Känguru der Mathematik 2006
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich - 16.3.2006
Lösungen

1) Welche Zahl ist genau in der Mitte zwischen 2006 und 6002?

A) 3998 B) 4000 C) 4002 D) 4004 E) 4006

Antwort D

Lösung 1: Die gesuchte Zahl ist „auf halbem Weg“ von 2006 zu 6002. Weil die Differenz der beiden Zahlen gleich 6002 – 2006 = 3996 ist, ist die gesuchte Zahl um 3996 : 2 = 1998 größer als 2006 und um 1998 kleiner als 6002, also gleich

$$2006 + 1998 = 6002 - 1998 = 4004.$$

Lösung 2: Die gesuchte Zahl ist das arithmetische Mittel (der „Mittelwert“) von 2006 und 6002, also gleich

$$\frac{2006 + 6002}{2} = \frac{8008}{2} = 4004.$$

2) Wie viele vierziffrige Zahlen mit vier verschiedenen Ziffern sind durch 2006 teilbar?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Antwort C

Unter den vierziffrigen Zahlen sind genau die Zahlen

$$1\cdot 2006 = 2006,\ 2\cdot 2006 = 4012,\ 3\cdot 2006 = 6018,\ 4\cdot 2006 = 8024$$

durch 2006 teilbar. Drei davon (nämlich 4012, 6018 und 8024) haben vier verschiedene Ziffern.

3) Welche ist die kleinste 10-ziffrige Zahl die gebildet werden kann, indem man der Reihe nach die sechs Zahlen 309, 41, 5, 7, 68 und 2 anschreibt?

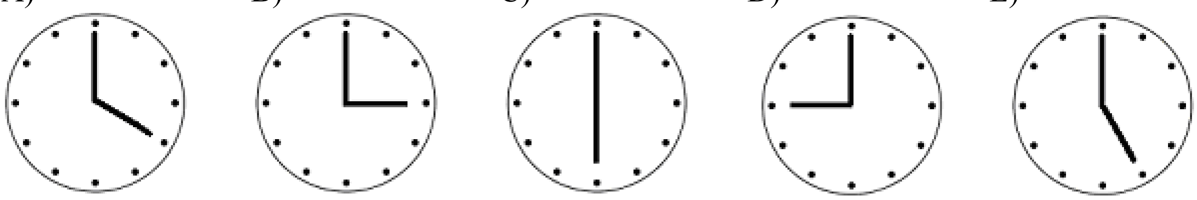
A) 1 234 567 890 B) 1 023 456 789 C) 3 097 568 241
D) 2 309 415 687 E) 2 309 415 678

Antwort D

Um die Zahl möglichst klein zu halten, beginnt man links mit einer Zahl mit einer möglichst kleinen vordersten Ziffer. Die kleinste vorderste Ziffer, die bei den gegebenen Zahlen vorkommt, ist 2. Dann setzt man entsprechend fort mit 309, 41, 5, 68 und 7, erhält also die Zahl 2 309 415 687.

4) In welchem Bild schließen die Zeiger einen Winkel von 150° ein?

A) B) C) D) E)



Antwort E

Der Stundenzeiger einer Uhr überstreicht in 12 Stunden 360°, in einer Stunde also 30°. Steht (wie in E)) der Minutenzeiger auf „12 Uhr (=0 Uhr)“, der Stundenzeiger auf „5 Uhr“, dann ist der eingeschlossene Winkel $5 \cdot 30° = 150°$.

5) Die Hälfte von einem Hundertstel ist

A) 0,005 B) 0,002 C) 0,05 D) 0,02 E) 0,5

Antwort A

$$\frac{1}{100} : 2 = \frac{1}{200} = 0{,}005$$

6) Wie oft zeigt ein digitale Uhr zwischen 00:00 und 23:59 genau die Ziffern 2, 0, 0 und 6 in irgendeiner Reihenfolge?

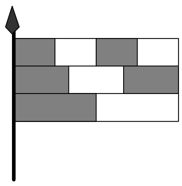
A) 1 mal B) 2 mal C) 3 mal D) 4 mal E) 5 mal

Antwort E

Lösung 1: Die Uhr zeigt die angegeben Ziffern um 00:26, 02:06, 06:02, 06:20 und 20:06, also fünfmal.

Lösung 2: Auf einer Digitaluhr kann die Ziffer 6 an zwei Stellen vorkommen: Als Einerziffer der Minutenangabe und als Einerziffer der Stundenangabe. Im ersten Fall kann die Ziffer 2 auf jedem der drei übrigen Plätze stehen, im zweiten Fall kann sie aber nur als Einerziffer der Stundenangabe oder als Zehnerziffer der Minutenangabe vorkommen, nicht aber als Zehnerziffer der Stundenangabe. (Die Uhrzeit 26:00) gibt es nicht. Damit zeigt die Uhr die Ziffern 2, 0, 0 und 6 fünfmal im gegebenen Zeitraum.

