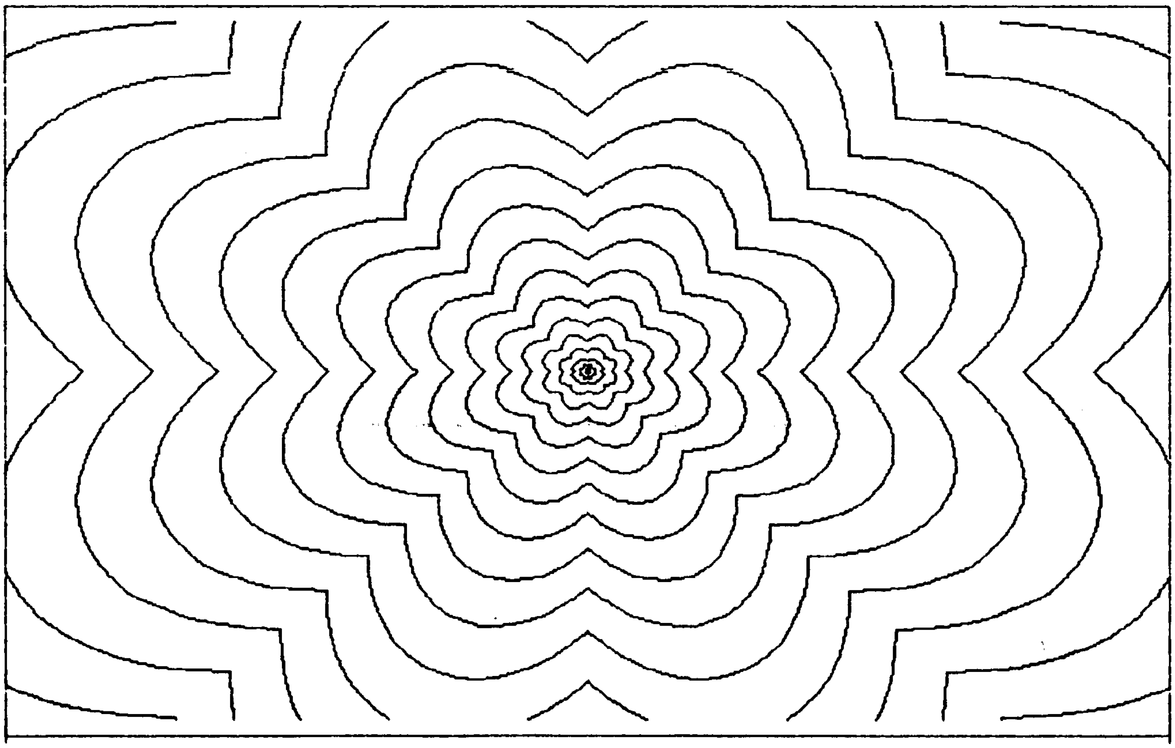
```
#81:  lin1(-1, x)

#82:  y = c·ê^x - x - 1

#83:  DIRECTION_FIELD(x + y, x, -8, 8, 16, y, -6, 6, 12)

#84:  VECTOR(y = c·ê^x - x - 1, c, -10, 10)

#85:  VECTOR(y = c·ê^x - x - 1, c, 0, 0.2, 0.02)
```



