

Übungen zum Hauptsatz der Integralrechnung

Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Beispiel:

$$\int_1^4 x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^4 = \frac{1}{2} 4^2 - \frac{1}{2} 1^2 = 7.5$$

- Zeichne bei den folgenden Aufgaben den Graphen der Funktion f in GeoGebra oder Derive und gib die Nullstellen an.
- Berechne den Inhalt der jeweils gesuchten Fläche in deinem Heft ohne Hilfe des Computers. Verwende dazu den Hauptsatz der Integralrechnung (siehe oben).
- Überprüfe dann dein Ergebnis, indem du die gesuchte Fläche mit Hilfe von Derive oder GeoGebra durch Ober- und Untersummen annäherst oder das Integral berechnen lässt.

1. $f(x) = \frac{1}{4} x(x-6)^2 = \frac{1}{4} (x^3 - 12x^2 + 36x)$

Wie groß ist die Fläche, die von dem oberhalb der x-Achse liegenden Teil des Graphen von f und der x-Achse begrenzt wird?

2. $f(x) = \cos(x) + 1$

Wie groß ist die Fläche, die vom Funktionsgraphen, der positiven x-Achse und der positiven y-Achse begrenzt wird?

3. Die Tangente im Punkt $P=(6, y_P)$ des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{6x}$, der Graph der Funktion und die y-Achse begrenzen eine Fläche. Wie groß ist diese?

4. In welchem Intervall $(0; b)$ hat $\int_0^b \left(x^2 - 2x - \frac{4}{3} \right) dx$ den Wert 0?

Neben der trivialen Lösung $b = 0$ gibt es die Lösung $b = 4$.
Zeige das und interpretiere dieses Ergebnis geometrisch.