7) Eine Fahne besteht aus drei gleich breiten Streifen, die in zwei, drei beziehungsweise vier gleich lange Stücke unterteilt sind (sh. Abbildung). Welcher Bruchteil der Fahne ist dunkel gefärbt?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{9}$

Antwort E

Vom obersten Drittel (=Streifen) und vom untersten Drittel der Fahne ist jeweils die Hälfte dunkel gefärbt, vom mittleren Drittel sind es zwei Drittel. Der Bruchteil der Fahne, der dunkel gefärbt ist, ist also

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}.$$

8) Die Uhr meiner Oma geht jede Stunde eine Minute nach und die meines Opas geht jede Stunde eine halbe Minute vor. Als ich mich von ihnen verabschiede, stelle ich ihre Uhren beide richtig ein und sage, dass ich wiederkommen werde, sobald sich die Zeiten, die ihre Uhren anzeigen, um genau eine Stunde unterscheiden. Wie viele Stunden bleibe ich weg?

A) 12 Stunden B) $14\frac{1}{2}$ Stunden C) 40 Stunden D) 60 Stunden E) 90 Stunden

Antwort C

Die Abweichung zwischen den Zeiten, die die Uhren anzeigen, wird in jeder Stunde um 1,5 Minuten größer. Wird anfangs auf beiden Uhren dieselbe Zeit eingestellt, so dauert es bis zu dem Zeitpunkt, zu dem die Abweichung 1 Stunde = 60 Minuten beträgt, $\frac{60}{1{,}5}$ Stunden, also 40 Stunden.

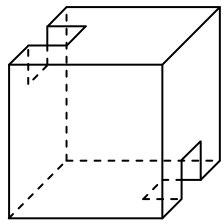
9) Opa sagt seinen Enkerln: "Wenn ich für jeden von euch 2 Riesenkekse backe, habe ich noch genug Teig für 3 weitere. Ich kann aber nicht für jeden 3 Kekse backen, dafür fehlt mir der Teig für 2 Kekse." Wie viele Enkerln hat der Opa?

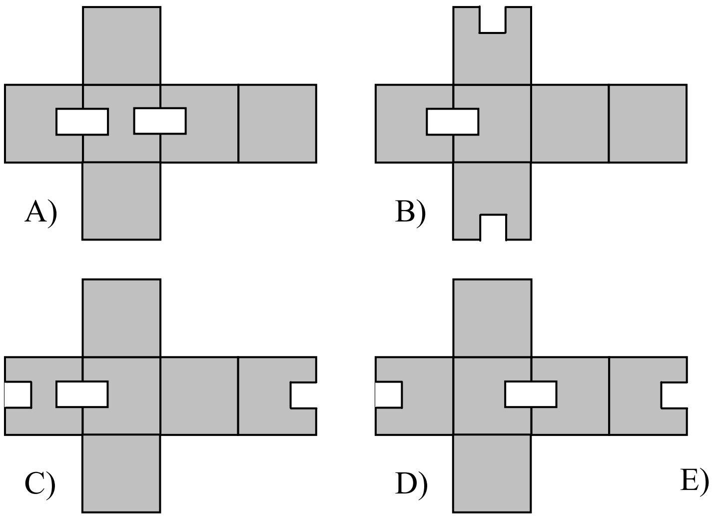
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Antwort D

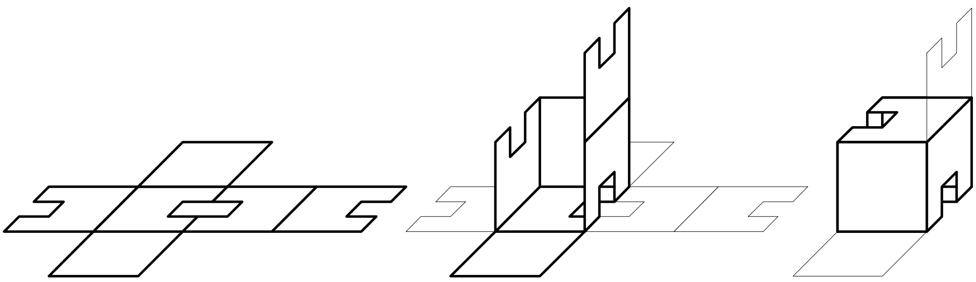
Bezeichnen wir die Anzahl von Opas Enkeln mit x, dann hat Opa aufgrund seiner ersten Aussage Teig für 2x+3 Kekse, aufgrund seiner zweiten Aussage Teig für 3x–2 Kekse. Die Gleichung 2x+3 = 3x–2 liefert die Lösung x = 5, also hat Opa 5 Enkel (und Teig für 13 Riesenkekse).

10) Der abgebildete hohle Würfel hat zwei Löcher. Welches ist ein mögliches Netz des Würfels?





Antwort D



- 4 Punkte Beispiele -

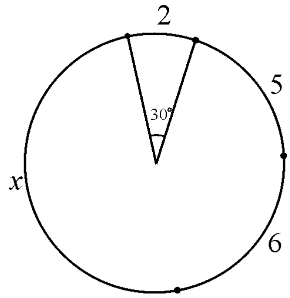
11) Von Claires Büchern sind 25% Romane sind und 1/9 Gedichtbände. Sie besitzt zwischen 50 und 100 Bücher. Wie viele Bücher hat sie genau?