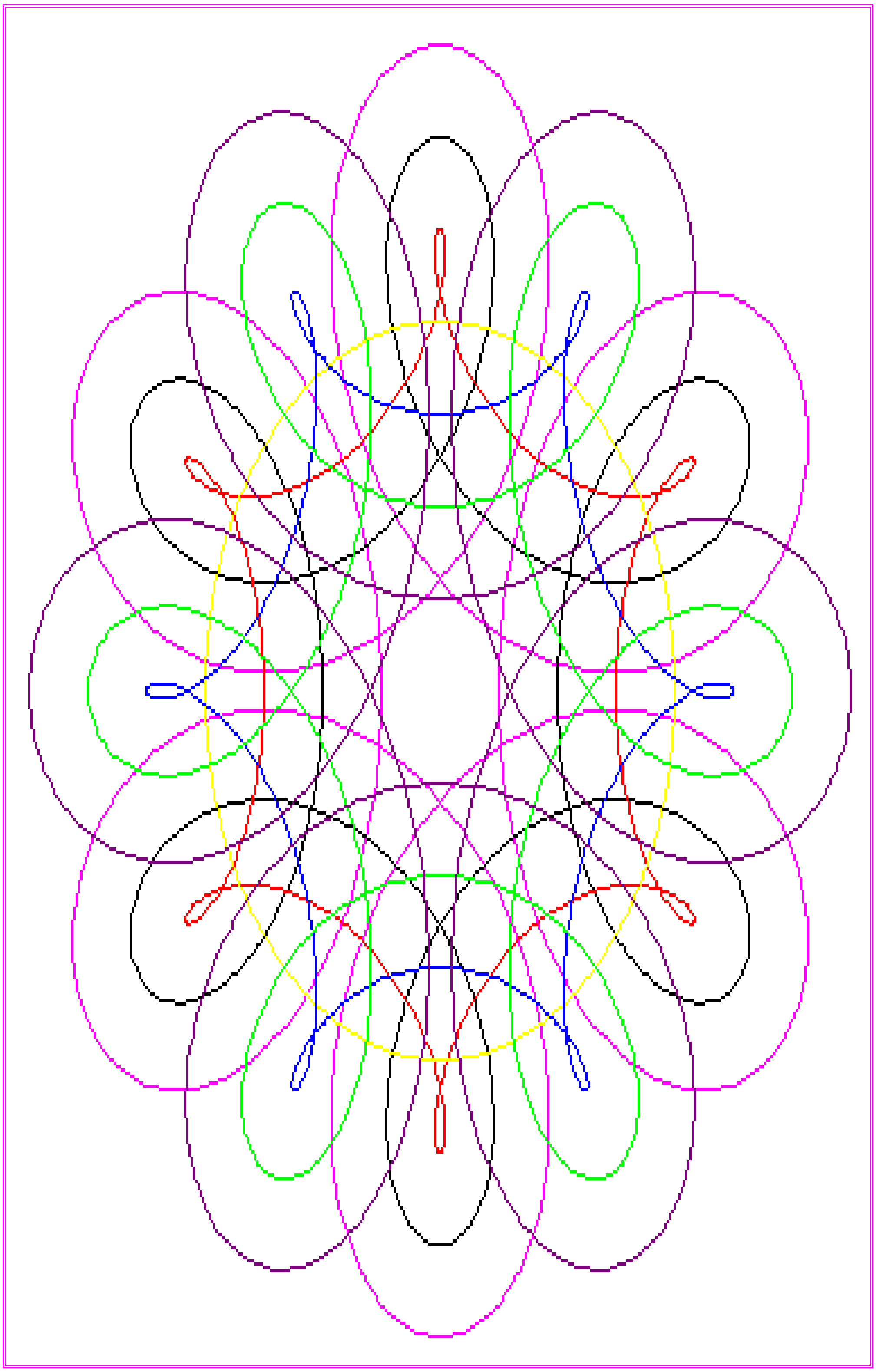
101/91 Belfast, GBR
102/91 Montabaur, D
103/91 Herford, D
104/91 Stockholm, S
105/91 Six Fours les Plaques, F
106/91 Weyhe, D
107/91 Ludwigshafen, D
108/91 Hohenbrunn, D
109/91 Malm”, S
110/91 Eindhoven, NL
111/91 Annemasse, F
112/91 Wien, A
113/91 Wien, A
114/91 Grahamstown, SA
115/91 Milano, I
116/91 Middlesbrough, GBR
117/91 Segrate, I
118/91 Wroclaw, PL
119/91 Paisley, GBR
120/91 Graz, A
121/91 Espoo, SF
122/91 Waldburg, D
123/91 London, BR
124/91 Oberdorf, CH
125/91 Worms, D
126/91 Eindhoven, NL
127/91 Madrid, E
128/91 Weinheim, D

If there is any new member, who has not received D-N-L #1, please inform the Editor. You will get #1 together with D-N-L #3.

For the next issue it is planned to present a "List of Members". If anybody does not want to be mentioned by name, please inform the editor.



scanned from the original DNL#1



VECTOR([-5·COS(t) - c·COS(-5t), -5·SIN(t) - c·SIN(-5t)],c,-3,3)