A) 50 B) 56 C) 64 D) 72 E) 93

Antwort D

Wenn 25% - also ein Viertel - von Claires Bücher Romane sind und ein Neuntel Gedichtbände, dann muss die Anzahl ihrer Bücher sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar sein. Daher muss die Zahl ihrer Bücher ein Vielfaches von 36 sein. Die einzige Zahl zwischen 50 und 100, die ein Vielfaches von 36 ist, ist 72.

12) Ein Kreis wird in vier Bögen mit den Längen 2, 5, 6 und x geteilt. Welchen Wert hat x, wenn zum Bogen der Länge 2 ein Zentriwinkel von 30° gehört?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Antwort E

In jedem Sektor eines Kreises sind Bogenlänge und Zentriwinkel proportional zu einander. Gehört zum Bogen der Länge 2 ein Zentriwinkel von 30°, dann gehört zu einem Bogen der Länge 1 ein Zentriwinkel von 15°. Zu den Bögen der Länge 5 beziehungsweise 6 gehören daher Zentriwinkel von 75° beziehungsweise 90°.
Zum Bogen der Länge x gehört also ein Zentriwinkel von

$$360° - (30° + 75° + 90°) = 165°.$$

Damit gilt x = 165/15 = 11.

13) Für Zahlen a, b, c, d und e gilt $ab = 2$, $bc = 3$, $cd = 4$, $de = 5$. Wie groß ist $\frac{e}{a}$?

A) $\frac{15}{8}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{5}$ E) Man kann es nicht berechnen.

Antwort A

Es gilt

$$\frac{e}{a} = \frac{bc \cdot de}{ab \cdot cd} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} = \frac{15}{8}.$$

14) Ein Rüpel fragt Lady Agnes nach ihrem Alter. Sie antwortet: "Wenn ich hundert Jahre alt werden sollte, dann ist mein jetziges Alter vier Drittel von der Hälfte von der Zeit die mir noch bleibt." Wie alt ist Lady Agnes?

A) 20 B) 40 C) 50 D) 60 E) 80

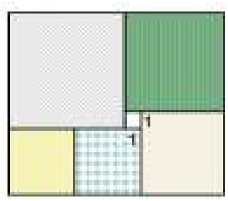
Antwort B

Ist Lady Agnes jetzt x Jahre alt, dann bleiben ihr bis zu einem Alter von 100 Jahren noch 100–x Jahre. Das ergibt die Gleichung

$$x = \frac{4}{3} \cdot \frac{100 - x}{2} \Leftrightarrow 3x = 200 - 2x \Leftrightarrow 5x = 200 \Leftrightarrow x = 40$$

Lady Agnes ist also 40 Jahre alt.

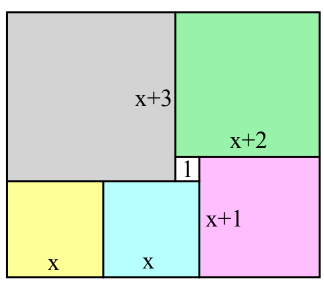
15) Das abgebildete Rechteck ist in sechs Quadrate zerteilt. Die Seitenlänge des kleinsten Quadrats beträgt 1 cm. Wie groß ist die Seitenlänge des größten Quadrats?



A) 4 cm B) 5 cm C) 6 cm D) 7 cm E) 8 cm

Antwort D

Bezeichnen wir die gemeinsame Seitenlänge der zwei gleich großen Quadrate links unten jeweils mit x, so hat (weil die Seitenlänge des kleinsten Quadrats 1 ist) das Quadrat rechts unten die Seitenlänge x+1, das Quadrat rechts oben die Seitenlänge x+2 und das größte Quadrat die Seitenlänge s = x+3.



Für die Länge des Rechtecks ergibt sich dann (oberer Rand, unterer Rand)

$$x + x + (x+1) = (x+2) + (x+3)$$
$$3x + 1 = 2x + 5$$
$$x = 4$$

Damit erhalten wir s = x+3 = 7cm.

16) Jeder Buchstabe steht für eine andere Ziffer. Für welche Ziffer steht G, wenn G<6 gelten muss?

```
    K A N
  + K A G
  + K N G
  -------
  2 0 0 6
```

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Antwort A

Die natürliche Zahl mit Hunderterziffer H, Zehnerziffer Z und Einerziffer E hat den Wert 100H+10Z+E. Daher kann die Rechnung geschrieben werden als

$$(100K + 10A + N) + (100K + 10A + G) + (100K + 10N + G) = 2006$$
$$300K + 20A + 11N + 2G = 2006.$$

Weil A, N und G Ziffern und damit kleiner als 10 sind, ist $20A+11N+2G$ kleiner als 330 und daher $300K$ größer als 1676. Daraus und aus $300K < 2100$ folgt

$$K = 6, \quad 20A + 11N + 2G = 206.$$

Weil $20A$, $2G$ und 206 gerade sind, muss auch $11N$ und daher auch N gerade sein.

Wäre N gleich 0, so müsste wegen $20A \leq 180$ gelten, dass $2G = 26$. Das widerspricht der Voraussetzung $G \leq 9$ (und auch $G < 6$).

Wäre N gleich 2, so müsste die Einerziffer von $2G$ gleich 4 sein, daraus folgte $G = 2$ oder $G = 7$; beides widerspricht den gemachten Voraussetzungen

Wäre N gleich 8, so müsste $2G$ die Einerziffer 8 haben, könnte wegen $G < 6$ also nur gleich 4 sein. Dann folgte aber

$$20A = 206 - 11 \cdot 8 - 8 = 206 - 96 = 110,$$

A wäre also nicht ganzzahlig.

Damit bleibt als einzige Möglichkeit $N = 4$. Die Einerziffer von $2G$ ist dann 2, also ergibt sich wegen $G < 6$ letztlich $G = 1$.

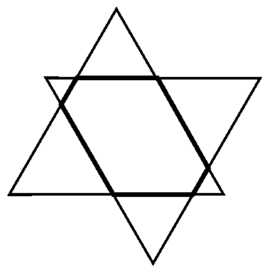
Eine Überprüfung bestätigt, dass sich mit

$$20A = 206 - 11 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 206 - 46 = 160, \quad A = 8$$

tatsächlich eine Lösung ergibt (sh. Abbildung).

```
    6 8 4
  + 6 8 1
  + 6 4 1
  -------
  2 0 0 6
```

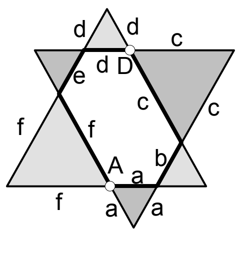
17) Zwei kongruente gleichseitige Dreiecke mit Umfang 18 cm werden wie dargestellt überlappend mit parallelen Seiten gezeichnet. Wie groß ist der Umfang des Sechsecks, das von beiden Dreiecken verdeckt wird?

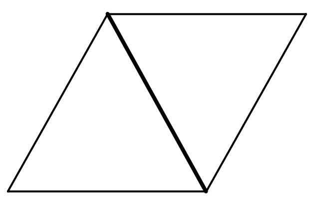


A) 11 cm B) 12 cm C) 13 cm D) 14 cm E) 15 cm

Antwort B

Lösung 1: Weil die beiden gleichseitigen Dreiecke zu einander parallele Seiten haben, sind die grau gefärbten Dreiecke, die über das Sechseck hinausragen, aus gleichseitige Dreiecke. Der Umfang des Sechsecks ist dann a+b+c+d+e+f.





Sowohl a+b+c als auch d+e+f ist Seitenlänge eines der beiden gleichseitigen Dreiecke, also gleich 18cm:3 = 6cm. Daher gilt $U_{Sechseck} = (a+b+c)+(d+e+f) = 2 \cdot 6cm = 12cm$.

Lösung 2: Aufgrund der Fragestellung und der angebotenen Lösungen ist der Umfang des Sechsecks unabhängig von der Form des Sechsecks. Werden die beiden Dreiecke speziell wie in der rechten Abbildung so übereinander gelegt, dass sie (fast) eine Seite gemeinsam haben, so stimmt der "Umfang des Sechsecks" mit der doppelten Seitenlänge s eines Dreiecks überein, ist also wegen s = 18cm:3 = 6cm gleich 2·6cm = 12cm.

18) Wie vielen Ziffern kann eine Zahl höchstens haben, wenn jede Zahl, die aus zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Ziffern der Zahl besteht, eine Quadratzahl ist?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 6 E) 10

Antwort A

Zweistellige Quadratzahlen sind die Zahlen 16, 25, 36, 49, 64 und 81.
Weil es keine zweistellige Quadratzahl gibt, die mit 5 beginnt oder mit 2 endet, ist 25 für den Bau einer Zahl mit der geforderten Eigenschaft nicht verwendbar.
Weil keine zweistellige Quadratzahl mit 3 oder 8 endet, kann sowohl 36 als auch 81 nur als vorderste Zahl verwendet werden.
Weil keine zweistellige Quadratzahl mit 9 beginnt, kann 49 nur als letzte Zahl verwendet werden.
Vor 64 kann 16 stehen (164) oder 36 (364); weil aber vor 16 noch 81 stehen kann, vor 36 aber keine andere Quadratzahl, ist die längste Zahl mit der geforderten Eigenschaft, die gebildet werden kann, die fünfstellige Zahl 81649.

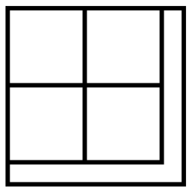
19) In einer Schachtel befinden sich 15 Kugeln, die rot-blau (eine Halbkugel rot, die andere blau) gefärbt sind, 12 Kugeln, die blau-grün gefärbt sind, und 9 grün-rote Bälle. Mehrere Kugeln werden blind gezogen. Wie viele Kugeln muss man mindestens ziehen, damit man sicher mindestens sieben Kugeln mit einer gemeinsamen Farbe gezogen hat?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Antwort D

Jede Kugel besteht aus 2 verschieden gefärbten Kugelhälften. Nach dem Ziehen von 10 Kugeln hat man 20 Kugelhälften in der Hand. Weil 20 größer ist als 3·6, gibt es mindestens eine Farbe, in der mindestens 7 dieser Kugelhälften gefärbt sind, man hat also sicher mindestens 7 Kugeln mit einer gemeinsamen Farbe gezogen.
Zieht man allerdings nur 9 Kugeln, so können das genau drei von jeder Sorte sein, und jede der drei Farben kommt nur auf sechs Kugeln vor.

20) Ein Quadrat mit der Fläche 125 cm² wird in fünf Teile mit gleicher Fläche (vier Quadrate und ein L-förmiges Stück) wie abgebildet zerteilt. Wie lang ist die kürzeste Seite des L-förmigen Stücks?



A) 1 cm B) 1,2 cm C) $2(\sqrt{5}-2)\,\text{cm}$ D) $3(\sqrt{5}-1)\,\text{cm}$ E) $5(\sqrt{5}-2)\,\text{cm}$

Antwort E

Für die Seitenlänge S des großen Quadrats gilt

$$S = \sqrt{125}\,\text{cm} = 5\sqrt{5}\,\text{cm}.$$

Der Flächeninhlat jeder der fünf Teilfiguren, also auch der der vier kleinen Quadrate, beträgt 125/5cm² = 25cm², also ist die Seitenlänge s jedes der kleinen Quadrat gleich

$$s = \sqrt{25}\,\text{cm} = 5\,\text{cm}.$$

Für Länge l der kürzesten Seite des L-förmigen Stücks erahlten wir daher

$$l = S - 2s = (5\sqrt{5} - 2\cdot 5)\,\text{cm} = 5(\sqrt{5}-2)\,\text{cm}.$$

- 5 Punkte Beispiele -

21) Die Summe dreier positiver Zahlen ist 20. Dann ist das Produkt der zwei größeren Zahlen

A) immer kleiner als 99 B) immer größer als 0,001 C) immer ungleich 25
D) immer ungleich 75 E) Keine der Eigenschaften A bis D muss gelten

Antwort E

Ist die größte der drei Zahlen gleich 10, die zweitgrößte beliebig nahe an 10, dann ist ihr Produkt beliebig nahe 100 (z.B.: $10 \cdot 9{,}99 = 99{,}9$). Damit scheidet Antwort A aus.
Ist die größte der drei Zahlen sehr nahe 20, die zweitgrößte beliebig nahe 0, dann ist auch ihr Produkt beliebig nahe 0 (z.B: $19{,}999989 \cdot 0{,}00001 = 0{,}00001999989$). Damit fällt B.
Ist die größte Zahl 18, die zweitgrößte 25/18 (und damit die kleinste 11/18), dann erhalten wir als Produkt 25; Aussage C ist also falsch.
Sind die zwei größeren Zahlen 10 und 7,5 (und daher die dritte Zahl 2,5), so ist das Produkt 75. Damit ist auch D widerlegt.
Somit ist Aussage E richtig.

22) Ein Zug wird aus fünf verschiedenen Waggons I, II, III, IV und V zusammengestellt, die von einer Lok gezogen werden. Auf wie viele Arten kann der Zug zusammengestellt werden, wenn Waggon I immer vor Waggon II im Zug sein muss?

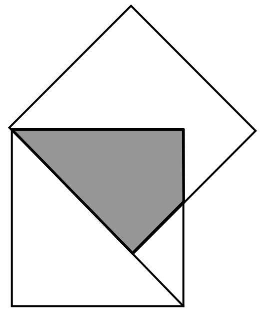
A) 120 B) 60 C) 48 D) 30 E) 10

Antwort B

Lösung 1: Wir beginnen damit, Lok (L) und die Waggons I und II in der vorgegebene Reihenfolge anzuordnen: L – I – II.
Waggon III kann nun an drei Stellen eingereiht werden: Zwischen Lok und Waggon I, zwischen den Waggons I und II und nach Waggon II.
Ist Waggon III eingereiht, so gibt es für die Position von Waggon IV vier verschiedene Möglichkeiten: Zwischen Waggon und vorderstem Waggon, unmittelbar hinter dem vordersten der drei Waggons, unmittelbar vor dem hintersten der drei Waggons und am Enden des Zugs.
Danach ergeben sich fünf Möglichkeiten für das Einreihen von Waggon V.
Insgesamt kann der Zug also auf $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ Arten zusammengestellt werden.

Lösung 2: Weil immer Waggon I vor Waggon II im Zug sein muss, gibt es für Waggon II unter den fünf Positionen für die fünf Waggons
â 4 Möglichkeiten, wenn Waggon I auf Position 1 (als erster Waggon unmittelbar hinter der Lok) ist,
â 3 Möglichkeiten, wenn Waggon I auf Position 2, also zweiter Waggon hinter der Lok ist,
â 2 Möglichkeiten, wenn Waggon I dritter Waggon hinter der Lok ist und
â 1 Möglichkeit, wenn Waggon I vierter (also vorletzter) Waggon hinter der Lok ist.
Für die restlichen 3 Waggons gibt es in jedem Fall $3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene Möglichkeiten, sie an den restlichen drei Positionen einzureihen.
Damit gibt es $(4+3+2+1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 60$ mögliche zulässige Zusammenstellungen des Zugs.

23) Zwei Quadrate mit der Seitenlänge 1 haben einen gemeinsamen Eckpunkt. Die Seite eines Quadrats liegt auf der Diagonalen des anderen. Wie groß ist der Flächeninhalt des gemeinsamen Flächenstücks?

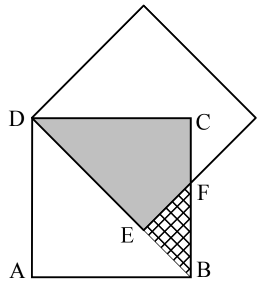


A) $\sqrt{2}-1$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ D) $\sqrt{2}+1$ E) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

Antwort A

Lösung 1: Den gesuchten Flächeninhalt erhält man, indem man vom Flächeninhalt A_{BCD} des gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreiecks BCD den Flächeninhalt A_{BEF} des Dreiecks BEF abzieht. Wegen BC = CD = 1 gilt

$$A_{BCD} = \frac{BC \cdot CD}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$



Wegen BE $\perp$ EF und $\angle$FBE =45° ist auch das Dreieck BEF gleichschenkelig-rechtwinkelig, also gilt

$$BE = EF = BD - DE = \sqrt{2}-1, \quad A_{BEF} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

und damit

$$A_{CDEF} = \frac{1}{2} - \frac{3-2\sqrt{2}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}-1.$$

Lösung 2: Das Viereck CDEF ist ein Deltoid mit Symmetrieachse DF und rechten Winkeln in C und E. Daher gilt

$$A_{CDEF} = 2 \cdot A_{DEF} = 2 \cdot \frac{DE \cdot EF}{2} = DE \cdot EF.$$

Wegen DE = 1, EF = $\sqrt{2}-1$ (sh. Lösung 1) erhalten wir damit

$$A_{CDEF} = DE \cdot EF = 1 \cdot (\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1.$$

24) Familie Plattner besteht aus Vater, Mutter und einigen Kindern. Das Durchschnittsalter der Familie beträgt 18 Jahre. Ohne den 38-jährigen Vater sinkt sich das Durchschnittsalter der Familie auf 14 Jahre. Wie viele Kinder gibt es in der Familie Plattner?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Antwort C

Angenommen, die Familie Plattner hat n Kinder. Zusammen mit Vater und Mutter sind das n+2 Familienmitglieder, die ein Durchschnittsalter von 18 Jahren haben. Daher erhält man, wenn man das Alter aller Familienmitglieder zusammenzählt, 18(n+2) Jahre. Das Durchschnittsalter aller n+1 Familienmitglieder ohne den Vater beträgt 14 Jahre, die Summe ihrer Lebenalter beträgt also 14(n+1) Jahre. Zählt man für den Vater noch seine 38 Jahre dazu, so erhält man als Summe für alle Familienmitglieder 14(n+1)+38 Jahre. Daher gilt

$$18(n+2) = 14(n+1) + 38$$
$$18n + 36 = 14n + 52$$
$$4n = 16$$
$$n = 4$$

Familie Plattner hat also 4 Kinder.

25) Die Zahlen 1, 2 und 3 werden auf einem Kreis angeschrieben. Zwischen je zwei dieser Zahlen wird nun die Summe der beiden benachbarten Zahlen angeschrieben, sodass sich am Kreis 6 Zahlen (1, 3, 2, 5, 3 und 4) ergeben. Dieser Vorgang wird weitere 4 Mal durchgeführt, wonach sich auf dem Kreis 96 Zahlen befinden. Was ist die Summe all dieser Zahlen?

A) 486 B) 2187 C) 1458 D) 4374 E) 998.

Antwort C

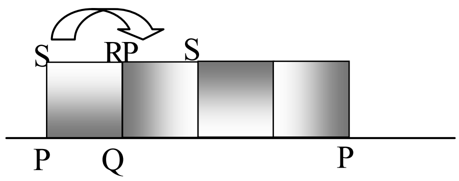
Anfangs ist die Summe der auf dem Kreis stehenden Zahlen gleich $s_0 = 1+2+3 = 6$.
Jedes Mal, wenn ringsum zwischen je zwei Zahlen eine weitere Zahl geschrieben wird, verdreifacht sich diese Summe: Jede der ursprünglichen Zahlen bleibt selbst stehen und wird bei jeder der beiden neu angeschriebenen Nachbarzahlen als Summand verwendet.
Daher gilt für n ≥ 1

$$s_n = 3 \cdot s_{n-1} = 3^n \cdot s_0.$$

Wird der Vorgang nach dem ersten Mal noch 4 weitere Male durchgeführt, so erhalten wir als Summe der 96 Zahlen auf dem Kreis nach 5 solchen Operationen

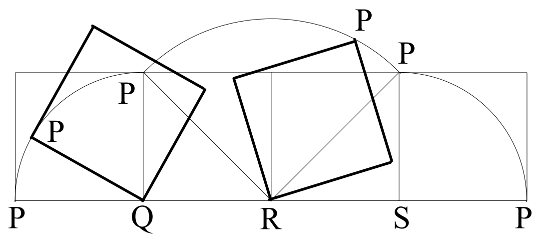
$$s_5 = 3^5 \cdot s_0 = 243 \cdot 6 = 1458.$$

26) Ein Quadrat PQRS mit der Seitenlänge 10 cm rollt ohne ohne Verrutschen auf einer Geraden. Zu Beginn liegen P und Q auf der Geraden. Die erste Rollbewegung ist wie abgebildet eine Drehung um den Punkt Q. Das Abrollen ist zu Ende, wenn der Punkt P zum ersten Mal wieder auf der Geraden aufkommt. Wie lang ist die von P zurückgelegte Bahnkurve?



A) 10π B) $5\pi + 5\pi\sqrt{2}$ C) $10\pi + 5\pi\sqrt{2}$ D) $5\pi + 10\pi\sqrt{2}$
E) $10\pi + 10\pi\sqrt{2}$

Antwort C



Bei der ersten Drehung (um Q) ist die Bahn von P ein Viertelkreisbogen mit Radius 10cm, bei der zweiten Drehung (um den P diagonal gegenüber liegenden Punkt R) wandert P auf einem Viertelkreisbogen mit Radius $10\sqrt{2}$ cm. Bahnkurve von P bei der letzten Drehung (um S) ist wieder ein Viertelkreisbogen mit Radius 10cm. Die von P zurückgelegte Bahnkurve hat (in cm) also die Länge

$$l = 2 \cdot \frac{10\pi}{2} + \frac{10\sqrt{2}\pi}{2} = 10\pi + 5\pi\sqrt{2}$$

27) Die Zahl 257 hat drei verschiedene Ziffern, die, wenn man sie in umgekehrter Reihenfolge anschreibt, eine größere Zahl (752) bilden. Wie viele verschiedene dreiziffrige Zahlen haben diese Eigenschaft?

A) 124 B) 252 C) 280 D) 288 E) 360

Antwort D

Die gesuchte Zahl ist die Anzahl der dreistelligen natürlichen Zahlen mit drei verschiedenen Ziffern, deren Hunderterziffer kleiner als die Einerziffer ist.
Es gibt 10 Möglichkeiten, eine beliebige Ziffer auszuwählen, und 9 Möglichkeiten, eine zweite, davon verschiedene Ziffer zu wählen. Damit gibt es $10 \cdot 9 = 90$ Möglichkeiten, zwei verschiedene Ziffern (unter Berücksichtigung der Reihenfolge) auszuwählen. In der Hälfte aller 90 Fälle, also in 45 Fällen, ist die erste ausgewählte Ziffer kleiner als die zweite, in 9 dieser 45 Fälle ist dabei die erste Ziffer 0. Somit gibt es 36 Möglichkeiten für die Wahl von Hunderterziffer ($\neq 0$) und Einerziffer einer dreistelligen Zahl derart, dass die Hunderterziffer kleiner als die Einerziffer ist. Für jede dieser 36 Möglichkeiten stehen noch 8 von Hunderter- und Einerziffer verschiedene Ziffern als Zehnerziffer zur Verfügung. Daher ist die Anzahl der Zahlen mit der geforderten Eigenschaft $36 \cdot 8 = 288$.

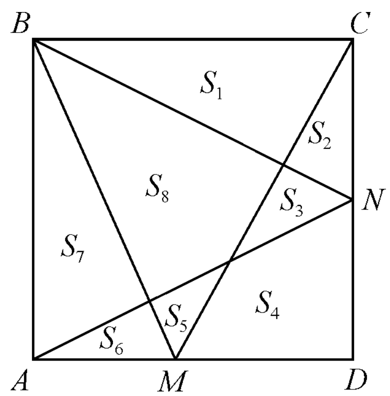
28) Y wird definiert als die Ziffernsumme von X, Z wird definiert als die Ziffernsumme von Y. Wie viele positive ganze Zahlen gibt es mit $X+Y+Z = 60$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) mehr als 3

Antwort D

Jede natürliche Zahl lässt bei Division durch 9 denselben Rest wie ihre Ziffernsumme. Das bedeutet, dass bei Division durch 9 X, Y und Z denselben Rest lassen. Dieser Rest kann nicht 0, 3 oder 6 sein, denn in jedem dieser Fälle wäre X+Y+Z im Gegensatz zu 60 durch 9 teilbar. Er kann aber auch nicht 1, 4 oder 7 sein, denn in jedem dieser Fälle wäre der Rest von X+Y+Z bei Division durch 9 gleich 3; 60 aber lässt bei Division durch 9 den Rest 6. Das bedeutet, dass X, Y und Z bei Division den Rest 2, 5 oder 8 lassen.
Darüber hinaus muss klarerweise X kleiner als 60 sein. Keine Zahl X kleiner als 60 hat eine Ziffernsumme Y größer als $5+9 = 14$, und keine Zahl $Y \leq 14$ hat eine Ziffernsumme größer als 9. Daher muss X größer als $60 - (14 + 9) = 37$ sein. Somit kommen für X nur mehr Zahlen aus $\{38, 41, 44, 47, 50, 53, 55, 58\}$ in Frage.
Für $X \in \{53, 55, 58\}$ gilt aber schon $X+Y > 60$; für $X \in \{38, 41\}$ gilt $X+Y+Z < 60$.
Aus $X = 44$ folgt $Y = Z = 8$, aus $X = 47$ folgt $Y = 11$, $Z = 2$, und aus $X = 50$ folgt $Y = Z = 5$. In jedem dieser drei Fälle gilt $X+Y+Z = 60$.

29) M und N sind beliebig gewählte innere Punkte der Seiten AD und CD eines Quadrats ABCD. Das Quadrat wird in 8 Teile zerschnitten, wobei die Flächen der Teile wie abgebildet bezeichnet werden. Welche der folgenden Flächensummen stimmt in jedem Fall mit S_8 überein?



A) $S_2+S_4+S_6$ B) $S_1+S_3+S_5+S_7$ C) $S_1+S_4+S_7$
D) $S_2+S_5+S_7$ E) $S_3+S_4+S_5$

Antwort A

Klarerweise gilt

$$A_{BCM} = A_{ABN} = A_{ADN} + A_{BCN} = \frac{A_{ABCD}}{2}.$$

Daraus (d.h. aus $A_{BCM} = A_{ADN} + A_{BCN}$) folgt

$$S_1 + S_5 + S_8 = S_1 + S_2 + S_4 + S_5 + S_6$$

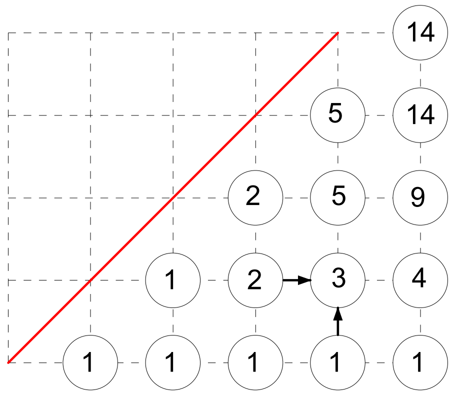
$$S_8 = S_2 + S_4 + S_6$$

30) Das Fußballmatch Strom gegen Repeat endet 5:4 für Strom. Seit dem ersten Tor ist Strom immer in Führung gelegen. Wie viele verschiedene mögliche Torfolgen gibt es mit dieser Eigenschaft?

A) 17 B) 13 C) 20 D) 14 E) 9

Antwort D

Jede mögliche Torfolge kann als „Pfad“ entlang der Kanten eines 5×4-Rasters von der linken unteren Ecke (0:0) zur rechten oberen Ecke (5:4) dargestellt werden. Bei jedem Tor für Strom wird der Pfad durch eine Teilstrecke der Länge 1 nach rechts fortgesetzt, bei jedem Tor für Repeat um eine Teilstrecke nach oben. Weil Strom ab dem ersten Tor immer in Führung liegt, geht der Pfad nach dem ersten Tor (für Strom) nie auf die rot eingezeichnete „Unentschieden-Linie“ und nie in den darüber liegenden Bereich („Repeat in Führung“).



Einem aktuellen Spielstand x:y können höchstens zwei verschiedene Spielstände vorausgegangen sein, nämlich (x-1) : y oder x : (y-1). Daher ist die Anzahl der möglichen Torfolgen bis zu einem gegebenen Spielstand (also sie Anzahl der möglichen Torfolgen bis zu einem durch einen speziellen Punkt im Raster dargestellten Spielstand) die Summe der Anzahl der möglichen Torfolgen bis zum darunter liegenden Punkt und der Anzahl der möglichen Torfolgen bis zum links liegenden Punkt, jeweils unter der Voraussetzung, das dieser Punkt einen zulässigen Spielstand darstellt. (Bis zum Spielstand von 4:1 gibt es also drei mögliche Torfolgen: Zwei, bei denen es zuerst 3:1 gestanden ist, nämlich 1:0 – 2:0 – 2:1 – 3:1 – 4:1 und 1:0 – 2:0 – 3:0 – 3:1 – 4:1 , und eine, bei der es zuerst 4:0 gestanden ist: 1:0 – 2:0 – 3:0 – 4:0 – 4:1).

Damit ergeben sich die im Raster angeschriebenen Zahlen, bis zum 5:4 ergeben sich also 14 mögliche Torfolgen.